应用数学和力学，第6卷第2期（1985年2月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

非均匀双周期裂纹场的反平面问题

郝天护　程季达　俞嘉声

（华东纺织工学院）（北京建筑工程学院）（浙江大学）

（钱伟长推荐，1983年11月12日收到）

摘　要

本文从虎克定律与平衡方程出发，利用复变函数映象的理论，将裂纹发生的矩形区域保角变换到ζ平面的上半平面去。再根据H. И. 穆斯黑里什维利[1]的理论，对非均匀双周期裂纹场的反平面问题，我们求得闭合解，并推出了应力强度因子。

一、引　言

断裂力学自本世纪二十年代开始，迄今已有六十年的历史。但到目前为止，人们都集中注意力于有限个裂纹的问题，而很少注意到双周期裂纹和双周期非均匀裂纹场的反平面问题。

H. И. 穆斯黑里什维利[1]解决了当物体所占的域为一些直的裂纹的全平面的基本边界问题以及某些其他问题。对于这些问题，根据文献[1]可以假设弹性体所占之域S'为沿Ox轴上的n个线段$L_k=a_kb_k$（$k=1,2,\cdots,n$）而割开的全平面，此诸线段的集合我们表为L。

于是下列函数$\Phi(z)$与$\Psi(z)$在S'内全纯，包含无穷远点在内，对于充分大的$|z|$，则有：

$$\left.\begin{aligned}\Phi(z)&=\Gamma-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\\ \Psi(z)&=\Gamma'+\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right)\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

其中$(X,\ Y)$表示作用于裂纹L全体的边缘上的外力的合力；

$$\Gamma=B+iC,\ \ \Gamma'=B'+iC'\tag{1.2}$$

为常数量，并由下式确定：

$$B=\frac{1}{4}(N_1+N_2),\quad C=\frac{2\mu\varepsilon_\infty}{1+\kappa},\quad \Gamma'=-\frac{1}{2}(N_1-N_2)\exp(-2i\alpha)\tag{1.3}$$

其中N_1，N_2为主应力在无穷远之值，α为对应于N_1的主轴与Ox轴所成之角，而ε_∞为回转在无穷远之值。$\kappa=3-4\sigma$，$\mu=\dfrac{E}{2(1+\sigma)}$；$\sigma$，$E$分别为泊桑比和弹性模量。

引入函数：

$$\Omega(z)=\bar{\Phi}(z)+z\bar{\Phi}'(z)+\bar{\Psi}(z) \tag{1.4}$$

不难证明此函数在S'内也是全纯的．同样对于充分大的$|z|$，具有如下形状：

$$\Omega(z)=\bar{\Gamma}+\bar{\Gamma}'+\frac{\kappa(X+iY)}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z}+O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{1.5}$$

另一函数$\Psi(z)$，可以由式(1.4)直接求出：

$$\Psi(z)=\bar{\Omega}(z)-\Phi(z)-\bar{z}\Phi'(z) \tag{1.6}$$

由此，应力的表达式可以写成：

$$Y_y-iX_y=\Phi(z)+\Omega(\bar{z})-(z-\bar{z})\Phi'(z) \tag{1.7}$$

位移的表达式可以写成：

$$2\mu(u+iv)=\kappa\varphi(z)-\omega(\bar{z})-(z-\bar{z})\bar{\Phi}(z)+\text{const} \tag{1.8}$$

