

圆柱正交异性复合厚壁圆筒 的弹-塑性分析*

周次青 丘益元

(华南工学院数学力学系, 1983年5月15日收到)

摘 要

本文导出了不可压缩和可压缩材料, 平面应变问题的Tsai-Hill 屈服准则形式; 研究了在均匀径向压力作用下圆柱正交异性复合厚壁圆筒的弹-塑性应力场和位移场, 求得了弹性屈服压力、极限载荷和安定载荷的公式

一、引 言

承受内压的圆筒(容器)是很多机器和结构中的一个重要构件。对于具有各向同性厚壁筒

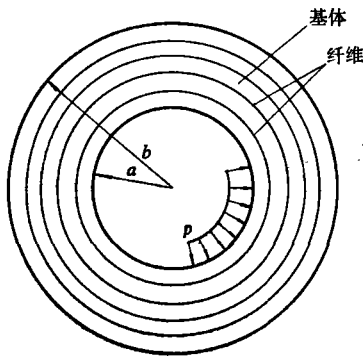


图 1

的弹-塑性分析已有大量的理论和实验研究。近年来, 随着航空空间等技术的发展, 对材料性能的要求愈来愈高。由于纤维增强复合材料具有比强度高、比刚度高、抗疲劳性能好、耐腐蚀和耐热性好以及制造工艺简便等优点, 正日趋得到广泛的研制和发展。因此本文对具有圆柱正交异性[例如, 将纤维沿周向按排(图1)], 承受内压的复合厚壁圆筒进行了弹-塑性分析, 假设材料是理想弹-塑性的。S. G. Lekhniskii, A. N Mitinskii和M. M. Plotnikov 等人曾作过弹性分析^[1], 但就我们所知, 弹-塑性分析则还未见文献。

二、平面应变问题之屈服准则的导出

由于问题是轴对称的, 我们采用圆柱坐标系 (r, θ, z) , z 轴与筒轴复合, a, b 分别为筒的内、外半径, 其几何轴与圆柱正交异性轴一致。筒只受内压 p 作用, 筒身很长, 可视为平面应变问题。

对于各向异性材料, Tsai-Hill屈服准则为^[2]

$$(G+H)\sigma_r^2 + (F+H)\sigma_\theta^2 + (F+G)\sigma_z^2 - 2H\sigma_r\sigma_\theta - 2G\sigma_r\sigma_z - 2F\sigma_\theta\sigma_z + 2L\tau_{r\theta}^2 + 2M\tau_{r\theta}^2 + 2N\tau_{\theta z}^2 = 1 \quad (2.1)$$

* 钱伟长推荐。

式中

$$G+H=\frac{1}{X^2}, \quad F+H=\frac{1}{Y^2}, \quad F+G=\frac{1}{Z^2}$$

即

$$\left. \begin{aligned} 2H &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2} \\ 2G &= \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2} \\ 2F &= \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

X 、 Y 和 Z 分别为材料在 θ 、 r 和 z 方向的强度。

应力、应变关系为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{rr} & s_{r\theta} & s_{rz} \\ s_{\theta r} & s_{\theta\theta} & s_{\theta z} \\ s_{zr} & s_{z\theta} & s_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \\ \sigma_z \end{Bmatrix} \quad (2.3)$$

若纤维在 θ 方向增强，由几何的对称性，有 $Y=Z$ 。对于平面应变情形， $\varepsilon_z=0$ 。由(2.3)式，有

$$\sigma_z = -s_2\sigma_r - s_1\sigma_\theta \quad (2.4)$$

式中

$$s_1 = \frac{s_{z\theta}}{s_{zz}}, \quad s_2 = \frac{s_{zr}}{s_{zz}} \quad (2.5)$$

将(2.4)式代入公式(2.1)，得到可压缩材料的Tsai-Hill屈服准则为

$$a_1\sigma_\theta^2 + b_1\sigma_\theta\sigma_r + c_1\sigma_r^2 = X^2Y^2 \quad (2.6)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= Y^2(1+s_1) + X^2s_1^2 \\ b_1 &= X^2[2s_1(1+s_2)] + Y^2(s_2-1-s_1) \\ c_1 &= X^2(1+s_2)^2 - Y^2s_2 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

