应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

对流热交换的一维非等温流动*

袁镒吾**

（中南矿冶学院，1983年6月13日收到）

摘　要

文献[1]研究了在有稳定换热过程的管道流动中，当粘性系数μ是温度的指数函数时，在甚么条件下发生一维非等温流动．对于平面渠道及圆管的流动，还研究了速度及温度场．

本文对同样问题补充提出了二种新的解法．文献[1]的方法可看成是本文方法的一个自然的分支．两个新解法中的一个只能求解文献[1]的同样问题，其计算过程的复杂程度也和文献[1]不相上下；但是另一个却能超出文献[1]的研究范围，即对管道的横截面的周界不是等曲率曲线的情形亦可求解．

一、问题的提法

许多管道中的流体动力学及热交换问题，由于计及粘性系数沿流程的变化引起横向速度分量而使问题大为复杂化．人们注意到这样的问题：寻求这样的一个类型的非等温流动，虽然粘性系数有纵向变化，但流动的一维性仍然保留．文献[1]详尽地研究了这个问题．并对平面渠道及圆管流动得到了液体的温度及速度的微分方程组．我们指出，可以用多种方法求解这个问题；并且可以越出文献[1]的限制条件：管道的横截面的周界曲线是等曲率曲线．

设液体质点的速度沿x轴，并有

$$v=v(y,\ z),\ t(x,\ y,\ z)=Ax+t_1(y,\ z) \tag{1.1}$$

式中v表示液体质点的速度，t表示温度，A为常数，且$A\neq0$．

设粘性系数μ随温度t的变化规律为

$$\mu/\mu_0=\exp[-\beta(t-t_0)] \tag{1.2}$$

这里，μ_0及β均为常数．

不计热散失时，运动及热传导方程为[1]

* 钱伟长推荐．

** 本文初稿曾于1981年8月在青岛824会议（物理气体动力学学术会议）上宣读．修改稿较初稿有较大的变动．

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial X}=\frac{\partial}{\partial Y}\left[\exp[-\alpha(X+\theta)]\frac{\partial U}{\partial Y}\right]+\frac{\partial}{\partial Z}\left[\exp[-\alpha(X+\theta)]\frac{\partial U}{\partial Z}\right]\\&\frac{\partial P}{\partial Y}=-\alpha\exp[-\alpha(X+\theta)]\frac{\partial U}{\partial Y},\quad\frac{\partial P}{\partial Z}=-\alpha\exp[-\alpha(X+\theta)]\frac{\partial U}{\partial Z}\\&\frac{\partial^2\theta}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial Z^2}=P_eU\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

式中 $X=x/l$，$Y=y/l$，$Z=z/l$，$U=v/u_0$，$\theta=t_1/(Al)$，$P=pl/(\mu_0u_0)$，$p_e=u_0l/a$，$\alpha=\beta Al$。其中 p——压力，a——导温系数，u_0——按流量的平均速度，l——横截面的特征尺寸。

由式(1.3)的头三个方程可以消去速度，而得压力的方程：

$$\frac{\partial^2P}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2P}{\partial Z^2}=-\alpha\frac{\partial P}{\partial X}\tag{1.4}$$

设

$$F=F(Y,Z),\ P=\exp[-\alpha X]f_1(F)\tag{1.5}$$

式中 $f_1(F)$表示 F 的任意函数，则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial P}{\partial Y}=f_1'(F)\frac{\partial F}{\partial Y}\exp[-\alpha X]\\&\frac{\partial^2P}{\partial Y^2}=\exp[-\alpha X]\left[f_1''(F)\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2+f_1'(F)\frac{\partial^2F}{\partial Y^2}\right]\end{aligned}\right\}\tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2P}{\partial Z^2}=\exp[-\alpha X]\left[f_1''(F)\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2+f_1'(F)\frac{\partial^2F}{\partial Z^2}\right]\tag{1.7}$$

$$\partial P/\partial X=-f_1(F)\alpha\exp[-\alpha X]\tag{1.8}$$

将式(1.6)～(1.8)代入式(1.4)得

$$f_1''(F)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\right]+f_1'(F)\left(\frac{\partial^2F}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial Z^2}\right)=\alpha^2f_1(F)\tag{1.9}$$

