应用数学和力学，第 6 卷第 2 期（1985年 2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

线性系统稳定性与最优性的关系——线性最优控制反问题的一种提法*

陈小林　　黄　琳

（北京大学力学系，1984年 1 月 2 日收到）

摘　　要

本文提出并讨论了与 R. E. Kalman 提出的线性系统最优控制反问题不同的最优控制的另一类反问题：任给一渐近稳定系统$\dot{x}=\tilde{A}x$及指标 $J=\int_0^{\infty}(x^TQx+u^Tu)\,dx$，问能否将 $\tilde{A}$ 分解成为 $\tilde{A}=A+BK^T$，使$u=K^Tx$在指标J下为系统 $\dot{x}=Ax+Bu$ 的最优控制？本文给出了上述问题的解答并得出了渐近稳定系统与最优系统之间的某种对应关系。

一、引　　言

R. E. Kalman曾经提出线性最优控制理论的反问题：给定一个完全可控的线性系统和一个稳定的状态反馈控制律，寻找一个二次型性能指标使得上述控制律为此指标下的最优控制律。Kalman 对单输入单输出线性系统解决了此类反问题，给出了该问题有解的频域判据和构造指标的算法[1]。后来B. D. O. Anderson 等人把 Kalman 的结果推广到了多输入多输出线性系统，他利用正实矩阵与谱分解方面的成果得到类似结果。进而他还对某一类非线性系统进行了类似讨论[3]。Kalman 提出的最优控制反问题实质上是一种变分问题的反问题。即在给定一个微分方程的前提下，要求构造一个标量函数 $L(t,x,\dot{x})$，使微分方程的解就是对应变分问题$\int L(t,x,\dot{x})dt=\min$ 的极值曲线。

本文讨论了与之不同的另一类最优控制的反问题：任给一个渐近稳定的线性系统及一个非负二次型性能指标，问是否可以从该稳定系统中分解出一个状态反馈使得这个状态反馈就是给定指标下的最优控制。具体表述成下述问题(P_1)。

(P_1)　给定一个渐近稳定自由系统

$$\dot{x}=\tilde{A}x \tag{1.1}$$

与一个性能指标

$$J=\int_0^{+\infty}[x^TQx+u^Tu]dt \tag{1.2}$$

问能否寻求A的一个分解形式

$$\tilde{A}=A+BK^T$$

* 朱照宣推荐。

使对应反馈系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad u=K^Tx \tag{1.3}$$

刚好对应(1.2)确定的$J=\min$的最优系统，且有（A，B，C^T）为最小阶实现。

其中 1° $\tilde{A}$为Hurwitz 矩阵，即$\tilde{A}$的特征值均具负实部或简记为$\lambda(\tilde{A})\subset\mathring{\mathbf{C}}_-$；2° $\tilde{A}$的非常数不变因子数即$\tilde{A}$的循环指数为r；3°　$Q=CC^T$，$C\in\mathbf{R}_r^{n\times r}$。

本文对上述问题给出了答案：给定$\tilde{A}$，Q后，对几乎所有的$K\in\mathbf{R}^{n\times r}$总可将$\tilde{A}$分解为$\tilde{A}=A+BK^T$，满足上述问题($P_1$)的要求，并给出了分解的具体算法及算例。

众所周知，对定常线性系统而言，给定一个非负二次型指标，若系统为最小阶的，则在此指标下的最优状态反馈控制一定使闭环系统是渐近稳定的[4][5]。本文的结果指出，若系统是渐近稳定的，则必可分解出一个最优的状态反馈控制律，并且分解后的系统是最小阶的。这样我们在渐近稳定系统与最优系统之间有了某种对应关系，这对于进一步认识渐近稳定系统和最优系统的本质有一定帮助。

另一方面，对于实际存在的某些渐近稳定系统，借助上述问题的解可以认为系统内部有着某种能量或信息的反馈使得系统是最优的，从而对系统的内部结构、信息联系、作用原理等的认识获益。

二、问题的分析及预备知识

先设上述分解已作出，推必要条件。若问题(P_1)有解$\tilde{A}=A+BK^T$，则下面Riccati方程有正定解P：

$$PA+A^TP+Q-PBB^TP=0 \tag{2.1}$$

且有：

$$K^T=-B^TP \tag{2.2}$$

由(2.1)及$\tilde{A}=A+BK^T$可推出：

$$P\tilde{A}+\tilde{A}^TP+Q+PBB^TP=0 \tag{C_1}$$

$$P\tilde{A}+\tilde{A}^TP+Q+KK^T=0 \tag{C_2}$$

因此由问题（P_1）有解可得$\tilde{A}$，B使（C_1）有正定解P，且$\tilde{A}$，K使（C_2）有正定解P。反之利用(C_1)、(C_2)能得到问题（P_1）的两种分解方法。

