应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

整数线性规划的一种新方法
——分枝方向搜索法*

夏 德 麟

（华中工学院，1983年10月25日收到）

摘　要

本文试图提出一种新的和简单的整数线性规划最优算法，这种方法具有较强的适用性和快速收敛等令人满意的特点。该算法成功地处理了工程设计中所提出的某些问题，文末给出了计算实例。

一、引　言

在很多工程技术问题中，ILP 问题是经常会遇到的。关于这类问题的求解方法，目前比较流行的有 Gomory 的切平面法和 Land 等人的分枝边界算法。这些方法的基本思想是将原问题转化为一系列子问题，并逐次用单纯形法求解它们。显然，对于高维问题而论，随着子问题的增加，其附加约束也随之增多，以致问题的规模变得越来越大。因此，上述算法的计算量通常是比较大的。

本文所提出的分枝方向搜索法是一种对原问题进行直接搜索的方法。它的基本思想是首先将原 ILP 问题作为一个 LP 问题（在忽略整数性条件时）进行求解；然后根据所求得的最优解信息，形成整数化的初始可行点和整数化的分枝搜索方向（下降或上升方向），然后沿着整数化可行方向，以整数步长进行分枝搜索，通过有限步迭代，即可求得问题的最优解。由于这种搜索方法只是在一个较小的“带域”（该带域的点集具有较小的函数位，且靠近函数值较小的边界）内进行，因此收敛速度是相当快的，由于无需形成一系列子问题和补充附加约束，故所需要的存贮量也较少。文中所给出的计算实例证明了这种方法具有明显的优越性。

二、基 本 原 理

众所周知，整数线性规划问题的一般形式可表示为：

* 李灏推荐。

$$\left.\begin{aligned} &\min f(x)=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ &\text{s. t}_0\text{:}\ g_i(x)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+b_i\geqslant 0 \\ &\qquad (x_j\geqslant 0\ \text{整数},\ j=1,\cdots,n;\ i=1,\cdots,m) \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

或表示为：

$$\left.\begin{aligned} &\min f(x)=C^T X \\ &\text{s. t}_0\text{:}\ S_0=\{X\,|\,AX+B\geqslant 0,\ X\geqslant 0\ \text{整数}\} \end{aligned}\right\} \tag{2.1$'$}$$

式中 $C=[c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_n]^T$，$X=[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]^T$，$B=[b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_m]^T$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

通常，直接搜索法的迭代格式可表示为：

$$X_k=X_{k-1}+\lambda_{k-1}D_{k-1} \qquad (k=1,2,\cdots) \tag{2.2}$$

式中 X_0，λ_0 与 D_0（当 $k=1$ 时）分别为初始点，初始步长和初始搜索方向；它们都是通过一定的方法来确定的。显然，当 λ_k 和 D_k 的计算公式确定以后，就不难应用（2.2）式来求得问题的最优解。本文所提出的方法不是采用上述迭代格式，而是采用类似上述迭代格式，在每个可行分枝搜索方向上寻求若干个改进的点；然后，取其中具有最小函数值的点作为下一次迭代的起始点，并沿着上述分枝搜索方向继续迭代，直至在每一个分枝搜索方向上寻求另一个改进点为止。这种迭代过程可用下述迭代关系式表示：

$$\left.\begin{aligned} &\langle X_j^{(k)}\rangle=\langle X_0^{(k)}\rangle+\langle\lambda_j^{(k)}\rangle\langle D_j\rangle^T \quad (k=1,\ 2,\ \cdots) \\ &\langle X_0^{(k+1)}\rangle=\langle X_j^{(k)}\rangle \qquad (X_0^{(k)},\ \ X_j^{(k)}\in S_0;\,j\leqslant n) \end{aligned}\right\} \tag{2.3}$$

式中 k 和 j 分别代表迭代次数和分枝方向序号。而$\langle X_0^{(k)}\rangle$，$\langle\lambda_j^{(k)}\rangle$和$\langle D_j\rangle$分别表示第 k 次迭代时的整数起始点，第 j 个分枝方向的整数型步长和第 j 个分枝的整数型搜索方向。从上述分析可知，用分枝方向搜索法求解ILP问题，最后归结为确定整数型初始点，整数型搜索方向和整数型步长。为此，下面我们将分别讨论它们的确定方法。

