

非线性自由表面波问题的差分解法*

吕玉麟 李宝元

(大连工学院工程力学研究所, 1983年12月16日收到)

摘 要

本文提出计算二维非定常位势流动的有限差分法, 流动是因自由表面任意瞬间扰动所产生的, 自由表面上同时满足动力和运动的非线性条件. 本方法的基本特征是利用坐标变换将时间相关的物理计算域变换为固定域; 建立迭代格式解Poisson方程以求速度势; 通过快速富氏变换化为三对角型代数方程组计算未知量, 因而大量节省计算机时. 为解非定常自由表面波浪问题提供了一个有效的方法. 引用了两个例题验证方法的可行性.

一、前 言

自由表面波浪问题的特征是自由表面随时间而变动, 事先是未知的. 且在它上面应满足的边界条件还是高度非线性的. 这些因素形成了解非定常非线性自由表面波动问题的主要困难.

已经出现的一些解自由表面波动问题的数值方法中, 各有其特点. 然而也存在着执行中的问题.

一个普遍的方法是标志格子法^[1~4], 或者是它的改变格式^[5~6]. 它把Navier-Stokes方程或Euler方程以差分法近似求解, 而用Lagrange坐标追踪自由表面的位置. 但它的效率和应用于复杂边界还是存在问题的.

有限元法已经成功地被应用于自由表面波浪问题^[7~12]. 但是关于解的精度与收敛性, 特别是对非线性问题, 无穷远处的辐射条件等还没解决好. 此外, 在每一时间步长, 靠近自由表面的局部区域, 单元需重新划分, 在执行中是费事的, 因而限制了方法的效率.

Haussling和Van Eseltine^[13~14]利用有限差分法解一由于自由表面上的运动压力扰动而引起的二维位势流动问题. 他们引用了坐标变换, 将物理平面映射成固定边界平面. 变换后的方程组是利用Gauss-Seidal逐次超松弛法求解的. 由于变换后的方程包含许多项, 远不如原方程式的简练, 所以这种计算方法仍然很费时间.

本文的目的是为计算非定常非线性自由表面波动问题提出一个有效的数值方法.

基于一个坐标变换关系式, 在映射平面上得到封闭的固定边界. 运用一种迭代格式, 速度势可由解Poisson方程计算出来. 只需若干步即可使近似解收敛于一给定的精度. 而用差分离散的Poisson方程经过快速富氏变换(FFT)可以转化成三对角代数方程组, 直接利用

* 钱伟长推荐.

Thomas解法计算未知量。这样可以大量节省计算机时。我们利用本文的方法计算了两个例题，各题的初始扰动不一样。计算结果表明方法用于解非线性自由表面波（不出现破碎情况）问题是有效的。

二、方 程 式

考虑由于自由表面上的压力扰动引起的非定常势流运动。流体是无粘性且不可压缩的。原来静止的流体，突然受到瞬时的扰动，必然是无旋的流动。流场内质点运动的速度势满足Laplace方程，于固壁面处满足Neumann边界条件。在未知的自由表面上同时满足运动和动力边界条件。自由表面的波动位置以坐标 x 的单值函数表示，即 $y=\eta(x,t)$ 。不考虑波浪的破碎极限情况。

考虑于 $x=\pm l/2$ 处有固壁限制的二维容器，以自由表面未被扰动位置上中点为原点建立笛卡尔直角坐标系，其 y 轴的负方向指向容器的底边。流场变量为势函数 ϕ ，速度向量 $\vec{V}(u,v)$ 和压力 p 。取 U, L, p_0 分别为特征速度、特征长度和特征压力，控制方程及边界条件以无量纲形式表示。

$$\nabla^2\phi=0 \quad \text{在}\Omega\text{域内成立} \quad (2.1a)$$

自由表面上的运动和动力学条件为

$$\phi_t = -\frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \frac{1}{F_r^2}\eta \quad \text{当 } y=\eta \quad (2.1b)$$

$$\eta_t = \phi_y - \phi_x \cdot \eta_x \quad \text{当 } y=\eta \quad (2.1c)$$

固壁面上边界条件为

$$\phi_n = 0 \quad \text{当 } x=\pm l/2 \quad (2.1d)$$

底边上的边界条件为

$$\phi_n = 0 \quad \text{当 } y=-d \quad (2.1e)$$

初始条件

$$\phi=0, \eta=\bar{\eta}(x,0) \quad \text{当 } t=0, \quad \text{在}\Omega\text{内} \quad (2.1f)$$