(a) 给定B，分解$\tilde{A}$。若$\tilde{A}$，B使（C_1）有正定解，令$K^T=-B^TP$，$A=\tilde{A}-BK^T$可得分解。这种方法首先要求求解P的具正系数的Riccati方程。一般说来这种方程并不存在正定解P，为此考虑：

$$\tilde{A}=-\alpha\quad(\alpha>0),\ B=1,\ Q=1$$

则（C_1）为

$$-2\alpha p+1+p^2=0$$

解之$p=\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-1}$，在$\alpha<1$时$p$为复数.

(b) 给定K，分解$\tilde{A}$。若$\tilde{A}$,K使（C_2）有正定解，令$B=-P^{-1}K$，$A=\tilde{A}-BK^T$，则系统(1.3)在指标(1.2)下的最优控制律是$u=K^Tx$。下面考虑由K分解$\tilde{A}$的可能性。将（C_2）写为

$$P\tilde{A}+\tilde{A}^TP=-(Q+KK^T) \tag{2.3}$$

由$\tilde{A}$的循环指数为r可得：$\forall C\in\mathbf{R}_r^{n\times r}$，$(\tilde{A}, C^T)$可观测以概率为1成立[6]，故不妨先设$(\tilde{A}, C^T)$可观测（即使对某个$C_0$，$(\tilde{A}, C_0^T)$不可观测，只要对$C_0$做一小扰动而变为$C_0+\Delta C_0$则$(\tilde{A}, C_0^T+\Delta C_0^T)$可观测）。因此Lyapunov方程$\tilde{A}^TP+P\tilde{A}=-Q$有正定解，又因为$Q+KK^T\geqslant Q$，所以(2.3)有唯一正定解$P_K$（记$P_0$为$K=0$时的解）且$P_K$可表为：

$$P_K=\int_0^\infty \exp[\tilde{A}^Tt](Q+KK^T)\exp[\tilde{A}t]\,dt \tag{2.4}$$

做映射：

$$\Phi:\mathbf{R}^{n\times r}\to\mathbf{R}^{n\times r},\quad B=\Phi(K)=-P_K^{-1}K \tag{2.5}$$

则Φ为一非线性算子。为讨论由K做分解的结果我们先研究Φ的性质。（注意下面矩阵K，B的范数是Frobenius范数。）

引理1 由(2.5)定义的映射Φ有如下性质：

1° Φ在$K=0$邻近是一个$\mathbf{R}^{n\times r}\to\mathbf{R}^{n\times r}$的$C^1$微分同胚。

2° $\|K\|_F\to\infty$时，对几乎$\mathbf{R}^{n\times r}$中所有方向K_0 ($\|K_0\|=1$)，$K=\mu K_0$，$\mu\to+\infty$时都有$\|B\|_F=\|\Phi(K)\|_F\to 0$。

证明 先对$r=1$情况证明（对应$k\in\mathbf{R}^n$）。

1° 我们考虑Φ在$k=0$邻近的Jacobi矩阵（导算子）：

$$D\Phi|_k=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial k}\right)_{n\times n}$$

记$\Phi=(\Phi_1\cdots\Phi_n)^T$，$k=(k_1\cdots k_n)^T$，$I=(e_1\cdots e_n)$为单位矩阵，$P=(p_{ij})_{n\times n}$则

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi_i}{\partial k_j}&=\frac{\partial}{\partial k_j}[e_i^T(-P_k^{-1}k)]\\&=-\left[e_i^T\left(\frac{\partial}{\partial k_j}P_k^{-1}\right)k+e_i^TP_k^{-1}\frac{\partial}{\partial k_j}(k)\right]\\&=-\left[e_i^T\frac{\partial}{\partial k_j}\left(P_k^{-1}\right)k+p_{ij}\right]\end{aligned} \tag{2.6}$$

由P_k之定义及其对k_j的导数在任一有界闭区域内的一致收敛性可得$\frac{\partial}{\partial k_j}(P_k)$对$k_j$ ($j=1,\cdots,n$)连续。