2.1 整数型初始点的确定

假定对应于 ILP 问题（2.1）的 LP 问题的最优解为 X^*_{LP}和$f(X^*_{\mathrm{LP}})$，而问题（2.1）的最优解为X^*_{ILP}与$f(X^*_{\mathrm{ILP}})$。显然，对于极小化问题，它们应满足下述不等式：

$$f(X^*_{\mathrm{ILP}})\geqslant f(X^*_{\mathrm{LP}})$$

而对于极大化问题，则有：

$$f(X^*_{\mathrm{ILP}})\leqslant f(X^*_{\mathrm{LP}})$$

上述不等式中的等号仅当$X^*_{\mathrm{ILP}}=X^*_{\mathrm{LP}}$时成立。

由于 LP 问题的最优点是位于共可行域的顶点，亦即是位于具有最小函数值的边界上。故对应的 ILP 问题的最优点应当是位于靠近上述边界的“带域”内。故它们的整型可行初点（对于极小化问题），可以取为：

$$\begin{aligned}&\langle X_0^{(1)}\rangle=\langle X_{LP}^*\rangle,\ c_j<0\\&\langle X_0^{(1)}\rangle=\langle X_{LP}^*\rangle+1,\ c_j\geqslant 0\end{aligned}\quad (j=1,2,\cdots,n;\ \langle X_0^{(1)}\rangle\in S_0)\tag{2.4}$$

式中$\langle X_{LP}^*\rangle$表示一整型列向量，它的各个分量是分别小于或等于X_{LP}^*所对应各分量的最大整数。于是对于 ILP 的极小化问题有下述不等式：

$$f(X_{LP}^*)\leqslant f(X_{ILP}^*)\leqslant f(X_0^{(1)})\tag{2.5}$$

而对于极大化问题则有：

$$f(X_{LP}^*)\geqslant f(X_{ILP}^*)\geqslant f(X_0^{(1)})\tag{2.6}$$

2.2 整数型分枝搜索方向的确定

根据上述方法确定了整数型可行初始点后，为了寻求一个改进的可行解。显然还需要确定整数型搜索方向和整数型步长。当这两者确定后，就不难用 (2.3)式找到一个改进的可行解。由于 ILP 问题的可行点集皆位于可行域内的网格点上。因此，这些搜索方向应是坐标轴和网格对角线的方向（这些方向的分量是一具有符号的二进制量）；然而通过某一网格点的这种方向有很多（它随着问题的维数的增加而成倍增长），很明显采用穷举法来选取其中的最佳搜索方向是相当费力的，故我们不采用这一方法。

由于在寻求整数初始点时，我们已经求得对应的 LP 问题的最优点 X_{LP}^*，而该点是N个超平面 $g_r(X)$的交点，亦即有N个方程：

$$g_r(X_{LP}^*)=0\quad (r\in\{m+n\})\tag{2.7}$$

换言之，从该点出发沿着通过该点的棱边就表示N个方向（它们是目标函数的上升或下降方向），它们可由下式求得：

$$D=\Big[\nabla g_k\,|_{g_k(X_{LP}^*)=0}\Big]^{-1}=\begin{bmatrix}D_1\\\vdots\\D_n\end{bmatrix}\quad (k=1,2,\cdots,m+n)\tag{2.8}$$

式中 ∇g_k 为超平面 $g_k(X)$的梯度向量，而D_j $(j=1,\cdots,n)$ 为$g_k(X)$的切线行向量。虽然沿着这些方向搜索有可能找到较好的解，但是这种解通常不是 ILP 问题的可行整数解，这是因为D_j 的各分量一般不是整数所致。为此，我们需要对它们进行整数化，并用$[D_j]=[d_{j1},\cdots,d_{jn}]$来表示它们，而其分量$\langle d_{jl}\rangle$分别取为：

$$\langle d_{jl}\rangle=\begin{cases}1 & d_{jl}>0\\-1 & d_{jl}<0\quad (l=1,\cdots,n)\\0 & d_{jl}=0\end{cases}\tag{2.9}$$

在这N个整数化的搜索方向$\langle D_j\rangle$中，对于极小化问题取：

$$\langle D_{j0}\rangle=\langle D_j\rangle|_{\min\{\langle D_j\rangle\nabla f<0\}}\quad (j=1,\cdots,n)\tag{2.10}$$

作为可行分枝主方向。而对于极大化问题则取为：

$$\langle D_{j_0}\rangle=\langle D_j\rangle|_{\max\{\langle D_j\rangle\nabla f\geqslant 0\}}\quad (j=1,\cdots,n) \tag{2.11}$$