式中变量下标表示该变量的偏导数， d 是平衡时的水深， Ω 表示流场内域， $\bar{\eta}(x,0)$ 系因扰动而形成的初始自由表面。

式中包括两个参数，它们分别为

$$F_r = U/\sqrt{gL}, \quad \sigma = p_0/\rho gL$$

这里 g 是重力加速度， ρ 表示流体介质的密度。

由(2.1)式一旦求出位势函数 $\phi(x,y,t)$ ，流场压力可按下列式计算

$$\frac{\sigma}{F_r^2}p = -\phi_t - \frac{1}{2}(\phi_x^2 + \phi_y^2) - \frac{1}{F_r^2}y \quad \text{在}\Omega\text{内} \quad (2.2)$$

三、求 解 的 方 法

上述的Laplace方程的初/边值问题采用有限差分法流场内的变量以及它们随时间的变化值。具体的求解全过程可分为五个步骤：即时间相关的物理平面变换成与时间无关的固定计算域；构造迭代格式解Poisson方程求势函数；有限差分法离散；运用快速Fourier变换化方

程为三对角型代数方程组求解；计算下一时间步的自由表面位置及其上的速度势。回到第一个步骤如此循环求解至所要求的时间步为止。

兹详述各步骤如下：

场域变换

速度势函数 $\phi(x, y, t)$ 满足的偏微分方程(2.1a)定义于随时间变动的场域。为避免其离散格式求解时网格的随时间而变动，引用如下坐标变换^[14]

$$x = x, \quad \xi = \frac{y+d}{\eta+d} \quad (3.1)$$

原来以自由表面为部分边界的流场(图1)转换成与时间无关的固定边界包围的计算域(图2)。

在计算域 (x, ξ) 内，Laplace方程及边界条件转换成如以下形式

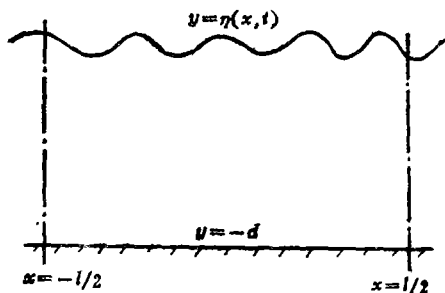


图 1

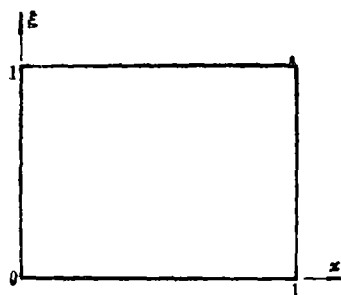


图 2

$$\begin{aligned} \phi_{xx} + (1 + \xi^2 \eta_x^2) \phi_{\xi\xi} / (\eta + d)^2 + \xi \left(\frac{2\eta_x^2}{\eta + d} - \eta_{xx} \right) \phi_{\xi} / (\eta + d) \\ - 2\xi \eta_x \phi_{x\xi} / (\eta + d) = 0 \end{aligned} \quad (3.2a)$$

$$\phi_{\xi} = -\frac{1}{2} \left(\phi_x - \phi_{\xi} \frac{\xi \eta_x}{\eta + d} \right)^2 - \frac{1}{2} \phi_{\xi}^2 / (\eta + d)^2 - \eta / F^2, \quad \text{当 } \xi = 1 \quad (3.2b)$$

$$\eta_{\xi} = \phi_{\xi} / (\eta + d) - \eta_x \left(\phi_x - \phi_{\xi} \frac{\xi \eta_x}{\eta + d} \right), \quad \text{当 } \xi = 1 \quad (3.2c)$$

$$\phi_x = \xi \eta_x \phi_{\xi} / (\eta + d), \quad \text{当 } x = 0, 1 \quad (3.2d)$$

$$\phi_{\xi} = 0, \quad \text{当 } \xi = 0 \quad (3.2e)$$

迭代过程

转换后的方程式及边界条件较之原来对应的形式复杂多了。如用差分法求解，方程式(3.2a)是一个联系三行三列的九点式。若采用一般 Gauss 消去法求解，对一个长周期的流动过程，必将很不经济。有鉴于此，建立一个求解的迭代格式。