由于$\forall k\in\mathbf{R}^n$，$P_k>0$，因而由$\frac{\partial}{\partial k_j}P_k^{-1}=-P_k^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial k_j}P_k\right)P_k^{-1}$可知$\frac{\partial}{\partial k_j}P_k^{-1}$对$k_j$连续从而$P_k^{-1}$对$k$一次连续可微。

从(2.6)可得$D\Phi|_{k=0}=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial k}\right)_{n\times n}\Big|_{k=0}=-P_0^{-1}$，而$\frac{\partial\Phi}{\partial k}$对一切$k\in\mathbf{R}^n$连续，由反函数定理可得$\Phi$在$k=0$邻近为一$C^1$微分同胚。

2° 对任给$k_0\in\mathbf{R}^n$，不妨设$\|k_0\|_F=1$，$(\tilde{A},k_0)$可观测以概率为1成立[6]。考虑下面Lyapunov方程：

$$P_1\tilde{A}+\tilde{A}^TP_1=-\mu^2k_0k_0^T\qquad(\mu>0) \tag{2.7}$$

$$P_2\tilde{A}+\tilde{A}^TP_2=-(\mu^2k_0k_0^T+Q) \tag{2.8}$$

(2.7)、(2.8) 有正定解分别记为 $P_1(\mu)=\mu^2P_1(1)$ ($P_1(1)$为$\mu=1$时的$P_1(\mu)$值) 和 $P_2(\mu)$，对$\forall\mu>0$有$P_2(\mu)\geqslant P_1(\mu)$，因此 $P_2^{-1}(\mu)\leqslant P_1^{-1}(\mu)$，由此有

$$\|P_1^{-1}(\mu)\|\geqslant\|P_2^{-1}(\mu)\|$$

$$\|\Phi(\mu k_0)\|=\|P_2^{-1}(\mu k_0)\mu k_0\|\leqslant\frac{\mu}{\mu^2}\|P_1^{-1}(1)\|\,\|k_0\|=\frac{\|P_1^{-1}(1)\|}{\mu}$$

$$\|\Phi(\mu k_0)\|\to 0,\ \text{当}\mu\to+\infty\text{时}$$

这说明几乎对所有方向k_0均有$\|\Phi(k)\|\to 0$，当$k=\mu k_0$，$\mu\to+\infty$。

对$r>1$情况只要将变换Φ：$\Phi(K)=-P_K^{-1}K=B$写为

$$\begin{bmatrix} b_1\\ \vdots\\ b_r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_K^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & P_K^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} k_1\\ \vdots\\ k_r\end{bmatrix}$$

其中$B=(b_1\cdots b_r)$，$K=(k_1\cdots k_r)$，即可推出与$r=1$情况相同结论。 (证毕)

此引理说明在去掉$\mathbf{R}^{n\times r}$中测度任意小的闭区域后，Φ将$\mathbf{R}^{n\times r}$映到一个有界区域内，因此Φ不是全空间的一一对应。但由1°的证明可知Φ在$K=0$的导算子$D\Phi|_{K=0}$为正定矩阵，并且$D\Phi$对K连续，因此必存在包含原点为内点的区域$\mathbf{u}$使$\forall k\in\mathbf{u}$，$\det(D\Phi|_K)\neq 0$。故在$\mathbf{u}$内Φ为$\mathbf{u}\to\Phi(\mathbf{u})$的一个一一对应。

例 设$\tilde{A}=-a$，$a>0$，$Q=1$，则

$$P_k=(1+k^2)\int_0^\infty\exp[-2at]dt=(1+k^2)\frac{1}{2a}$$

$$P_k^{-1}=\frac{2a}{1+k^2},\quad b_k=\frac{-2a}{(1+k^2)}k$$

因此$k=\pm1$时，b分别达到最小与最大值：$b=\mp2a$，且$\lim\limits_{k\to\infty}b_k=0$，参见下图：

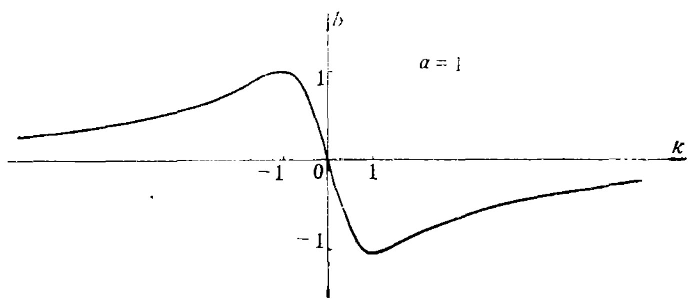

图 1

这里$\mathbf{u}$为区间$(-1,\ 1)$，不只是0的一个小邻域。

下面的引理2说明最小阶系统在状态反馈下仍是最小阶的，是概率为1事件。

引理 2 设$\tilde{A}$的循环指数为r，$(\tilde{A},\ B)$ 可控，$B\in R^{n\times r}$，则$\forall C\in\mathbf{R}_r^{r\times r}$，使 $(\tilde{A},C^T)$ 与 $(\tilde{A}-BK^T,\ C^T)$ 同时可观测的概率为1。