若材料视为不可压缩的，则

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = 0 \quad (2.8)$$

此时的屈服准则为

$$\sigma_\theta - \sigma_r = M \quad (2.9)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{(1-d_1)XY}{\sqrt{a_1+b_1d_1+c_1d_1^2}} \\ d_1 &= \frac{s_1(s_2+s_1)-(s_4+s_6)}{(s_3+s_4)-s_2(s_1+s_2)} \\ s_3 &= \frac{s_{rr}}{s_{zz}}, \quad s_4 = \frac{s_{r\theta}}{s_{zz}}, \quad s_5 = \frac{s_{\theta\theta}}{s_{zz}} \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

三、弹-塑性分析

I. 弹性状态 平衡方程为

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} = \sigma_\theta - \sigma_r \quad (3.1)$$

式中

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{rr} & Q_{r\theta} \\ Q_{r\theta} & Q_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

应变分量为

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (3.3)$$

边界条件为

$$\begin{aligned} r=a, & \quad \sigma_r = -p \\ r=b, & \quad \sigma_r = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

以径向位移 u 作为基本未知量, 可得满足以上方程的弹性解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{pa}{r} \left[\frac{\left(\frac{r}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{b}{r}\right)^{\sqrt{k_1}}}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{k_1}}} \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{pa}{r} \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{k_1}}} \left[\frac{\sqrt{k_1} + k_2}{k_3 \sqrt{k_1} + 1} \left(\frac{r}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \frac{\sqrt{k_1} - k_2}{k_3 \sqrt{k_1} - 1} \left(\frac{b}{r}\right)^{\sqrt{k_1}} \right] \\ \sigma_z &= \frac{pa}{r} \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{k_1}}} \left\{ \left[s_2 + \frac{s_1(\sqrt{k_1} + k_2)}{k_3 \sqrt{k_1} + 1} \right] \left(\frac{r}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} \right. \\ &\quad \left. - \left[s_2 + \frac{s_1(\sqrt{k_1} - k_2)}{k_3 \sqrt{k_1} - 1} \right] \left(\frac{b}{r}\right)^{\sqrt{k_1}} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

式中

$$k_1 = Q_{\theta\theta}/Q_{rr}, \quad k_2 = Q_{\theta\theta}/Q_{r\theta}, \quad k_3 = Q_{rr}/Q_{r\theta} \quad (3.6)$$

当内压力 p 达到弹性屈服压力 p_e 时, 材料在内缘 $r=a$ 处进入塑性状态. 将应力表达式(3.5)代入屈服准则(2.6)或(2.9)式, 得到可压缩材料的弹性屈服压力为

$$p_e = \frac{1}{\sqrt{a_1 \left(\frac{m}{n}\right)^2 + b_1 \left(\frac{m}{n}\right) + c_1}} XY \quad (\text{可压缩}) \quad (3.7)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} m &= \frac{\sqrt{k_1} + k_2}{k_3 \sqrt{k_1} + 1} \left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \frac{\sqrt{k_1} - k_2}{k_3 \sqrt{k_1} - 1} \left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{k_1}} \\ n &= \left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{k_1}} \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

或

$$p_e = \frac{M \left[1 - \left(\frac{a}{b} \right)^{2\sqrt{k_1}} \right]}{\left(\frac{\sqrt{k_1+k_2}}{k_3\sqrt{k_1+1}} - 1 \right) \left(\frac{a}{b} \right)^{2\sqrt{k_1}} - \frac{\sqrt{k_1-k_2}}{k_3\sqrt{k_1-1}} + 1} \quad (\text{不可压缩}) \quad (3.9)$$

II. 极限状态 满足平衡方程(3.1), 屈服条件 (2.9) 和相应边界条件的解为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p + M \ln \frac{r}{a} \\ \sigma_\theta &= -p + M \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

当 $r=b$ 时达到极限状态, 纵边界条件 (3.4) 容易看出极限载荷为

$$p_f = M \ln \frac{b}{a} \quad (3.11)$$

因此, 对于不可压缩材料全塑性状态下的应力分布为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= M \ln \frac{r}{b} \\ \sigma_\theta &= M \left(1 + \ln \frac{r}{b} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