将方程式(3.2a)简写成下列形式

$$L\phi = 0 \quad (3.3)$$

此处 L 表示一个算子，它对函数的全部作用即(3.2a)左端所有各项的运算。

于(3.3)式两端相加同一项 $\nabla^2\phi$ 以后, 形成

$$\nabla^2\phi = (\nabla^2 - L)\phi \quad (3.4)$$

(3.4)式与(3.3)式是等价的.

(3.4)式若按迭代方式求解, 如

$$\nabla^2\phi^{(k+1)} = (\nabla^2 - L)\phi^{(k)} \quad (3.5)$$

式中上标括号内的 k 代表迭代的次数. 这时(3.5)式右端项是上一次迭代计算出的已知值, 则

(3.5)式就是一个Poisson方程.

对一个适定的Poisson方程边值问题, 其迭代解将于某一有限数 K 收敛, 即

$$\nabla^2\phi^{(K+1)} = \nabla^2\phi^{(K)}$$

因此, 可以期望(3.5)式的最后迭代解收敛于原问题(3.3)式的准确解.

有限差分计算式

固定的计算域 (x, ξ) 分成有限个矩形子域沿 x 和 ξ 轴向分别以等间距 Δx 和 $\Delta \xi$ 划分为 $M+1$ 和 $N+1$ 个格子节点. 利用中心差分, 方程式(3.5)可以写成下列五点标准式

$$\begin{aligned} \phi(i-1, j) + \phi(i+1, j) + \alpha^2\phi(i, j-1) + \alpha^2\phi(i, j+1) \\ - 2(1 + \alpha^2)\phi(i, j) = (\Delta x)^2 R(i, j) \quad i = \overline{0, M}; j = \overline{0, N} \end{aligned} \quad (3.6)$$

式中 $\alpha = \Delta x / \Delta \xi$, $R(i, j)$ 表示(3.5)式的右端值.

富里哀变换

边界条件(3.2d)是Neumann型, 其中心差分的离散形式可写成

$$\left. \begin{aligned} \phi(1, j) - \phi(-1, j) &= 2\Delta x \cdot D_L(j) \\ \phi(M+1, j) - \phi(M-1, j) &= 2\Delta x \cdot D_R(j) \end{aligned} \right\} j = \overline{0, N} \quad (3.7)$$

式中 $D_L(j)$ 和 $D_R(j)$ 分别代表函数 ϕ 在 x 的左和右端给定的导数值.

当 $i=0$ 和 $i=M$, 方程式(3.6)并进该点的边界条件, 并且重新组合右端项如下

$$\left. \begin{aligned} B(0, j) &= (\Delta x)^2 R(0, j) + 2\Delta x \cdot D_L(j) \\ B(M, j) &= (\Delta x)^2 R(M, j) - 2\Delta x \cdot D_R(j) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

这样, 在 x 轴向边界条件可考虑成齐次Neumann型, 即

$$\phi_x = 0 \quad \text{当 } x = 0, 1$$

相应地, Fourier变换可采用余弦型式如下

分解

$$U_s(j) = \frac{2}{M} \sum_{i=0}^M E(i, M) U(i, j) \cos\left(\frac{\pi s i}{M}\right) \quad 0 \leq s \leq M \quad (3.9)$$

组合

$$U(i, j) = \sum_{s=0}^M E(s, M) U_s(j) \cos\left(\frac{\pi i s}{M}\right) \quad 0 \leq i \leq M \quad (3.10)$$

式中 U 是函数 ϕ 或修正右端项 B 的代替符号. 函数 $E(i, j)$ 定义如下:

$$E(i, j) = \begin{cases} 1/2 & \text{当 } i=0 \text{ 或 } i=j \\ 1 & \text{其它情况} \end{cases}$$

