应用数学和力学，第6卷第3期（1985年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

讨 论 栏

对“变厚度圆薄板在均布载荷下大挠度问题”解法的讨论

叶开沅（兰州大学）
叶志明（江苏工学院）：

文献[1]用小参数法和修正迭代法联合求解了“变厚度圆薄板在均布载荷下的大挠度问题”，文[1]中所得到的解以及各种特殊情况都是正确的。但文[1]中求解步骤仍属于摄动法[2]的求解过程，并且文[1]中将载荷项设为：

$$p=\beta G=6G\varepsilon \qquad (3.1b)^{[1]}$$

同时将无量纲挠度 $y(\rho)$ 和径向薄膜力 $S(\rho)$ 设为：

$$\left.\begin{aligned} y(\rho)&=y_1(\rho)\varepsilon+y_2(\rho)\varepsilon^2+y_3(\rho)\varepsilon^3+\cdots \\ S(\rho)&=S_1(\rho)\varepsilon+S_2(\rho)\varepsilon^2+S_3(\rho)\varepsilon^3+\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (3.4a,b)^{[1]}$$

这将会导致当变厚度参数（$\beta=6\varepsilon$，即小参数）趋于零时，载荷及挠度等函数出现奇异性，虽然这不影响最终结果，显然也是不合适的。另外，问题的求解在变厚度的摄动次数上仅涉及到二次项（见文[1]），这似乎是不够。但按文[1]的解法，要取到高次项，可能较难做到。

因此，我们认为有必要探讨在较少次迭代求解的情况下，得到较好结果的解法。我们建议采用下述修正迭代法来求解，可能会更好些。

原问题的非线性方程是[1]：

$$\left.\begin{aligned} L(\rho\varphi)&=\beta\left(\rho^2\frac{d\varphi}{d\rho}+\mu\rho\varphi\right)+(p\rho^2+S\varphi)\exp[\beta\rho^2/2] \\ L(\rho S)&=\frac{\beta}{3}\left(\mu\rho S-\rho^2\frac{dS}{d\rho}\right)-\alpha\varphi^2\exp[-\beta\rho^2/6] \end{aligned}\right\} \qquad (2.16a,b)^{[1]}$$

边界条件（这里仅给出周边固定夹紧的情形）：

当 $\rho=1$ 时：$y=0$，$\varphi=0$，$\dfrac{dS}{d\rho}-\dfrac{\mu S}{\rho}=0 \qquad (2.17a,b,c)^{[1]}$

当 $\rho=0$ 时：φ、S 有限 $\qquad (2.18a,b)^{[1]}$

现采用修正迭代法来直接求解（2.16a,b）[1]。

在一次近似中，略去方程（2.16a）[1]右边的变厚度项和非线性项：

$$\left.\begin{aligned} L(\rho\varphi_1)&=p\rho^2 \\ L(\rho S_1)&=-\alpha\varphi_1{}^2\exp[-\beta\rho^2/6] \end{aligned}\right\} \tag{1a,b}$$

从（1a）式并结合边界条件可得到：

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1&=\varphi_1(\rho,\ p) \\ y_1&=y_1(\rho,\ p) \end{aligned}\right\} \tag{2a,b}$$

我们取中心挠度 y_m 为迭代参数，则有
$y_1|_{\rho=0}=y_m$ 条件得到：

$$\varphi_1=\varphi_1(\rho,\ y_m) \tag{3}$$

将（3）代入（1b）式，求解（1b）式，这里在求 S_2 时已无须展开 $\exp[-\beta\rho^2/6]$（实在必要的话，也可展成小参数 $\varepsilon=\beta/6$ 的幂级数，但我们可以取到相当高的高阶项）；

$$S_2=S_2(\rho,\ y_m,\ \beta) \tag{4}$$

利用（3）和（4）式，再求二次近似：

$$\left.\begin{aligned} L(\rho\varphi_2)&=\beta\left(\rho^2\frac{d\varphi_1}{d\rho}+\mu\rho\varphi_1\right)+(p\rho^2+S_1\varphi_1)\exp[\beta\rho^2/2] \\ L(\rho S_2)&=\frac{\beta}{3}\left(\mu\rho S_1-\rho^2\frac{dS_1}{d\rho}\right)-\alpha\varphi_2^2\exp[-\beta\rho^2/6] \end{aligned}\right\} \tag{5a,b}$$

从（5a, b）式，我们又可能在不展开 $\exp[\beta\rho^2/2]$，$\exp[-\beta\rho^2/6]$ 的情形下求解 φ_2，S_2。这样逐步修正迭代，既简化了求解过程，又可以求得结果较好的解，还有可能采用解析-电算法[3]来求解，体现了修正迭代法用于解决复杂问题的优越性。

此外，我们还能直接取线性理论的变厚度问题之解答[4] y，φ 作为本问题的一次近似解 y_1，φ_1，再代入（1b）式求解 S_2，随之如上所述求解，可以期望得到更令人满意的解，当然问题求解的难度与计算工作量，也将随之增加。

用本文的方法还可研究在变厚度情形下扁薄球壳、锥壳的非线性稳定问题（将另文给出）及更复杂的问题。

参 考 文 献

[1] 王新志，变厚度圆薄板在均布载荷下大挠度问题，应用数学和力学，**4**，1（1983）.

[2] 钱伟长、叶开沅，圆薄板大挠度问题，物理学报，**10**，3（1954）.

[3] 叶开沅、顾淑贤，均布载荷作用下圆底扁薄球壳的非线性稳定性，全国计算力学会议论文集，北京大学出版社（1981）.

[4] 叶开沅，变厚度弹性圆薄板问题，物理学报，**11**，3（1955）.

王新志（甘肃工业大学）：

本文解法不是唯一的，奇异性已解决（王新志、王林祥，再论“变厚度圆薄板在均布载荷下大挠度问题”，甘肃大学学报，1(1984)）。叶开沅和叶志明二位同志提出又一解法，甚表欢迎。

A Discussion on "The Large Deflection Problem of Circular Thin Plate with Variable Thickness under Uniformly Distributed Loads"

Yeh Kai-yuan

(Lanzhou University, Lanzhou)

Ye Zhi-ming

(Jiangsu Institute of Technology, Zhenjiang, Jiangsu)

Wang Xin-zhi

(Gansu University of Technology, Lanzhou)