其中$\omega(z)=\int\Omega(z)dz$，$\varphi(z)$可由$\Phi(z)$来精确地确定．

利用上述方法，对于：

(1) 已给定作用于域S的边界L上的外力求物体平衡的第一基本问题；

(2) 已给定边界L上各点的位移，求物体平衡的第二基本问题；

(3) 在边界的一部分上给出位移，而在另一部分上给出作用的力等混合问题；

都可得出解答．

然而在实际工程中，例如在岩石力学[2]、混凝土结构力学[3]和固体力学[4]中，我们常常遇到双周期裂纹问题，这是一个特别困难的问题．В．В．Панасюк等人在他们的著作[5]中研究过，他们把问题化归为一个带椭圆函数的奇异积分方程，在假定缝距甚大的情况下得到了解答．实际上这种缝距甚大的假定，一般遇到较少，因而他们的解答在应用上受到一定的限制．有鉴于此，文献[6]利用函数边值条件求得了双周期裂纹场反平面问题的闭合解．本文的第二作者研究了文献[6]，并与第一作者讨论，进而求出了双周期非均匀裂纹场的反平面问题的闭合解及应力强度因子．

二、问题的提出及其考虑方法

设位移$u_x=u_y=0$，$u_z=f(x, y)$，则由虎克定律与平衡方程，我们有：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0 \tag{2.1}$$

所以$u_z=f(x, y)$是一个调和函数，设其共轭函数为$f_1(x, y)$，则$F(x+iy)=f(x, y)+if_1(x, y)$是一个在弹性平面内解析的函数[7]，且有：

$$F'(x+iy)=\frac{\partial f}{\partial x}-i\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial u_z}{\partial x}-i\frac{\partial u_z}{\partial y}=(\tau_{xz}-i\tau_{yz})/\mu \tag{2.2}$$

式中μ如前式所表达，是剪切模量，τ_{xz}，τ_{yz}分别为垂直Ox，Oy轴线的平面上z方向的剪应力．

现在提出的问题，是假设在图1所示的Oxy平面上，当无裂纹时作用着均布的$\tau_{xy}=q$．并设弹性平面上出现如图1所示的双周期非均匀裂纹场，我们来研究由裂纹出现而扰动了的应力场．在这种情况下，由于对称性，我们有：