当在方程式(3.6)中的函数 ϕ 和右端项 B 以(3.10)式的 U 替换之后, 二维差分五点式将转化成沿 x 轴的三点格式如下

$$\alpha^2 \phi_s(j-1) + 2 \left[\cos \left(\frac{\pi s}{M} \right) - (1 + \alpha^2) \right] \phi_s(j) + \alpha^2 \phi_s(j+1) = B_s(j) \quad 1 \leq s \leq M-1 \quad (3.11)$$

式中 (以及(3.9)、(3.10)式中) 变量的下标 s 表示该变量的序号, 并不表示偏导数。

对应给定的序号 s , 即有一个相对应的三点格式(3.11)。

垂直方向的边界条件为

$$\phi_\xi = 0, \quad \text{当 } \xi = 0; \quad \phi = g(x), \quad \text{当 } \xi = 1 \quad (3.12)$$

其对应的差分格式为

$$\left. \begin{array}{l} [\phi(i, 1) - \phi(i, -1)] / 2\Delta\xi = 0 \quad \text{当 } j = 0 \\ \phi(i, N) = g(i) \quad \text{当 } j = N \end{array} \right\} \quad 0 \leq i \leq M \quad (3.13)$$

同样以(3.10)式的 U 替换(3.13)式的函数 ϕ 及 $g(i)$ 值得到

$$\left. \begin{array}{l} \phi_s(1) - \phi_s(-1) = 0 \quad \text{当 } j = 0 \\ \phi_s(N) = g_s \end{array} \right\} \quad (3.14)$$

对给定的 $B(i, j)$ 和 $g(i)$, 按(3.9)式分解变换可得

$$B_s(j) = \frac{2}{M} \sum_{i=0}^M E(i, M) B(i, j) \cos \left(\frac{\pi s i}{M} \right) \quad 0 \leq s \leq M, \quad 0 \leq j \leq N \quad (3.15)$$

$$g_s = \frac{2}{M} \sum_{i=0}^M E(i, M) g(i) \cos \left(\frac{\pi s i}{M} \right) \quad 0 \leq s \leq M \quad (3.16)$$

至此, 对应每一个 s , 满足边界条件(3.14)利用Thomas算法求解三对角方程组(3.11)。当全部的 $\phi_s(j)$ 计算出来之后, 进行(3.10)式的组合变换, 即得到在计算域 (x, ξ) 内的势函数

$$\phi(i, j) = \sum_{s=0}^M E(s, M) \phi_s(j) \cos \left(\frac{\pi i s}{M} \right) \quad 0 \leq i \leq M, \quad 0 \leq j \leq N-1 \quad (3.17)$$

当某一时刻的流场速度势计算出来以后, 自由边界位置以及其上的速度势可采用修正的欧拉法计算下一时间步的新值

$$\phi^{n+1}(i, \eta) = \phi^n(i, \eta) + \Delta t [F^{n+1}(i) + F^n(i)] / 2 \quad (3.18)$$

$$\eta^{n+1}(i) = \eta^n(i) + \Delta t [G^n(i) + G^{n+1}(i)] / 2 \quad (3.19)$$

式中上标 n 表示时间步, Δt 为时间增量, $F(i)$ 和 $G(i)$ 分别为(3.2b)式和(3.2c)式的右端项的中差近似值。

隐式格式(3.18)、(3.19)与前述速度势 ϕ 的计算方法一并迭代求解, 得到新的 η 以及在 η 上的 ϕ 值。重新开始下一时间步 $(n+1)\Delta t$ 的边值问题计算, 直到所要求的某一时间步为止。

计算全过程用到的(3.9)及(3.10)式的变换, 均以快速富氏变换(FFT)方法执行。在多数情况下FFT算法是按下列复数形式表述和编制程序的

$$X(j) = \sum_{n=0}^{N-1} A(n) W_N^{nj} \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.20)$$

式中 $W_N = \exp(2\pi i/N)$ 是一的第 N 主复根, $i = \sqrt{-1}$ 。这被称为离散富氏逆变换(IDFT)。而以用 $X(j)$ 表示的 $A(n)$ 算式

$$A(n) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} X(j) W_N^{-nj} \quad (3.21)$$