由式(1.9)知，当

$$\frac{\partial^2F}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial Z^2}=0\ \text{或}\ \frac{\partial^2F}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial Z^2}=\xi(F)\tag{1.10}$$

时，必有

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2=\xi_1(F)\tag{1.11}$$

其中 $\xi(F)$ 及 $\xi_1(F)$ 均表示 F 的任意函数。

现求边界条件。由式(1.5)有

$$\frac{\partial P}{\partial Y}=f'(F)\exp[-\alpha X]\frac{\partial F}{\partial Y},\quad\frac{\partial P}{\partial Z}=f_1'(F)\exp[-\alpha X]\frac{\partial F}{\partial Z}$$

由式(1.3)的第二、三式及式(1.5)可得

$$\frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial\theta}{\partial Z}-\frac{\partial U}{\partial Z}\frac{\partial\theta}{\partial Y}=0,\quad\frac{\partial U}{\partial Y}\frac{\partial F}{\partial Z}-\frac{\partial U}{\partial Z}\frac{\partial F}{\partial Y}=0\tag{1.12}$$

因为在固壁上恒有$U=0$，故由式(1.12)知，沿管道的横截面的周界及等温线，$F(Y,Z)$为常数。即是说，要使满足式(1.1)的非等温流动出现，在液流的等温线及管道的横截面的周界上，液体的速度及压力应当为常数，即

$$F|_c = F_1 = 常数 \tag{1.13}$$

于是，对于压力 P，我们有方程(1.5)，(1.9)及(1.13)。我们分两种情况来解这问题：(1)设$f_1(F)$为某已知函数；(2)设$f_1(F)$为待求的未知函数。

二、当函数$f_1(F)$为F的某已知函数时

Ⅰ. 设 $f_1(F)=F$

由式(1.5)，(1.9)，(1.11)及(1.13)得到问题的数学提法为

$$\left.\begin{aligned} &P=\exp[-\alpha X]F, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}=\alpha^2 F \\ &\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2=\xi(F), \quad F|_c=F_1=常数 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

这个问题已经被文献[1]很好地解决了。文献[1]指出：符合像式(2.1)那样地数学提法的实际问题，其横截面的轮廓曲线一定是等曲率曲线。平面渠道，圆管及共轴圆管间的流动均是属于这种情况。文献[1]得到了平面渠道及圆管流动的准确解。

Ⅱ. 设

$$f_1(F)=e^F, \quad F=F(y, z) \tag{2.2}$$

$$P=e^{-\alpha X}\cdot e^F=\exp[F-\alpha X] \tag{2.3}$$

式(1.9)则简化成为

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2+\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}=\alpha^2 \tag{2.4}$$

以下分二种情况来研究

(1) **平面渠道**

对于平面渠道，变量Z消失，式(2.1)及(2.3)变为

$$\left.\begin{aligned} &f_1(F)=e^F \\ &F=F(Y) \\ &P=\exp[F-\alpha X] \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

式(2.4)变为

$$\frac{d^2F}{dY^2}+\left(\frac{dF}{dY}\right)^2=\alpha^2 \tag{2.6}$$

积分一次得

$$\frac{dF}{dY}=\alpha[g_1\exp[2\alpha Y]-1]/(1+g_1\exp[2\alpha Y])$$

式中 g_1 为积分常数，再积分得

$$F=\ln(1+g_1y_1)-\frac{1}{2}\ln y_1+\ln g_2, \qquad y=\exp[2\alpha Y] \tag{2.7}$$

式中 g_2 为积分常数，于是得

$$e^F=g_2(1+g_1\exp[2\alpha Y])/\sqrt{\exp[2\alpha Y]}=g_2(\exp[-\alpha Y]+g_1\exp[\alpha Y]) \tag{2.8}$$