为求得可压缩材料在极限状态下的应力, 可将屈服准则 (2.6) 表为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \left[\frac{g}{e_1} \cos t - \frac{b_1}{f} \sin t \right] XY \\ \sigma_\theta &= \left[\frac{b_1}{e_1} \cos t + \frac{g}{f} \sin t \right] XY \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= \sqrt{c_1 g^2 + b_1^2 (g + a_1)} \\ f &= \sqrt{a_1 g^2 - b_1^2 (g - c_1)} \\ g &= \sqrt{(a_1 - c_1)^2 + b_1^2} - (a_1 - c_1) \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

t 是参数, 表征应力点在屈服椭圆上的位置。

将应力表达式 (3.13) 代入平衡方程(3.1), 则方程 (3.1) 给定为参数形式

$$r \frac{d}{dr} \left[\frac{g}{e_1} \cos t - \frac{b_1}{f} \sin t \right] = \frac{b_1 - g}{e_1} \cos t + \frac{g + b_1}{f} \sin t \quad (3.15)$$

其解为

$$\frac{b}{r} = \Theta(t) \cdot \exp \left[\frac{e_1 f (b_1^2 + g^2) (t - t_b)}{e_1^2 (g + b_1)^2 + f^2 (g - b_1)^2} \right] \quad (3.16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Theta(t) &= \frac{g e_1 (g + b_1) \sin t - f g (g - b_1) \cos t}{[g e_1 (g + b_1) - e_1 b_1 (g - b_1)] \sin t_b} \\ \Phi &= \frac{g f^2 (g - b_1) + b_1 e_1^2 (g + b_1)}{e_1^2 (g + b_1)^2 + f^2 (g - b_1)^2}, \quad t_b = \text{tg}^{-1} \left(\frac{f g}{b_1 e_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

从方程 (3.16) 和 (3.13) 我们可找到应力分量 σ_r 、 σ_θ 和 r 之间的关系。于是, 可压缩材料在全塑性状态下的应力分布便可确定^[5]。

Ⅲ. 弹-塑性状态 设弹-塑性区交界线 Γ 的半径为 c (c 待定). 显然, 在弹性区 $c \leq r \leq b$ 内的应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{p_c \cdot c}{r} \left[\frac{\left(\frac{r}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{b}{r}\right)^{\sqrt{k_1}}}{\left(\frac{c}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{b}{c}\right)^{\sqrt{k_1}}} \right] \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_c \cdot c}{r} \cdot \frac{1}{\left(\frac{c}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{b}{c}\right)^{\sqrt{k_1}}} \left[\frac{\sqrt{k_1+k_2}}{k_3\sqrt{k_1}+1} \left(\frac{r}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \frac{\sqrt{k_1-k_2}}{k_3\sqrt{k_1}-1} \left(\frac{b}{r}\right)^{\sqrt{k_1}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

$$p_c = \frac{M \left[1 - \left(\frac{c}{b}\right)^{2\sqrt{k_1}} \right]}{\left(\frac{\sqrt{k_1+k_2}}{k_3\sqrt{k_1}+1} - 1 \right) \left(\frac{c}{b}\right)^{2\sqrt{k_1}} - \frac{\sqrt{k_1-k_2}}{k_3\sqrt{k_1}-1} + 1} \quad (\text{不可压缩}) \quad (3.19)$$

$$p_c = \frac{1}{\sqrt{a_1 \left(\frac{m'}{n'}\right)^2 + b_1 \left(\frac{m'}{n'}\right) + c_1}} XY \quad (\text{可压缩}) \quad (3.20)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} m' &= \frac{\sqrt{k_1+k_2}}{k_3\sqrt{k_1}+1} \left(\frac{c}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \frac{\sqrt{k_1-k_2}}{k_3\sqrt{k_1}-1} \left(\frac{b}{c}\right)^{\sqrt{k_1}} \\ n' &= \left(\frac{c}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{b}{c}\right)^{\sqrt{k_1}} \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

对于不可压缩材料, 在塑性区 $a \leq r \leq c$ 内的应力为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -p + M \ln \frac{r}{a} \\ \sigma_\theta &= -p + M \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