(1) 在任何一根通过裂纹中心且垂直于裂纹的直线（如OQ）上$\tau_{xz}=0$，于是：

$$\frac{\partial u_z}{\partial x}=0;\quad \mathrm{Re}F'(z)=0$$

其中复变数$z=x+iy$

(2) 位于裂纹同一直线但又不在裂纹边上的点（如C）$\tau_{yz}=0$，于是有：

$$\frac{\partial u_z}{\partial y}=0;\quad \mathrm{Im}F'(z)=0$$

(3) 沿裂纹边缘；$\tau_{zx}=0$，于是有：

$$\frac{\partial u_z}{\partial x}=0;\quad \mathrm{Re}F'(z)=0$$

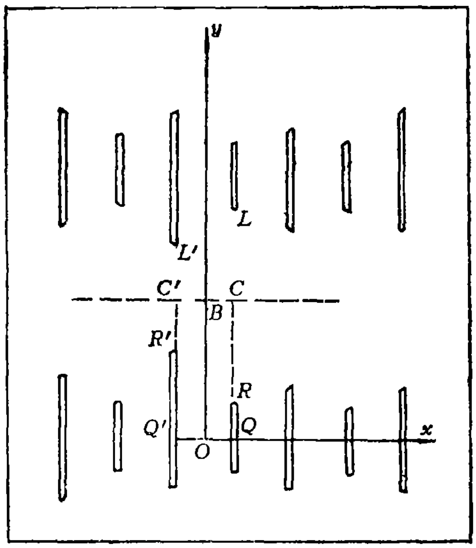

图 1

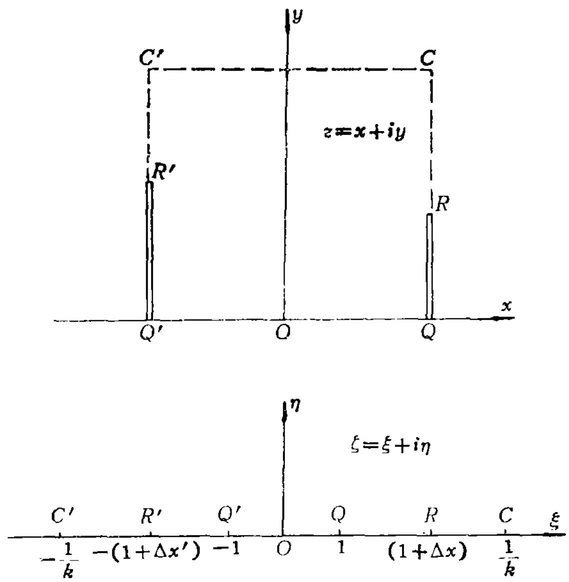

图 2

三、保 角 映 象

考虑到问题的双周期性，我们取一个矩形$QQ'C'C$来研究(图2)．正如前面所述，沿QQ'，$\mathrm{Re}F'(z)=0$；沿$Q'R'$和QR，则$\mathrm{Re}F'(z)=0$；沿CC'，则$\mathrm{Im}F'(z)=0$。

由于在矩形区域上研究不很方便，我们将此矩形区域保角变换到ζ平面的上半平面去．因此我们有以下关系：

$$\zeta=\mathrm{sn}\left(\frac{z}{A},\ k\right),\quad z=A\int_0^{\zeta}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} \tag{3.1}$$

其中z与ζ在两平面上的对应关系，参见图2。

若设$QQ'=b$，$Q'C'=QC=e$，则有：

$$\frac{b}{e}=\frac{2K(k)}{K(k')} \tag{3.2}$$

其中 $$K(k)=\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}};\quad k'^2=1-k^2 \tag{3.3}$$

由此即可求出$K(k)$和$K(k')$。再由$A=\dfrac{b}{2K(k)}=\dfrac{e}{K(k')}$的关系，可求出$A$。

在本文中有关椭圆函数一些简单性质，我们认为是大家所熟悉的，因此不作任何解释与证明，椭圆函数基本理论的研究，可参考文献[8]。

现在我们来研究$1+\Delta x$和$1+\Delta x'$的求法。设$RQ=g$，$R'Q'=g'$则R点的坐标为：

$$z=\frac{b}{2}+ig$$

同时，我们有：

$$\frac{b}{2}+ig=A\int_0^{1+\Delta x}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

考虑到 $2AK(k)=b$，我们有：

$$z=\frac{b}{2}+ig=A\left(\int_0^1\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}+i\int_1^{1+\Delta x}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}\right)$$

$$=AK(k)+Ai\int_1^{1+\Delta x}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

$$\therefore\qquad g=A\int_1^{1+\Delta x}\frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}$$

令 $t=\dfrac{1}{\sqrt{1-k'^2t_1^2}}$，$k'=\sqrt{1-k^2}$

于是有：$g=A\displaystyle\int_0^u\frac{dt_1}{\sqrt{(1-t_1^2)(1-k'^2t_1^2)}}$，$u=\dfrac{\sqrt{(1+\Delta x)^2-1}}{k'(1+\Delta x)}$

从而 $u=\mathrm{sn}(g/A,\ k')=\mathrm{sn}[gK(k')/e,\ k']$

故 $$1+\Delta x=[\mathrm{dn}(gK(k')/e,\ k']^{-1}\tag{3.4}$$

同理 $$1+\Delta x'=[\mathrm{dn}(g'K(k')/e,\ k']^{-1}\tag{3.5}$$

我们再来求$F'(z)$，我们知道：

$$F'\left[A\int_0^\zeta\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}\right]=F_1(\zeta)\tag{3.6}$$