令

$$(C+B)/2=g_2, \quad (C-B)/2=g_2g_1$$

则得

$$e^{F}=\frac{1}{2}(C+B)\exp[\alpha Y]+\frac{1}{2}(C-B)\exp[-\alpha Y]$$

$$=\frac{1}{2}C(\exp[\alpha Y]+\exp[-\alpha Y])+\frac{1}{2}B(\exp[\alpha Y]-\exp[-\alpha Y])$$

$$=C\operatorname{ch}\alpha Y+B\operatorname{sh}\alpha Y$$

故得

$$P=\exp[-\alpha X]\cdot e^{F}=\exp[-\alpha X](C\operatorname{ch}\alpha Y+B\operatorname{sh}\alpha Y) \tag{2.9}$$

将式(2.9)代入式(1.3)得决定 U 及 θ 的微分方程组为:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dU}{dY}=-(B\operatorname{ch}\alpha Y+C\operatorname{sh}\alpha Y)\exp[\alpha\theta]\\&\frac{d^2\theta}{dY^2}=P_eU\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

(2) 圆管

对于圆管,式(2.4)变为

$$\frac{d^2F}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dF}{dR}+\left(\frac{dF}{dR}\right)^2=\alpha^2 \tag{2.11}$$

令 $dF/dR=z_1$,则式(2.11)变为

$$\frac{dz_1}{dR}+\frac{1}{R}z_1+z_1^2=\alpha^2 \tag{2.12}$$

此为黎卡迪方程,再做变换

$$z_1=z_2'/z_2 \tag{2.13}$$

则式(2.12)变为

$$z_2''+R^{-1}z_2'-\alpha^2z_2=0 \tag{2.14}$$

如果令 $R_1=iR$,则上式变为

$$\frac{d^2z_2}{dR_1^2}+R_1^{-1}\frac{dz_2}{dR_1}+\alpha^2z_2=0$$

此为零阶贝塞尔方程,其解为[3]

$$z_2=B_1J_0(\alpha R_1)+B_2Y_0(\alpha R_1)$$

式中 J_0 及Y_0分别表示零阶第一类及第二类贝塞尔函数.由于

$$J_0'=-J_1,\ Y_0'=-Y_1$$

故得

$$z_1=\frac{dz_2/dR}{z_2}=-i\alpha\frac{B_1J_1(\alpha R_1)+B_2Y_1(\alpha R)}{B_1J_0(\alpha R_1)+B_2Y_0(\alpha R)}$$

故

$$\left.\begin{aligned}F&=\int z_1dR=B_3+\ln[B_1J_0(\alpha R_1)+B_2Y_0(\alpha R_1)]\\P&=\exp[F-\alpha X]=\exp[-\alpha X][BI_0(\alpha R)+CK_0(\alpha R)]\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

式中 B_3 为积分常数,$B=\exp[B_3]\cdot B_1$,$C=\exp[B_3]\cdot B_2$ 代表任意常数,I_0及K_0表示虚宗量的零阶第一类及第二类贝塞尔函数.将式(2.15)代入式(1.3),得决定U及θ的微分方程组:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dU}{dR}=(BI_1(aR)+CK_1(aR))\exp[a\theta]\\&\frac{d^2\theta}{dR^2}+\frac{1}{R}\ \frac{d\theta}{dR}=P_eU \qquad (R=\sqrt{X^2+Y^2})\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

式(2.15)及(2.16)和文献[1]的结果完全一致.