应力在 c 处连续的条件给出 p 与 c 的关系为

$$\frac{p}{M} = \ln \frac{c}{a} + \frac{1 - \left(\frac{c}{b}\right)^{2\sqrt{k_1}}}{\left(\frac{\sqrt{k_1+k_2}}{k_3\sqrt{k_1}+1} - 1 \right) \left(\frac{c}{b}\right)^{2\sqrt{k_1}} - \frac{\sqrt{k_1-k_2}}{k_3\sqrt{k_1}-1} + 1} \quad (3.23)$$

对于可压缩材料, 塑性区内的应力则可由公式(3.13)和下式确定

$$\frac{c}{r} = A(t)^\Phi \cdot \exp \left[\frac{e_1 f (b_1^2 + g^2) (t - t_0)}{e_1^2 (g + b_1)^2 + f^2 (g - b_1)^2} \right] \quad (3.24)$$

式中 Φ 由式(3.17)定义, $A(t) = \frac{e_1(g+b_1)\sin t - f(g-b_1)\cos t}{e_1(g+b_1)\sin t_0 - f(g-b_1)\cos t_0}$, t_0 由下三角方程决定:

$$-\frac{1}{\sqrt{a_1 \left(\frac{m'}{n'}\right)^2 + b_1 \left(\frac{m'}{n'}\right) + c_1}} = \frac{g}{e_1} \cos t_0 - \frac{b_1}{f} \sin t_0 \quad (3.25)$$

当 $a \leq r \leq c$ 时, $t_a \leq t \leq t_0$. 在上式中令 $r=a$, 则对应给定的 c 值, 可求得相应的 t_a 值, 沿内缘 $r=a$ 处的径向压力 p 即可由公式(3.13)求得^[5].

Ⅳ. 安定状态 根据安定理论^[3,4], 不难证明当变值载荷 $p \leq 2p_0$, 并当 $p < p_1$ 时, 承

受内压作用的厚壁筒就处于安定状态。因此, 变值载荷的安定载荷为

$$p^* = \min(p_e, p_r) \quad (3.26)$$

将 p_e 和 p_r 的表达式 (3.19) 或 (3.17) 和 (3.11) 代入上式, 得到

$$\frac{p^*}{Y} = \min \left[\frac{2M(1-k^2\sqrt{k_1})}{\left(\sqrt{k_1+k_2} - 1\right)k^{2\sqrt{k_1}} - \sqrt{k_1-k_2} + 1}, M \ln k \right] \quad (\text{不可压缩}) \quad (3.27)$$

式中 $k=a/b$, 为内、外径之比, 或

$$\frac{p^*}{Y} = \min \left[\frac{2XY}{\sqrt{a_1\left(\frac{m}{n}\right)^2 + b_1\left(\frac{m}{n}\right) + c_1}}, p_r \right] \quad (\text{可压缩}) \quad (3.28)$$

V. 位移分析 由基本方程(3.1)~(3.4), 可得厚壁筒在弹性状态下的位移解为

$$u = \frac{pa}{Q_{r0} \left[\left(\frac{b}{a}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{a}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} \right]} \left[\frac{(k_3\sqrt{k_1}-1)\left(\frac{r}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} + (k_3\sqrt{k_1}+1)\left(\frac{b}{r}\right)^{\sqrt{k_1}}}{k_3^2 k_1 - 1} \right] \quad (3.29)$$

圆筒在内、外缘处的位移分别为

$$u_a = \frac{pa}{Q_{r0}(k^{\sqrt{k_1}} - k^{-\sqrt{k_1}})} \cdot \frac{(k_3\sqrt{k_1}-1)k^{\sqrt{k_1}} + (k_3\sqrt{k_1}+1)k^{-\sqrt{k_1}}}{k_3^2 k_1 - 1} \quad (3.30)$$

$$u_b = \frac{pa}{Q_{r0}(k^{\sqrt{k_1}} - k^{-\sqrt{k_1}})} \cdot \frac{2k_3\sqrt{k_1}}{k_3^2 k_1 - 1} \quad (3.31)$$

$$\therefore \frac{u_a}{u_b} = \frac{1}{2k_3\sqrt{k_1}} [(k_3\sqrt{k_1}-1)k^{\sqrt{k_1}} + (k_3\sqrt{k_1}+1)k^{-\sqrt{k_1}}] \quad (3.32)$$