证明 由 $(\tilde{A},\ B)$ 可控得 $(\tilde{A}\sim BK^T,\ B)$ 可控[7]。因而$\tilde{A}-BK^T$的循环指数$r_1\leqslant r$[6]。

现随机地给$C_1^T\in\mathbf{R}_r^{r\times n}$，则使 $(\tilde{A}-BK^T,C_1^T)$ 不可观测的概率为零；随机地给$C_2^T\in\mathbf{R}_r^{r\times n}$使 $(\tilde{A},\ C_2^T)$ 不可观测的概率也是零。根据“两事件并的概率≤两事件概率之和”可得：随

机给$C\in\mathbf{R}^{n\times r}_{r}$使得或（$\tilde{A}$，$C^T$）不可观测或（$\tilde{A}-BK^T$，$C^T$）不可观测的概率为零，因此使（$\tilde{A}$，$C^T$）与（$\tilde{A}-BK^T$，$C^T$）同时可观测的概率为1。（证毕）

三、问题的解及算法

本节定理1解决了前面提出的问题(P_1)，定理2解决了问题（P_1）的推广(P_2)。本节还给出了问题（P_1）的算法及算例。

定理1 设给定一渐近稳定系统$\dot{x}=\tilde{A}x$，$\lambda(\tilde{A})\subset\mathbf{C}^0_-$，$\tilde{A}$的循环指数为$r$，则对几乎任意$Q=CC^T,C\in\mathbf{R}^{n\times r}_{r}$均存在$K\in\mathbf{R}^{n\times r}$，$B\in\mathbf{R}^{n\times r}$，使$\tilde{A}=A+BK^T$且使下面系统

$$\dot{x}=Ax+Bu \tag{3.1}$$

在指标：

$$J=\int_0^\infty (x^TQx+u^Tu)dt$$

下的最优控制律为$u=K^Tx$。并且（A，B，C^T）为最小阶系统。

证明　由于$\tilde{A}$是循环指数为r的稳定阵，利用引理1可得；$\forall K\in\mathbf{u}\subset\mathbf{R}^{n\times r}$，$B=\Phi(K)=-P_K^{-1}K$为一个$\mathbf{u}\to\Phi(\mathbf{u})$的一一对应。($P_K$满足(2.3)式。)

根据[6]中结论，易证$\mathbf{u}$中使（$\tilde{A}$，B）可控之K为一概率1集合。令$A=\tilde{A}-BK^T$，由于状态反馈不改变可控性[7]，因此在$\mathbf{u}$中随机选$K\in\mathbf{R}^{n\times r}$则以概率1使（$A$，$B$）=($\tilde{A}-BK^T$，$B$）可控。将$B=-P_K^{-1}K$及$A=\tilde{A}-BK^T$代入（2.3）得

$$\tilde{A}^TP_K+P_K\tilde{A}+Q+P_KBB^TP_K=0$$

于是有

$$(\tilde{A}^T-KB^T)P_K+P_K(\tilde{A}-BK^T)+Q-P_KBB^TP_K=0$$

即

$$A^TP_K+P_KA+Q-P_KBB^TP_K=0 \tag{3.2}$$

因此正定矩阵P_K满足A，B，Q对应的代数Riccati方程(3.2)，故$u=K^Tx=-P_KBx$为最优控制。

由引理2，$\forall C\in\mathbf{R}^{n\times r}_{r}$；$Q=CC^T$，（$A$，$C^T$）可观测是概率为1事件，因此上述分解得到的系统（$A$，$B$，$C^T$）是最小阶系统的概率为1。（证毕）