Ⅱ. 设

$$\left.\begin{aligned}&f_1(F)=e^F,\\&F=\varphi(Y)+\psi(Z)\\&F|_c=F_1=\text{常数}\end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

则

$$P=\exp[F-\alpha X]=\exp[-\alpha X+\varphi(Y)+\psi(Z)] \tag{2.18}$$

式 (2.4) 成为

$$\frac{d^2\varphi}{dY^2}+\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2+\frac{d^2\psi}{dZ^2}+\left(\frac{d\psi}{dZ}\right)^2=\alpha^2 \tag{2.19}$$

而有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d^2\varphi}{dY^2}+\left(\frac{d\varphi}{dY}\right)^2=a^2\\&\frac{d^2\psi}{dZ^2}+\left(\frac{d\psi}{dZ}\right)^2=\alpha^2-a^2=\alpha_1^2\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

式中 a 为本征值，它由具体的边值问题决定。(详见附录) 式(2.20)和式(2.6)相似，仿照后者的积分方法，将前者积分二次，代入式(2.18)可得

$$P=\exp[-\alpha X](C\operatorname{ch}aY+B\operatorname{sh}aY)\cdot(q\operatorname{ch}\alpha_1 z+w\operatorname{sh}\alpha_1 z) \tag{2.21}$$

式中 C, B, q 及 w 为积分常数，它们由边界条件决定。将式(2.21)代入式(1.3)可得决定U及 θ 的微分方程组。

式(2.21)亦适用于管道的横截面的周界线不是等曲率曲线的情形，即是说，它突破了文献[1]的限制条件——横截面的周界曲线必须是等曲率曲线。

三、当$f_1(F)$为待决定的未知函数时

由于式 (1.9) 中 $f_1(F)$被视为未知函数，我们试探令

$$\left.\begin{aligned}&\partial^2F/\partial Y^2+\partial^2F/\partial Z^2=0\\&f_1''(F)\left[\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\right]=\alpha^2f_1(F)\end{aligned}\right\}$$

结合式(1.5)及(1.13)可把求压力 P 的数学提法归结为：设

$$P=f_1(F)\exp[-\alpha X], \qquad F=F(Y,Z) \tag{1.5}$$

求解

$$\frac{\partial^2F}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2F}{\partial Z^2}=0 \tag{3.1}$$

边界条件

$$f_1(F)|_c=A_1=\text{常数} \tag{3.2}$$

即

$$F|_c=F_1=\text{常数} \tag{3.3}$$

附加条件

$$\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2=\alpha^2\frac{f_1(F)}{f_1''(F)}=\xi_1(F) \tag{3.4}$$

不难理解，满足式(3.3)时，式(3.1)的解只是在少数几种情况下才同时也满足式(3.4)。因此，必须寻找横截面的周界的各种可能的形状，使得式(3.1)及(3.3)的边值问题的解也满足式(3.4)。因

$$\frac{d\xi_1}{dF}=\frac{\partial\xi_1}{\partial Y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial F}+\frac{\partial\xi_1}{\partial Z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial F}$$

故由式(3.4)及(3.1)不难求得

$$\left[\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\right]^{-3/2}\left[2\frac{\partial F}{\partial Y}\cdot\frac{\partial F}{\partial Z}\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial Y\partial Z}-\left(\frac{\partial F}{\partial Y}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial Z^2}-\left(\frac{\partial F}{\partial Z}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial Y^2}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\xi_1}}\frac{d\xi_1}{dF}=K(F) \tag{3.5}$$

式(3.5)的左边是平面曲线 $F(Y,\ Z)=$常数的曲率。式(3.5)表明：当$F=$常数时，这曲线为等曲率曲线。由式(3.3)知，横截面的边界线也是$F(Y,\ Z)=F_1$，故横截面的周界线是具常曲率$K(F_1)$的曲线。平面渠道，圆管及共轴圆柱面间的轴向流动均是属于这种情形。