对于不可压缩材料, 利用径向位移在弹塑性交界线 Γ 处必须连续的条件, 可求得弹塑性状态下的位移解为

$$u = \frac{c \cdot p_c}{Q_{r0} \left[\left(\frac{b}{c}\right)^{\sqrt{k_1}} - \left(\frac{c}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} \right]} \cdot \frac{(k_3\sqrt{k_1}-1)\left(\frac{r}{b}\right)^{\sqrt{k_1}} + (k_3\sqrt{k_1}+1)\left(\frac{b}{r}\right)^{\sqrt{k_1}}}{k_3^2 k_1 - 1} \quad (c \leq r \leq b) \quad (3.33)$$

$$u = \frac{c^2 \cdot p_c}{r Q_{r0} \left[1 - \left(\frac{c}{b}\right)^{2\sqrt{k_1}} \right]} \cdot \frac{(k_3\sqrt{k_1}-1)\left(\frac{c}{b}\right)^{2\sqrt{k_1}} + k_3\sqrt{k_1}+1}{k_3^2 k_1 - 1} \quad (a \leq r \leq c) \quad (3.34)$$

至于极限状态下, 将出现无限制塑性流动, 位移 u 是不定的。

四、讨 论

以 B/H 复合材料, 纤维沿周向按排为例作了数值计算。所得结论可概述如下:

I. 我们假设材料是不可压缩的 圆筒随着载荷的增大由弹性状态至内缘开始屈服,

至弹-塑性状态及至最后进入极限状态的应力分布图, 分别绘于图2(a), (b), (c) 和 (d) 中 (选取 $k=0.7$)。此时 $M=3.9579Y$, $p_e=0.9533Y$, $p_p=1.4117Y$, 因此, 安定载荷 $p^* = \min(2p_e, p_p) = 1.4117Y$ 。

II. 由于纤维增强, 复合厚壁筒增加了强度 从表1我们看到, 当筒的内、外径之比 k 越大 (即筒壁越薄) 时, 弹性屈服压力 p_e 、极限压力 p_p 和安定载荷 p^* 相对未用纤维加强时提高得越多 (极限载荷提高了 243%) ; 且 k 值越小, 材料的可压缩性的影响越大, 当 $k < 0.5$ 时, 不可忽略。

表1

$k=a/b$	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
p_e/Y (纤维沿 θ 方向)	1.4205	1.3727	1.2862	1.1493	0.9533	0.6941	0.3735
p_e/σ_s (各向同性)	0.5254	0.4850	0.4330	0.3695	0.2944	0.2078	0.1097
p_e 相对提高值 (%)	170	183	197	211	224	234	240