从定理1证明可以看出，只要（C_2）有正定解就可推出Riccati方程（3.2）有正定解，而（3.2）有正定解P是$u=K^Tx$为系统（1.3）最优控制的一个充分条件[4]。所以我们可以减弱（P_1）中$C\in\mathbf{R}^{n\times r}_{r}$的列数必须与$\tilde{A}$的循环指数一致的限制，但分解后的系统不一定是最小阶的。下面我们将问题（P_1）推广为(P_2)：

（P_2）给定一个自由系统

$$\dot{x}=\tilde{A}x$$

与一个性能指标

$$J=\int_0^\infty [x^TQx+u^Tu]dt$$

其中$\lambda(\tilde{A})\subset\mathbf{C}^0_-$，$Q=CC^T$，$C\in\mathbf{R}^{n\times m}_{m}$。问能否将$\tilde{A}$分解为：

$$\tilde{A}=A+BK^T$$

使对应反馈系统

$$\dot{x}=Ax+Bu,\quad u=K^Tx \tag{3.3}$$

刚好对应（3.3）确定的$J=\min$的最优系统。

问题（P_2）有解的关键在于Lyapunov方程：

$$P\bar{A}+\bar{A}^TP=-(CC^T+KK^T) \tag{3.4}$$

有正定解，为此我们证明下面引理。

引理 3 若 $(\bar{A},C^T)$ 不可观测，若不可观测子空间维数 $\dim\left[\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}(C^T\bar{A}^{i-1})\right]=1$，则存在 $K\in\mathbf{R}_l^{n\times l}$ 使 $\tilde{C}=(C,\ K)$ 对应 $(\bar{A},\tilde{C}^T)$ 完全可观测。

证明 由
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\tilde{C}^T\\ \vdots\\ \tilde{C}^T\bar{A}^{n-1}\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C^T\\ \vdots\\ C^T\bar{A}^{n-1}\\ K^T\\ \vdots\\ K^T\bar{A}^{n-1}\end{bmatrix}$$
$$=\operatorname{rank}(C,\ \bar{A}^TC,\cdots,\ (\bar{A}^T)^{n-1}C;\ K,\ \bar{A}^TK,\cdots,\ (\bar{A}^T)^{n-1}K)$$

及
$$\mathbf{R}^{\perp}(C,\bar{A}^TC,\cdots,(\bar{A}^T)^{n-1}C)=\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}[C^T\bar{A}^{i-1}]=\mathbf{T}$$
为不可观测子空间。

因此取 $\mathbf{R}(K,\cdots,\bar{A}^{n-1}K)=\mathbf{T}$ 可得：
$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}\tilde{C}^T\\ \vdots\\ \tilde{C}^T\bar{A}^{n-1}\end{bmatrix}=n \tag{3.5}$$

显然取 K 为 $\mathbf{T}$ 之一组基构成之 $n\times l$ 矩阵可使 (3.5) 式成立，因而得到 $(\bar{A},\tilde{C}^T)$ 完全可观测。

(证毕)

利用上述引理可得，必能取到 K 使Lyapunov方程 (3.4) 有正定解 P，令 $B=-P^{-1}K$，采用与定理 1 同样方法可证明下面定理 2。

定理 2 给定一渐近稳定系统 $\dot{x}=\bar{A}x$，则 $\forall C\in\mathbf{R}_m^{n\times m}$，$Q=CC^T$，均存在 $K\in\mathbf{R}_l^{n\times l}$ $\left(l\geqslant\dim\left\{\bigcap_{i=1}^{n}\operatorname{Ker}(C^TA^{i-1})\right\}\right)$ $B\in\mathbf{R}_l^{n\times l}$，使 $\bar{A}=A+BK^T$，且使下面系统：
$$\dot{x}=Ax+Bu$$
在指标
$$J=\int_0^{\infty}[x^TQx+u^Tu]dt$$
下的最优控制律为 $u=K^Tx$。

下面讨论分解 $\bar{A}$ 的算法（要求分解后得到最小阶系统）。

设给定 $\bar{A}$ 及指标权矩阵 $Q=CC^T$。

1° 任给 $K\in\mathbf{R}^{n\times r}$ 解 Lyapunov 方程 (2.3) 得 P_K；

2° 由 $B=-P_K^{-1}K$ 得 B；

3° 由 $A=\bar{A}-BK^T$ 得 A；

4° 验证 (A,B) 可控，(A,C^T) 可观测，若不满足对 $\dot{K}$，C 加一小扰动后就能保证 (A,B) 可控 $(A,\ C^T)$ 可观测。

例 设
$$\bar{A}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-2\end{bmatrix},\quad Q=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}(1,\ 1)$$