所以，对于上述三种情况言，可能存在满足式(3.1)，(3.2)及(3.4)的解。以下，我们就分别研究液体在平面渠道及圆管中流动的情形。

I. 平面渠道

对于平面渠道，变量Z消失，式(3.1)变为

$$d^2F/dY^2=0$$

故得

$$F=C_1Y+C_2 \tag{3.6}$$

式中C_1及C_2为积分常数。代入式(3.4)得

$$C_1^2=\alpha^2 f_1(F)/f_1''(F)$$

即

$$f_1''-\frac{\alpha^2}{C_1^2}f_1=0$$

其解为

$$f_1=C_3\exp[\alpha F/C_1]+C_4\exp[-\alpha F/C_1]$$

式中C_3及C_4为积分常数。将式(3.6)代入得

$$f_1=C_5\exp[\alpha Y]+C_6\exp[-\alpha Y] \tag{3.7}$$

式中

$$C_5=C_3\exp[\alpha C_2/C_1],\quad C_6=C_4\exp[-\alpha C_2/C_1]$$

式(3.7)和式(2.8)相同，用推算式(2.9)的同样方法，改变式(3.7)中的常数可得

$$f_1=C\,\mathrm{ch}\,\alpha Y+B\,\mathrm{sh}\,\alpha Y \tag{3.8}$$

代入式(1.5)得

$$P=\exp[-\alpha X](C\operatorname{ch}\alpha Y+B\operatorname{sh}\alpha Y) \tag{3.9}$$

它和文献[1]的结果完全一致。

Ⅱ. 圆管中的流动

对于圆管的情形，式(3.1)及(3.3)变为

$$\frac{d^2F}{dR^2}+\frac{1}{R}\frac{dF}{dR}=0 \tag{3.10}$$

$$F|_0=F_1=\text{常数} \tag{3.11}$$

式(3.10)的解为

$$F=\ln(E_1R^{E_2})=\ln E_1+E_2\ln R \tag{3.12}$$

式中 E_1 及 E_2 为积分常数，故得

$$\left(\frac{dF}{dR}\right)^2=E\exp[hF]$$

式中

$$\left.\begin{aligned}E&=E_2^2E_1^{2/E_2}\\ h&=-2/E_2\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

于是，式(3.4)变为

$$Ee^{hF}=\alpha^2\frac{f_1(F)}{f_1''(F)} \tag{3.14}$$

令 $F_1=hF+h_1$ 及 $Eh^{-h_1}=\alpha^2/h^2$，则式(3.14)变为

$$\exp[F_1]=\frac{f_2(F_1)}{f_2''(F)} \tag{3.15}$$

式中

$$f_2(F_1)=f_2(hF+h_1)=f_1(F) \tag{3.16}$$

按照文献[2]，式(3.15)的解为

$$\begin{aligned}f_2(F_1)=&\beta_1(1+F_1^2/2+F_1^3/6+F_1^4/12+F_1^5/24+13F_1^6/720+\cdots)\\ &+\beta_2(F_1+F_1^3/6+F_1^4/12+F_1^5/30+F_1^6/72+29F^7/5040+\cdots)\end{aligned} \tag{3.17}$$

将式(3.12)及(3.16)代入上式，于是求得

$$f_2(F_1)=f_1(F)=f_3(R)$$

再代入式(1.5)，最后求得

$$P=\exp[-\alpha X]f_3(R) \tag{3.18}$$

式(3.14)可用另法求解如下：

将式(3.14)变为

$$f_1''(F)-\frac{\alpha^2}{E}\exp[-hF]f_1(F)=0 \tag{3.19}$$

令[3]

$$f_1(F)=\eta(\zeta),\quad \zeta=\exp[-hF] \tag{3.20}$$

则式(3.19)变为

$$\zeta^2\eta''+\zeta\eta'-[\alpha^2/(h^2E)]\zeta\eta=0 \tag{3.21}$$

它和式(2·14)相似，不难求得 $\eta(\zeta)$，然后由式(3.20)，(3.12)，(3.13)及(1.5)经过不太繁的运算，可得

$$P=\exp[-\alpha X](BI_0(\alpha R)+CK_0(\alpha R)) \tag{3.22}$$

它和文献[1]的结果完全一致．

附录　式(2.20)中本征值α的确定

设管道的横截面的周界曲线为椭圆

$$Y^2/a_1^2+Z^2/b_1^2=1 \tag{A.1}$$

则有

$$Y=0\text{ 时，}Z=\pm b_1 \tag{A.2}$$

$$Z=0\text{ 时，}Y=\pm a_1 \tag{A.3}$$

设椭圆(A.1)上液体质点的压力P为已知，即式(2.21)中有

$$[(C\operatorname{ch}aY+B\operatorname{sh}aY)\cdot(q\operatorname{ch}\alpha_1 Z+w\operatorname{sh}\alpha_1 Z)]|_c=P_1=\text{const} \tag{A.4}$$