对于可行分枝搜索主方向$\langle D_{j_0}\rangle$可以将共分解为N个子方向，其形式记为：

$$\langle D_{j_1}\rangle=[\langle d_{j_1}\rangle,\ 0,\ \cdots,\ 0]$$
$$\langle D_{j_2}\rangle=[0,\ \langle d_{j_2}\rangle,\ 0,\ \cdots,\ 0]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\langle D_{j_n}\rangle=[0,\ \cdots,\ 0,\ \langle d_{j_n}\rangle]$$

在这些子方向中，我们只取满足下述条件的

$$\langle D_{j_p}\rangle=\langle D_{jl}\rangle|_{\mp\langle D_{jl}\rangle\nabla f\geqslant 0}\quad (p\leqslant l) \tag{2.12}$$

作为可行分枝搜索子方向。式中的负号和正号分别对应极小化和极大化问题。当采用这种方法时，首先是从起始点$\langle X_0{}^{(1)}\rangle$出发，分别沿着可行分枝搜索方向$\langle D_{j_0}\rangle$和$\langle D_{j_p}\rangle$进行搜索寻求一个较好的改进点，随后又以改进点为起点沿着上述方向继续迭代，直到求得最优解。由于在整个迭代过程中，不需要重新计算搜索方向，并且它们的总数是小于或等于N的，故能节省计算量。

2.3 整数型步长的确定

当整数可行初始点和可行分枝搜索方向确定后，为了保证求得一个较好的可行解，搜索步长亦应取整数，本法采用下述公式计算：

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_l^{(k)}=-\frac{g_l(X_0{}^{(k)})}{\langle D_j\rangle\nabla g_l}\quad (l=1,\cdots,m+n)\\&\langle\lambda_j^{(k)}\rangle=\min\{\langle\lambda_l^{(k)}\rangle,\ \lambda_l^{(k)}>0\}\end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

式中下标j表示分枝方向的序号，而$\langle D_j\rangle$代表可行分枝搜索方向$\langle D_{j_0}\rangle$和$\langle D_{j_p}\rangle$，而$\langle\lambda_l{}^{(k)}\rangle$表示取小于或等于$\lambda_l{}^{(k)}$的最大整数。

三、算 法 步 骤

根据上述分析，分枝方向搜索法的计算可归结为如下步骤：

（1） 首先将原ILP问题(2.1)忽略整数条件后，作为一个LP问题求解而得到X^*_{LP}，$f(X^*_{\mathrm{LP}})$，如果它们整数，则即为原问题的最优解；如果其分量不为整数，则转步骤(2)；

（2） 根据表达式（2.4），确定可行整数初始点为：

$$X_0^{(1)}=\langle X^*_{\mathrm{LP}}\rangle,\ c_j<0$$

或

$$X_0^{(1)}=\langle X^*_{\mathrm{LP}}\rangle+1,\ c_j\geqslant 0$$

（3） 为了求得可行分枝搜索方向，我们需要首先用（2.8）式计算$\langle D_j\rangle$；然后采用（2.10）或（2.11）与（2.14）式确定$\langle D_{j_0}\rangle$，$\langle D_{jl}\rangle$

（4） 当初始点$\langle X_0{}^{(1)}\rangle$和搜索方向$\langle D_{j_0}\rangle$，$\langle D_{j_p}\rangle$确定后，我们就沿着各个不同的分枝方向（从初始点出发)进行迭代计算，直至再不能找到一个整数步长为止。最后在点集$\langle X_j{}^{(k)}\rangle$中，我们取具有最小函数值点为$X^*_{\mathrm{ILP}}$，$f(X^*_{\mathrm{ILP}})$作为问题的最优解。