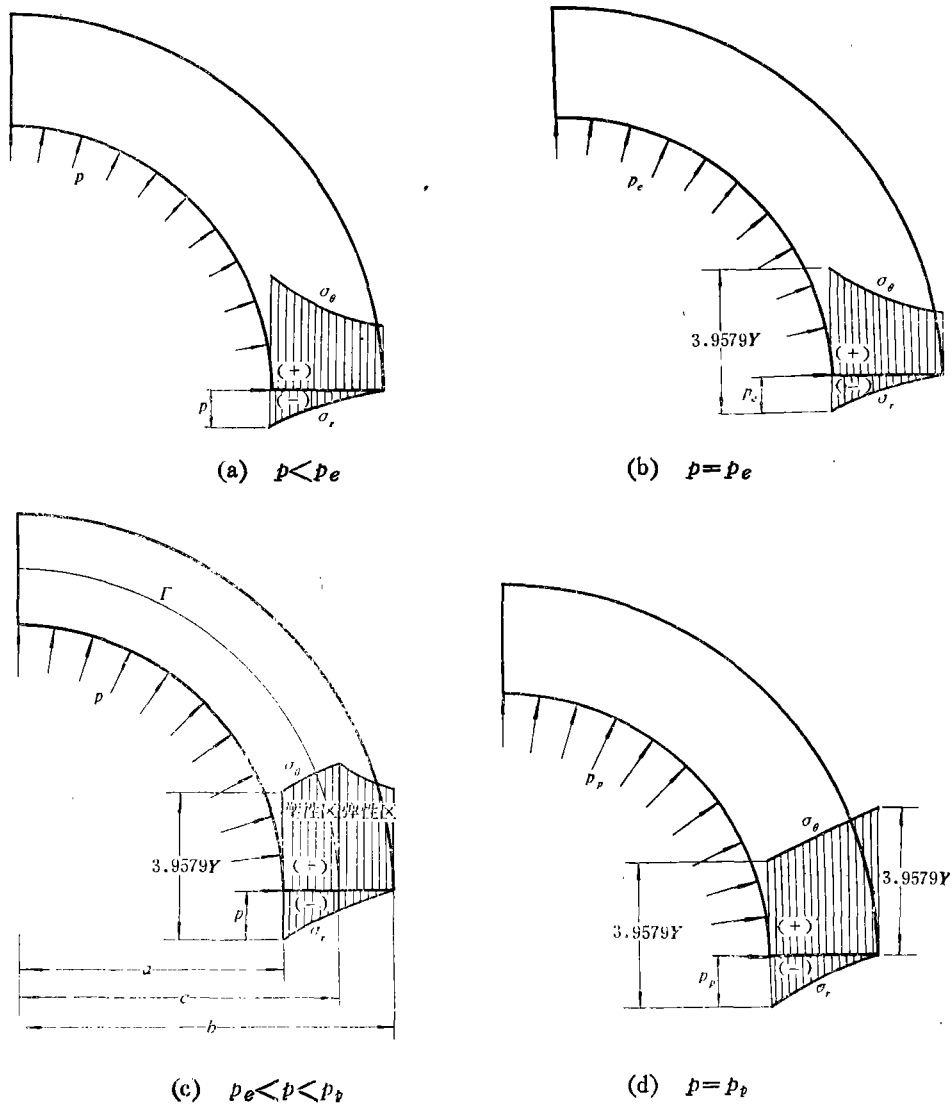


图 2

Ⅱ. 表2可以注意到变形后筒体的直径增大了, 而筒壁变薄了 当 $k < 0.79$ 时, 内、外缘处的相对位移较之各向同性增大了; 当 $k \geq 0.79$ 时, 内、外缘处的相对位移却减少了. 因此, 无论从强度提高还是从抵抗变形来考虑, 都是筒壁越薄, 用纤维增强的效果越好.

细观方面的研究表明, 若在靠近内缘 $r=a$ 处将纤维按排得更紧密一些, 增强的效果将更好.

表2

k		0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.79	0.8	0.9
u_a	纤维沿 θ 方向	4.6579	2.8852	2.0296	1.5627	1.2919	1.1451	1.1328	1.0432
u_b	各向同性	2.5750	1.9750	1.6250	1.4000	1.2464	1.1469	1.1375	1.0583

参 考 文 献

- [1] Lekhniskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, English version, Mir Publishers (1981).
- [2] Jones, R. M., *Mechanics of Composite Materials*, Scripta Book Co., Washington, D. C., McGraw-Hill, New York (1975).
- [3] Kachanov, L. M., *Foundations of the Theory of Plasticity*, North-Holland Publication Company-Amsterdam-London (1971).
- [4] 王仁、熊祝华、黄文彬, 《塑性力学基础》, 科学出版社, (1982).
- [5] 周次青, 具有圆形切口的圆柱正交异性复合薄板的弹塑性分析, (待出版).

Elastic-Plastic Analysis of Cylindrically Orthotropic Composite Thick-Walled Tube

Zhou Ci-qing Qiu Yi-yuan

(Department of Mathematics and Mechanics, South China Institute of Technology, Guangzhou)

Abstract

In the present paper, Tsai-Hill Yield Criterion in a state of plane strain is derived for incompressible and compressible materials respectively. The elastic-plastic stress and displacement fields of cylindrically orthotropic composite thick-walled tube under uniform radial pressure are studied. The formulas of the yield pressure, limit pressure and region of shakedown are obtained.