将式(A.2)及(A.3)代入得

$$C(q\operatorname{ch}\alpha_1 b_1+w\operatorname{sh}\alpha_1 b_1)=P_1 \tag{A.5}$$

$$C(q\operatorname{ch}\alpha_1 b_1-w\operatorname{sh}\alpha_1 b_1)=P_1 \tag{A.6}$$

$$q(C\operatorname{ch}aa_1+B\operatorname{sh}aa_1)=P_1 \tag{A.7}$$

$$q(C\operatorname{ch}aa_1-B\operatorname{sh}aa_1)=P_1 \tag{A.8}$$

于是得

$$Cq\cdot\operatorname{ch}\alpha_1 b_1=P_1 \tag{A.9}$$

$$wC\cdot\operatorname{sh}\alpha_1 b_1=0 \tag{A.10}$$

$$Cq\cdot\operatorname{ch}aa_1=P_1 \tag{A.11}$$

$$Bq\cdot\operatorname{sh}aa_1=0 \tag{A.12}$$

由式(A.10)得

$$w=0\text{ 或 }\alpha_1=0\qquad(\because\ C\neq0\text{ 及 }b_1\neq0) \tag{A.13}$$

如果$\alpha_1=0$，则由式(2.20)得

$$a=\alpha \tag{A.14}$$

将$\alpha_1=0$代入式(A.9)得

$$Cq=P_1 \tag{A.15}$$

将$a=\alpha$代入式(A.11)得

$$Cq\neq P_1\qquad(\text{因 }a=\alpha\neq0\text{ 及 }a_1\neq0) \tag{A.16}$$

故式(A.15)及(A.16)互相矛盾，故$\alpha_1\neq0$．由式(A.13)得

$$w=0 \tag{A.17}$$

同理，由式(A.12)可得

$$B=0 \tag{A.18}$$

将式(A.17)及(A.18)代入式(A.5)～(A.8)得

$$Cq\cdot\operatorname{ch}\alpha_1 b_1=P_1 \tag{A.19}$$

$$Cq\cdot\operatorname{ch}aa_1=P_1 \tag{A.20}$$

由式(A.19)及(A.20)得

$$\alpha_1 b_1=aa_1$$

将式(2.20)代入得

$$(\alpha^2-a^2)b_1^2=a^2a_1^2$$

故

$$a=\pm\frac{b_1\alpha\sqrt{a_1^2+b_1^2}}{a_1^2+b_1^2} \tag{A.21}$$

于是，我们求得了式(2.20)中的本征值a．

参 考 文 献

[1] Найденов В. И., Об автомодельности одной задаци конвективного теплообмена, *Ж. ПМТФ*, 5 (1974)

[2] M. Л 克拉斯诺夫, Л. И. 基谢列夫, Г. И. 马卡林科著, 李明曙, 杨守昌编译, 《常微分方程解题指南》, 130.

[3] E. 卡姆克著, 张鸿林译, 《常微分方程手册》, 科学出版社, (1977).

One-Dimensional Nonuniform Temperature Flow with Heat Transfer by Convection

Yuan Yi-wu

(Central-South Institute of Mining and Metallurgy, Changsha)

Abstract

In this paper, the author presents a general method for computing velocity and temperature of liquid flow in pipes when the liquid viscosity is an exponential function of temperature and the field of temperature is not uniform in the pipe with heat transfer by convection.