现将分枝方向搜索法计算流程在图1中给出。

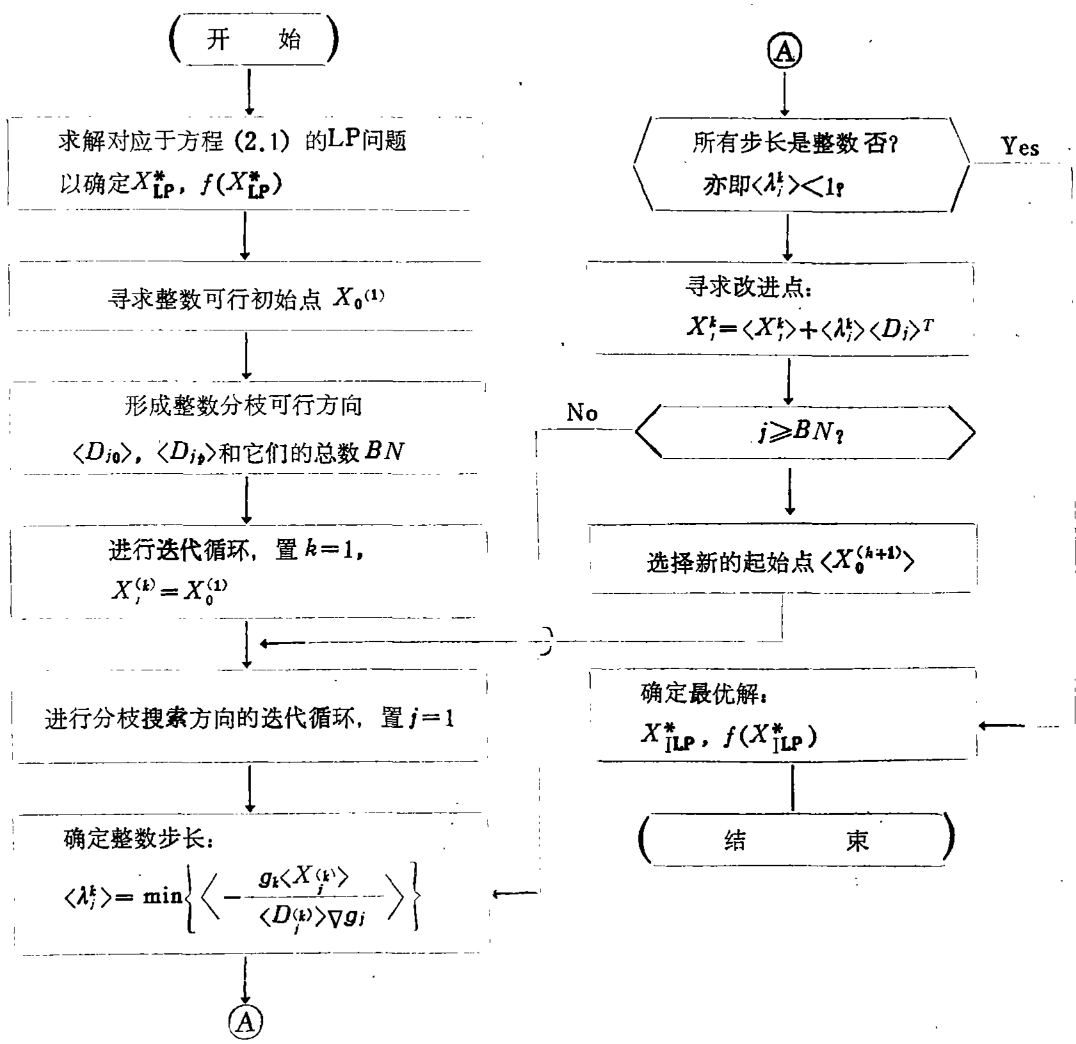

图 1 分枝方向搜索法框图

四、计 算 实 例

例1 $\min f(x)=-3x_1-4x_2$

$$\text{s. t.:}\quad g_1(x)=-4.1x_1-5.9x_2+53.1\geqslant 0$$

$$g_2(x)=-4.9x_1+0.9x_2+24.5\geqslant 0$$

$$g_3(x)=2x_1-3x_2+18\geqslant 0$$

$$g_4(x)=x_1+2x_2-6\geqslant 0$$

$$g_j(x)=x_j\geqslant 0,\ \text{整数},\ (j=5,6)$$

求解：

首先，我们求解对应于例 1 的 LP 问题得到：

$X^*_{LP}[5.9,\ 4.9]^T$和$f(X^*_{LP})=-37.3$

（2） 因为$c_j<0$，于是取

$$\langle X_0^{(1)}\rangle=\langle X^*_{LP}\rangle=[5,4]^T,\ 和\ f(X_0^{(1)})=-31$$

（3） 确定分枝搜索方向：

因为 $g_1(X^*_{LP})=g_2(X^*_{LP})=0$，于是有：

$$D=\begin{bmatrix}-4.1 & -4.9\\ -5.9 & 0.9\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{326}\begin{bmatrix}-9 & -49\\ -59 & 47\end{bmatrix}$$