故$F_1(\zeta)$在上半平面解析，且沿$O\xi$，有：

在$[-(1+\Delta x'),\ -1]$，$[1,\ (1+\Delta x)]$上，$\mathrm{Re}F_1(\xi)=0$

在$O\xi$的其余部分上（个别点除外），$\mathrm{Im}F_1(\xi)=0$。

四、解析延拓

现在，我们把$F_1(\zeta)$延拓到全平面上去，为此，我们定义在下半平面$F_1^{(l)}(\zeta)=\overline{F_1(\bar\zeta)}$。故沿$O\xi$，$F_1^{(l)}(\xi)=\overline{F_1^{(u)}(\xi)}$。在$\mathrm{Im}F_1^{(u)}(\xi)=0$的线段上，我们有关系式：

$$F_1^{(u)}(\xi)=\overline{F_1^{(u)}(\xi)}=F_1^{(l)}(\xi)$$

故沿这些线段，$F_1^{(u)}(\zeta)$就延拓到下半平面了，在$\mathrm{Re}F_1^{(u)}(\xi)=0$的线段上，我们有：

$$F_1^{(u)}(\xi)=-F_1^{(l)}(\xi)$$

由于$\zeta=\infty$与z平面上的B点对应，而在该处$\tau_{yz}=0$，$\tau_{xz}=c$，此处c为未知常数，故

$$\lim_{\zeta\to\infty}F_1(\zeta)=c/\mu$$

在z平面的QQ'处，即$\zeta=\pm1$处，τ_{xz}，τ_{yz}显然有界，由此可知$F_1(\zeta)$亦必有界。

如果我们再研究函数$F_1(\zeta)[(1+\Delta x)-\zeta]^{\frac{1}{2}}[(1+\Delta x')+\zeta]^{\frac{1}{2}}(1-\zeta^2)^{-\frac{1}{2}}$，我们就会发现它沿整个实轴$O\xi$(除个别点外)虚部为零，且此函数除个别点外在整个平面解析。在$\zeta=\pm1$处，由于$F_1(\zeta)$在这里有界，故它最多是1/2阶奇性，不难证明它有两个可去奇点。在$\zeta=1+\Delta x$，$\zeta=-(1+\Delta x')$处，若设$F_1(\zeta)\leqslant\dfrac{A}{|\zeta-c|^\mu}$，$A>0$，$0<\mu\leqslant1$，$c$为$(1+\Delta x)$或为$-(1+\Delta x')$，则此函数最多也只有1/2阶奇性，同样可证明它也有两个可去奇点。故在$O\xi$上适当定义函数后：

$F_1(\zeta)[(1+\Delta x)-\zeta]^{\frac{1}{2}}[(1+\Delta x')+\zeta]^{\frac{1}{2}}[1-\zeta^2]^{-\frac{1}{2}}$在全平面全纯且在$\infty$为一常数，故

$$F_1(\zeta)[(1+\Delta x)-\zeta]^{\frac{1}{2}}[(1+\Delta x')+\zeta]^{\frac{1}{2}}[1-\zeta^2]^{-\frac{1}{2}}=c_0$$

$$\therefore\qquad F_1(\zeta)=c_0\sqrt{\frac{1-\zeta^2}{[(1+\Delta x)-\zeta][(1+\Delta x')+\zeta]}}\tag{4.1}$$

在式(4.1)中，c_0必须确定，现在来讨论它。如前所述，当无裂纹时Oxy平面有强度为q的剪流，即$\tau_{xz}=q$。出现裂纹后，它只能沿RL，$R'L'$通过（见图1），故

$$\int_R^C\tau_{xz}dy=qe$$

我们在ζ平面上计算：

$$\mu\int_{1+\Delta x}^{\frac{1}{k}}F_1(\xi)\frac{Ad\xi}{\sqrt{(\xi^2-1)(1-k^2\xi^2)}}=qe$$

$$c_0=\frac{qe}{\mu K(k_1')A}=\frac{qK(k')}{\mu K(k_1')}$$

$$k_1'=\frac{\mathrm{cn}\left[\frac{g}{e}K(k'),\ k'\right]}{\mathrm{dn}\left[\frac{g}{e}K(k'),\ k'\right]}$$

$$\therefore\quad F_1(\zeta)=\frac{qK(k')}{\mu K(k_1')}\sqrt{\frac{\zeta^2-1}{[\zeta-(1+\Delta x)][\zeta+(1+\Delta x')]}}\tag{4.2}$$