定义为离散富氏变换(DFT)。

基本的富氏变换是对称的且可以用有效的子程序执行其运算。在本文的问题中处理实数，对应于 x 轴向的Neumann型边界条件，用余弦变换是适合的。考虑到上述两方面，本课题编制专门子程序完成数据处理，用复数形式的快速富氏变换进行上述余弦变换。子程序不限制输入数据点数为 2^p (p 为任意整数)，它适应于输入数据点数 N 为任意正整数的情况。

四、数值计算结果

本方法的程序曾在CYBER170—720计算机上进行过两例计算。

第一个问题为一个初始干扰形成的自由表面波形

$$\eta_0 = 0.2 \cos(\pi x) \quad 0 \leq x \leq 1$$

由自由表面的平衡位置至底部的深度为 $d=1.7$ 。

其它参数选择如下

Froude数 $F_r = \sqrt{2}/2$, $\sigma = 0.1$, 时间步长 $\Delta t = 0.02$ 。

计算区域划分成 18×18 个矩形格子，每一个格子具有4个角点。

计算以全域中 $\phi_0 = 1.00$ 的均布势为起始状态开始。给定 ϕ 与 η 前后两步相对误差 $E_\phi = 1.0 \times 10^{-5}$ ，则计算结果大致于5次迭代内即可收敛。

第二个问题考虑的对象与第一例相同。在开始时水面处于静止状态，自由表面的初始值为

$$\eta_0(x) = 0 \quad 0 \leq x \leq 1$$

由一初始突加干扰如 $\phi_0(i, N) = \phi_0(i-1, N) - 0.042 \sin(\pi x)$

作用于自由表面，计算因此扰动而形成的流动。

计算网格以及其它有关的参数选取第一例的对应量。在相同的精度下，计算解约在十次迭代以内收敛。

以上二个问题的计算各都运行到第82时间步。各例中自由表面随时间的演变分别表示于图3和图4中。

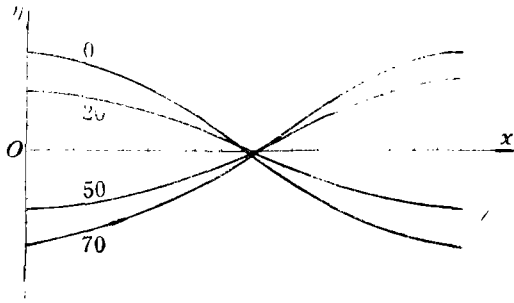
运算表明当网格间距愈小，则计算解的收敛速度愈快。而网格间距的选取不得超过波长的一定百分比值。

就计算效率而论，如果方程式(3.2a)利用普通的 Gauss 消去法求解，它需要大约 $M^3/3 + O(M^3)$ 次的乘法和除法运算。此处 M 为计算域内节点总数。在本文的方法中，执行方程(3.20)和(3.21)的运算占主要工作量，用FFT方法运算，只需 $N \log N$ 次的乘和除法运算。而且此处的 N 仅是沿 x 轴向的分离节点数。此外，利用三对角特征的 Thomas 算法，只需要 $5M - 4$ 次的乘除运算。在方程式(3.5)中每一时间步所经历的迭代次数与解的精度相关，然而少数几次迭代即可收敛。

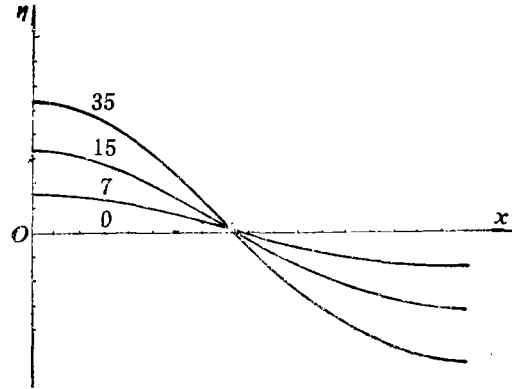
综合以上分析，可以看到本文提出的方法用来求解能大量节省运算次数。显然，这一方法对非定常非线性表面波动问题是一个有效的差分算法。

五、结 束 语

本文为预报由于初始干扰引起的自由表面波浪运动提出了一个稳定的方法。对自由表面的边界条件按照完全非线性形式处理。



曲线上数字表示时间步数
图3 波高 η 随时间的演变



曲线上的数字表示时间步数
图4 波高 η 随时间的演变

利用坐标变换, 流场映射到与时间无关的计算域内. 利用本文提出的迭代格式, 问题化为在计算域内求解Poisson方程的初值边值问题. 偏微分方程中的空间导数和时间导数皆采用有限差分法离散, 差分方程式经过FFT变换后转化成三对角方程组求解. 迭代收敛速度快, 可以大量节省计算机时. 它的适用性已通过二维非线性自由表面波动问题计算的数值结果得到验证.