∴ $\langle D_1\rangle=[-1,\ -1]$，$\langle D_2\rangle=[-1,\ +1]$

根据（2.10）～（2.12）式，我们可以得到可行分枝搜索方向为：

$$\langle D_{20}\rangle=D_j|_{\min\{\langle D_j\rangle\nabla f<0\}}=\langle D_2\rangle=[-1,\ 1]$$

$$\langle D_{22}\rangle=\langle D_{ji}\rangle|_{-\langle D_{ji}\rangle\nabla f\geqslant 0}=[0,1]$$

而分枝方向总数 $BN=2$

（4） 进行迭代循环：

1） 第一迭代：

a．在$\langle D_{20}\rangle$方向上有：

$$\langle\lambda_1^{(1)}\rangle=\min\left\{\left\langle-\frac{g_i(X_0^{(1)})}{s_i}\right\rangle,\ s_i<0\right\}=\left\langle-\frac{g_3(X_0^{(1)})}{\langle D_{20}\rangle\nabla g_3}\right\rangle=\left\langle-\frac{16}{-5}\right\rangle=3$$

∴ $\langle X_1^{(1)}\rangle=\langle X_0^{(1)}\rangle+\langle\lambda_1^{(1)}\rangle\langle D_{20}\rangle^T=[2,7]^T,\ f(X_1^{(1)})=-34$

b．在$\langle D_{22}\rangle$方向上有：

$$\langle\lambda_2^{(1)}\rangle=\min\left\{\left\langle-\frac{g_i(X_0^{(1)})}{s_i}\right\rangle,\ s_i<0\right\}=\left\langle-\frac{g_2(X_0^{(1)})}{\langle D_{22}\rangle\nabla g_2}\right\rangle=\left\langle-\frac{9}{-5.9}\right\rangle=1$$

∴$\langle X_2^{(1)}\rangle=\langle X_0^{(1)}\rangle+\langle\lambda_2^{(1)}\rangle\langle D_{22}\rangle^T=[5,5]^T$，$f(X_2^{(1)})=-35$

2） 第二迭代从$\langle X_2^{(1)}\rangle$出发，分别沿$\langle D_{20}\rangle$，$\langle D_{22}\rangle$方向进行搜索：

a．在$\langle D_{20}\rangle$方向上有：

$$\langle\lambda_1^{(2)}\rangle=\min\left\{\left\langle-\frac{g_i(X_2^{(1)})}{\langle D_{20}\rangle\nabla g_i}\right\rangle,\ \langle D_{20}\rangle\nabla g_i<0\right\}=\left\langle-\frac{g_1(X_2^{(1)})}{\langle D_{20}\rangle\nabla g_1}\right\rangle=\langle 1.722\rangle=1$$

∴ $\langle X_1^{(2)}\rangle=\langle X_2^{(1)}\rangle+\langle\lambda_1^{(2)}\rangle\langle D_{20}\rangle^T=[4,6]^T$，$f(X_1^{(2)})=-36$

b．在$\langle D_{22}\rangle$方向上：

$$\langle\lambda_2^{(2)}\rangle=\min\left\{\left\langle-\frac{g_i(X_2^{(1)})}{\langle D_{22}\rangle\nabla g_i}\right\rangle,\ \langle D_{22}\rangle\nabla g_i<0\right\}=\left\langle-\frac{g_1(X_2^{(1)})}{\langle D_{22}\rangle\nabla g_2}\right\rangle=\langle 0.525\rangle=0$$

3） 第三次迭代从$\langle X_1^{(2)}\rangle$出发，分别沿$\langle D_{20}\rangle$，$\langle D_{22}\rangle$方向进行搜索，此时给出的步长为：

$$\langle\lambda_1^{(3)}\rangle=\langle 0.722\rangle=0,\ \langle\lambda_2^{(3)}\rangle=\langle 0.220\rangle=0$$

因为$\langle\lambda_1^{(3)}\rangle$，$\langle\lambda_2^{(3)}\rangle$皆小于 1 故迭代结束，该问题的最优解应为：

$$X^*_{ILP}=\langle X_1^{(2)}\rangle=[4,6]^T,\ f(X^*_{ILP})=-36$$

例2 min $f(x)=-2x_1-5x_2-2x_3$

s．t．：$g_1(x)=-2x_1-2x_2-x_3+13\geqslant 0$

$g_2(x)=-x_1-3x_2-x_3+11\geqslant 0$

$$g_3(x)=-x_3+6\geqslant 0$$
$$g_j(x)=x_j\geqslant 0 \qquad (j=4,5)$$

求解：

（1） 首先我们求解对应于例2的LP问题得到：

$$X^*_{LP}=\left[\frac{11}{4},\ \frac{3}{4},\ 6\ \right]^T,\ f(X^*_{LP})=-21.25$$