取$K=(1,\ 1)$经计算可得

$$P_K=\begin{bmatrix}1 & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$B=-P_K^{-1}K^T=-\begin{bmatrix}9 & -12\\ -12 & 18\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ -6\end{bmatrix}$$

$$A=\bar{A}-BK^T=\begin{bmatrix}-4 & -3\\ 6 & 4\end{bmatrix}$$

不难验证（A,B）可控，（A,C）可观测。并且有$\dot{x}=Ax+Bu$，$u=K^Tx$是使

$$\int_0^\infty\left(x^T\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}x+u^Tu\right)dt=\min$$

的最优控制系统。

四、几 点 讨 论

1．从前面的分析看出，从渐近稳定系统分解出最优反馈尽管方法只有一种（从K做分解）但结果并不唯一。几乎对 u 中所有K均可做分解$\bar{A}=A+BK^T$。由于指标J与初值x_0及K有关，会产生下面的问题：K在u中变化时是否有$K_0\in$u使$J(K_0)$取极小值，从而得到某种分解的唯一性。我们下面分析J与K的关系。

$$\begin{aligned}V(x_0,K)&=\int_0^\infty(x^TQx+u^Tu)\,dt=\int_0^\infty(x^TQx+x^TKK^Tx)dt\\&=\int_0^\infty x_0^T\exp[\bar{A}^Tt](Q+KK^T)\exp[\bar{A}t]x_0dt\\&\geqslant x_0^T\int_0^\infty\exp[\bar{A}^Tt]Q\ \exp[\bar{A}t]dtx_0\end{aligned}$$

但$\forall K\in \mathbf{R}^{n\times r}$有

$$\left\|\int_0^\infty\exp[\bar{A}^Tt]KK^T\exp[\bar{A}t]dt\right\|_F\to 0,\ \text{当}\|K\|_F\to 0\text{时}$$

并且对于使（$\bar{A}$，K）不可观测的K可有x_0存在使得$K^T\exp[\bar{A}t]x_0\equiv 0$，因此从$J(x_0K)=\min$得到分解的唯一性是不可能的。

2．若能估计出u的范围，或者求出包含在u内的$\mathbf{R}^{n\times r}$中闭球的半径对于实际问题的求解是有帮助的，这可以进一步讨论。

3．本文的结果对于形如$\int_0^\infty(x^TQx+u^TRu)dt$的指标也成立，其中$R$为正定矩阵。

北京大学力学系的陈亮同志对本文提出了许多有益的建议和进行了有价值的讨论，作者在此深表感谢。

参 考 文 献

[1] Kalman, R. E., When is a linear control system optimal, *ASME, J. Basic Engineering*, Mar. (1964).

[2] Anderson, B. D. O., The inverse problem of optimal control, Rept. No. SEL-66-038 (TR. No. 6560-3), Standford Electronics Laboratories, Standford, Clif., May. (1966).

[3] Anderson, B. D. O., Nonlinear regulator theory and an inverse optimal control problem, *IEEE Trans. Automatic Control*, **AC**18, (1973).

[4] Wonham, W. M., *Linear Multivariable Control*, Spring-Verlag (1974).

[5] 黄琳、郑应平、张迪，李雅普诺夫第二方法与最优控制器分析设计问题，自动化学报，4 (1964).

[6] Hwang Ling (黄琳), Generating elements and controllability, *Proceeding of the Bilateral Meeting on Control Systems (P. R. C. and U. S. A.)*, Scientific Press, Beijing (1982).

[7] 黄琳，《控制与系统理论中的线性代数》，科学出版社，北京 (1983).

The Relationship between the Stability and the Optimality of Linear Systems——Another Kind of the Inverse Problem of Linear Optimal Control

Chen Xiao-lin　　Hwang Ling

(Department of Mechanics, Peking University, Beijing)

Abstract

Different from the inverse problem put forward by R. E. Kalman, another kind of inverse problem of linear optimal control is proposed and discussed in this paper, which is as follows: If an asymptotically stable system $\dot{x}=\tilde{A}x$ and a performance index $J=\int_0^\infty (x^TQx+u^Tu)dt$ are given, when can $\tilde{A}$ be decomposed into $\tilde{A}=A+BK^T$ so that the cotrol law $u=K^Tx$ is optimal for the system $\dot{x}=Ax+Bu$ and the index J ? This paper gives the solution for the problem and presents certain correspondence between the asymptotically stable system and the optimal system.