本方法推广到三维自由表面波浪问题是直接易行的.

针对更复杂的实际问题, 诸如在自由表面下有潜浮物体存在的波浪问题等, 将这一技术推广有待进行, 但可预期能获得成功.

参 考 文 献

- [1] Harlow, F. H. and J. E. Welch, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface, *Physics of Fluids*, 8, 12, Dec. (1965).
- [2] Harlow, F. H. and J. E. Welch, Numerical study of large-amplitude free-surface motion, *Physics of Fluids*, 9, 5, May (1966).
- [3] Nichols, B. D. and C. W. Hirt, Improved free surface boundary conditions for numerical incompressible flow calculations, *Journal of Computational Physics*, 8, 3, Dec. (1971).
- [4] Nichols, B. D. and C. W. Hirt, Calculating three-dimensional free surface flows in the vicinity of submerged and exposed structures, *Journal of Computational Physics*, 12, 2, June (1973).
- [5] Chan, R. K.-C. and R. L. Street, A computer study of finite amplitude water waves, *Journal of Computational Physics*, 6, 1, Aug. (1970).
- [6] Chan, R. K.-C., R. L. Street and J. E. Fromm, The digital simulation of water waves: An evolution of SUMMAS, *Lecture Notes in Physics*, Vol. 8, Springer-Verlag, Berlin (1970).
- [7] Taylor, C. J., P. W. France and O. C. Zienkiewicz, Some free surface transient flow problems of seepage and irrotational flow, *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, Academic Press, New York (1973).

- [8] Visser, W. and M. Van der Wilt, A numerical approach to the study of irregular ship motions, *Finite Element Methods in Flow Problems*, UAH Press, Alabama (1974).
- [9] Nickell, R. E., R. I. Tanner and B. Caswell, The solution of viscous incompressible jet and free surface flows using finite element methods, *Journal of Fluid Mechanics*, 65, pt. 1 (1974).
- [10] Bai, K. J., A localized finite element method for the uniform flow problems with a free surface, *First International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, Gaithersburg, Maryland, Oct. (1975).
- [11] Bai, K. J. and R. W. Yeung, Numerical solutions to free-surface flow problems, *Proceeding of the Tenth ONR Symposium on Naval Hydrodynamics*, Cambridge, Mass., June (1974).
- [12] Yen, S. M. and K. D. Lee, Application of finite element method to potential flow problems, *Proceedings of the Second International Symposium on Finite Element Methods in Flow Problems*, Ropallo, Italy, June (1976).
- [13] Haussling, H. J. and R. T. Van Eseltine, A combined spectral finite-difference method for linear and nonlinear water wave problems, Naval Ship R & D Center Report 4580, Nov. (1974).
- [14] Haussling, H. J. and R. T. Van Eseltine, Finite difference methods for transient potential flows with free surfaces, *First International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics*, Gaithersburg, Maryland, Oct. (1975).

Finite Difference Method of Transient Nonlinear Free Surface Wave Problems

Lu Yu-lin Li Bao-yuan

(*Research Institute of Engineering Mechanics, Dalian Institute of Technology, Dalian*)

Abstract

A finite difference method is developed for computing the two-dimensional transient potential flow generated by an impulse on the free surface. Both the dynamic and kinematic free surface conditions are considered in nonlinear version. The primary features of the present paper include the use of special coordinates transformations so that the geometry of the flow field is transformed into a time-invariant region, presents an iteration process, by which the velocity potential is computed as the solution of a Poisson equation, the application of fast Fourier transform (FFT) technique results in a tri-diagonal system of equations which can be readily solved by the Thomas algorithm, the computing time is significantly reduced. Thus an efficient technique for handling the transient potential problems is well justified. The feasibility of the present method is verified by two examples involving different initial disturbances.