（2） 根据（2.4）式，我们取$X_0^{(1)}=\langle X^*_{LP}\rangle=[2,0,6]^T$，$f(X_0^{(1)})=-16$

（3） 由（2.10）～（2.14）式，我们可求得可行分枝方向为：

$$\langle D_{30}\rangle=[1,1,-1]^T,\ \langle D_{31}\rangle=[1,0,0]^T,\ \langle D_{32}\rangle=[0,1,0]^T$$

（4） 进行迭代循环：

1） 第一次迭代：

a．在$\langle D_{30}\rangle$方向上：

$$\langle\lambda_1^{(1)}\rangle=\min\left\{\left\langle-\frac{g_i(X_0^{(1)})}{s_i}\right\rangle,\ s_i<0\right\}=\left\langle-\frac{g_1(X_0^{(1)})}{\langle D_{30}\rangle\nabla g_1}\right\rangle=\left\langle-\ \frac{3}{-3}\right\rangle=1$$

$$\therefore\quad \langle X_1^{(1)}\rangle=\langle X_0^{(1)}\rangle+\langle\lambda_1^{(1)}\rangle\langle D_{30}\rangle^T=[3,1,5]^T,\ f(X_1^{(1)})=-21$$

b．在$\langle D_{31}\rangle$方向上：

$$\langle\lambda_2^{(1)}\rangle=\min\left\{\left\langle-\frac{g_i(X_0^{(1)})}{s_i}\right\rangle,\ s_i<0\right\}=\left\langle-\frac{g_1(X_0^{(1)})}{\langle D_{31}\rangle\nabla g_1}\right\rangle=\left\langle\frac{3}{-2}\right\rangle=1$$

$$\therefore\quad \langle X_2^{(1)}\rangle=\langle X_0^{(1)}\rangle+\langle\lambda_2^{(1)}\rangle\langle D_{31}\rangle^T=[3,0,6]^T,\ f(X_2^{(1)})=-18$$

c．在$\langle D_{32}\rangle$方向上：

$$\langle\lambda_3^{(1)}\rangle=\min\left\{\left\langle-\frac{g_i(X_0^{(1)})}{s_i}\right\rangle,s_i<0\right\}=\left\langle-\frac{g_2(X_0^{(1)})}{\langle D_{32}\rangle\nabla g_2}\right\rangle=\left\langle-\frac{3}{-3}\right\rangle=1$$

$$\therefore\quad \langle X_3^{(1)}\rangle=\langle X_0^{(1)}\rangle+\langle\lambda_3^{(1)}\rangle\langle D_{32}\rangle^T=[2,1,6]^T,\ f(X_3^{(1)})=-21$$

2） 当进行第二次迭代时，所有步长$\lambda_j^{(2)}$皆小于1，故迭代结束。我们得最优解为：

$$X^*_{ILP}=\langle X_1^{(1)}\rangle=[3,1,5]^T,\ f(X^*_{ILP})=-21$$

$$X^*_{ILP}=\langle X_3^{(1)}\rangle=[2,1,6]^T,\ f(X^*_{ILP})=-21$$

五、结论和感谢

本文中，对于线性整数规划问题，提出了分枝方向搜索法。这种方法与切平面法和分枝限界法比较具有若干优点：

（1） 这种方法计算简单，而且在计算过程中速度很快。对上述两个例子若采用切平面法或分枝限界法至少需要迭代四次，而对于第二个例子需要求解六个LP子问题；

（2） 在ILP问题中，最优解通常有多个。一般而论，切平面法和分枝-限界法仅能求得一个最优解。然而，采用本文所提出的分枝方向搜索法，则可将所有最优解求得。这对于工程设计而言是非常有用的。

本文曾与加拿大瑞贾纳大学王中烈教授进行过有益的讨论，得到李灏教授的鼓励和支持，谨致感谢。

参考文献

[1] Garfinkel, Robert. S., *Integer Programming*, (1972).

[2] Glover, Fred, Improved linear integer programming formulations of nonlinear integer problem, *Decision Science*, 22, 1 (1975).

A New Method of Integer Linear Programming
——Branch Direction Search Method

Xia De-lin

(*Huazhong Institute of Technology, Wuhan*)

Abstract

An endeavour is made in this paper to present a new and simple ILP algorithm for optimization. It has the most desirable features of robustness and fast convergence. The algorithm is successful in applying it to the same problems arisen in engineering design.