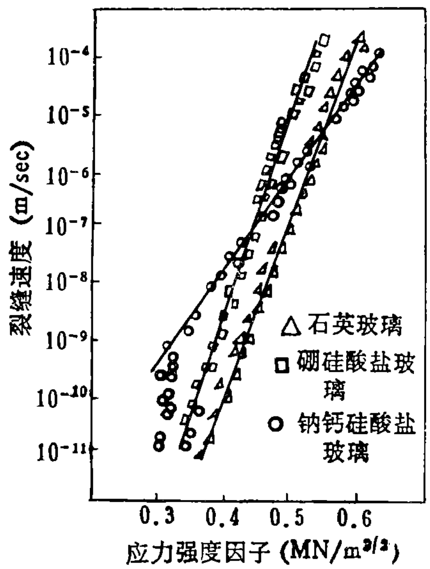

图 3

同时，我们不难求出应力强度因子如下：

令 $\dfrac{g'}{e}K(k')=L'$，$\dfrac{g}{e}K(k')=L$

$$\frac{q}{K(k_1')}\sqrt{\frac{2eK(k')\mathrm{dn}(L,\ k')\mathrm{dn}(L',\ k')}{\mathrm{dn}(L,\ k')+\mathrm{dn}(L',\ k')}}=M$$

则应力强度因子为：

$$K_{\mathrm{III}R}=M\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(L,\ k')}{\mathrm{cn}(L,\ k')}},\quad K_{\mathrm{III}R'}=M\sqrt{\frac{\mathrm{sn}(L',\ k')}{\mathrm{cn}(L',\ k')}}$$

式中R，R'为裂纹端（参见图1）。

应力强度因子与裂纹速度之间存在图3所示的关系[9]。

为校验公式的正确性，我们取极限；令$k=1$，$k'=0$，$K(k')=\frac{\pi}{2}$，$g=g'$，于是

$$K_{\mathrm{III}}=q\sqrt{\frac{2e}{\pi}\mathrm{tg}\frac{\pi g}{2e}}$$

与熟知的公式相同。

参 考 文 献

[1] Н. И. 穆斯黑里什维利，《数学弹性力学的几个基本问题》，赵惠元译，科学出版社 (1965).

[2] Lawn, B. R. and T. R. Wilshaw, Fracture of Brittle Solids, Combridge University Press (1975).

[3] Navs, D. J. and Lott, Fracture toughness of portland cement concretes, *J. Amer, Conr. Inst.*, 66 (1969), 481.

[4] Shie, J., Quantum reaction in solids, Thesis, Dept. of Materials Science, State University of New York at Stony Brook (1977).

[5] Панасюк В. В. et. al., *Распередегение Напряжения Окого Трещин в Пластинах и Обогочках*, Киев «Наукова Думка», Акад. Наук УССР Физ-Механ. ИН-Т (1976), 443.

[6] 郝天护，双周期裂缝反平面问题的一个闭合解，清华大学学报，19，3 (1979).

[7] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社 (1956)，165—172.

[8] Prasad, Ganesh, An introduction to the theory of elliptic functions and higher transcendentals, University of Calcutta (1948).

[9] Wiederhorn, S. M. and H. Johnson, Effect of electrolyte PH on crack propragation in glass, *J. Am. Cerram. Soc.*, 56 (1973), 192.

The Antiplane Problem of Double Period Non-Uniform Distribution Crack Field

Hao Tian-hu

(East China Institute of Textile Science and Technology, Shanghai)

Cheng Ji-da

(Beijing College of Civil Engineering, Beijing)

Yu Jia-sheng

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

Originating from Robert Hooke's law and equilibrious equations, and using the theory of the complex variable function, this paper transfers the rectangle region in which the cracks emerge into the upper-half part of ζ plane by means of conformal mapping. Then according to the theory of reference [1], we have found the solution in closed form, thereby the stress intensity factors are derived.