应用数学和力学，第6卷第1期（1985年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

有限变形下理想刚-塑性体动力学中的两个间断定理*

黄 筑 平

（北京大学，1984年4月1日收到）

摘 要

本文推广了文献[1]中的结论，在有限变形下证明了理想刚-塑性动力学中的两个间断定理，即证明了刚-塑性交界面上面力的连续性以及当刚-塑性交界面的运动方向是由塑性区向刚性区扩展时界面上变形率的连续性。此结论也适用于不忽略剪切变形和转动惯量的梁、板、壳结构。

一、引 言

在连续介质力学中，对间断性质的研究一直是一个十分重要而有兴趣的课题。早在1903年，Hadamard 就对相容性条件作出过开创性工作。相容性条件是讨论间断函数在几何学上和运动学上的性质，并不涉及具体的物理规律和材料性质。许多学者在这方面都已作过大量的工作（例如可参见[2]）。另一类间断条件则与质量守恒、动量守恒等物理规律有关，这些条件被称为动力学间断条件，它们在连续介质力学中也是普遍适用的并为人们所熟知。然而，如果要对间断性质作更为深入的研究，仅仅局限于以上两个方面的讨论可能就不够了。这时还需要同时考虑材料的本构关系。

R. Hill 在文献[3]中曾对固体力学中的间断性质作过系统总结。他在讨论理想刚-塑性体的间断性质时采用了准静态假设。这相当于在运动方程中略去了惯性项。因此，面力的连续性是作为讨论问题的出发点而被提出的。事实上，在动力学中，对很多材料性质来说面力可以是不连续的。文献[1]曾证明在理想刚-塑性材料的动力分析中，面力确实是连续的。但由于该文作了小变形和体积不可压假定，使用起来仍不够方便。本文放弃了小变形和不可压假定，指出其结论也同样适用于有限变形的情形。

我们以 x^j 表示固定的空间坐标，X^A 表示物质坐标，随着物体的运动，则有关系：

$$x^i = x^i(X^A, t) \tag{1.1}$$

式中 t 表示时间。

在空间坐标中，运动方程为：

$$\sigma^{ij}{}_{;j} + F^i = \rho(\dot{v}^i + v^k v^i{}_{;k}) \tag{1.2}$$

---

* 郭仲衡推荐。

变形率可写为

$$d_{ij}=\frac{1}{2}\left(g_{ik}v^{k}{}_{;j}+g_{jk}v^{k}{}_{;i}\right) \tag{1.3}$$

其中 σ^{ij} 为 Cauchy 应力张量，v^i 为速度向量，g_{ij} 为坐标 x^j 的协变度量张量，体力 F^i 假设为时间 t 和空间坐标 x^j 的连续函数，ρ 为密度，逗号表示对空间坐标 x^j 的协变导数，点号表示对时间 t 的偏导数。

本构方程可写为：

$$d_{ij}=\begin{cases}\lambda\dfrac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}} & (\lambda\geqslant 0)\ \text{当}\ \Phi(\sigma^{ij})=0,\ d\Phi=0\\ 0 & \text{当}\ \Phi(\sigma^{ij})<0\ \text{或}\ \Phi(\sigma^{ij})=0,\ d\Phi<0\end{cases} \tag{1.4}$$

上式中屈服面Φ是应力 σ^{ij} 的凸函数。

如果一个物质点的应力状态已经在屈服面上，由于在下一时刻其应力状态不可能超出屈服面，故此时就有关系：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\cdot\frac{d\sigma^{ij}}{dt}=\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\cdot\left(\dot{\sigma}^{ij}+v^k\sigma^{ij}{}_{,k}\right)\leqslant 0 \tag{1.5}$$

现设物体V由刚性区V^-和塑性区V^+组成，刚-塑性交界面为Σ，其单位法向量n^j由刚性区V^-指向塑性区V^+。当以 $y^\alpha(\alpha=1,2)$表示曲面Σ的参数，以 $\bar{g}^{\alpha\beta}$ 表示曲面Σ 的逆变度量张量时，我们可有公式[3]：

$$\frac{\partial}{\partial x^j}=g_{jk}n^k\frac{\partial}{\partial n}+g_{jk}\bar{g}^{\alpha\beta}\frac{\partial x^k}{\partial y^\beta}\frac{\partial}{\partial y^\alpha} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}=-G\frac{\partial}{\partial n}+\frac{\delta}{\delta t} \tag{1.7}$$

这里 $\dfrac{\partial}{\partial n}=n^j\dfrac{\partial}{\partial x^j}$ 是沿曲面Σ的法向导数，$\dfrac{\delta}{\delta t}$ 是运动界面Σ的 δ 时间导数[4]，G 是在空间坐标中Σ的法向速度分量。类似于文献[1]，我们可以利用（1.6）式和（1.7）式来表示基本方程（1.2）式至（1.5）式。特别当应力 σ^{ij} 和速度 v^i 在Σ上有间断时，便可设想在Σ上有一个厚度为 h 的薄层过渡区，此区域使应力和速度及其导数成为连续，实际的强间断应理解为当 h 趋于零时的极限情形。这样，当 h 很小时，在薄层内的基本方程（1.2）式、（1.3）式和（1.5）式就可相应地写为：

$$n_j\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}=\bar{\rho}\left(-G+v^kn_k\right)\frac{\partial v^i}{\partial n} \tag{1.8}$$

$$d_{ij}=\frac{1}{2}\left(g_{ik}n_j\frac{\partial v^k}{\partial n}+g_{jk}n_i\frac{\partial v^k}{\partial n}\right) \tag{1.9}$$

和

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\left(-G+v^kn_k\right)\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\leqslant 0 \tag{1.10}$$

上式中 $\bar{\rho}$ 表示薄层内的密度，$n_j=g_{jk}n^k$。

如果我们把刚性区V^-中的物理量标以“－”号，把塑性区 V^+中的物理量标以“＋”号，把越过Σ的某物理量 z 的间断值记为$[z]$，则由质量守恒定理可得到：

$$\left[\left(-G+v^kn_k\right)\rho\right]=0 \tag{1.11}$$

类似地，由动量守恒定理可得到：

$$[\sigma^{ij}]n_j=(-G+v_+^k n_k)\rho^+[v^i] \tag{1.12}$$

(1.11) 式和 (1.12) 式适用于任何材料，是为大家所熟悉的.

二、两个间断定理

在静力学中，公式$[\sigma^{ij}]n_j=0$显然是成立的，但在动力学中，此式一般并不成立。然而，对于理想刚-塑性体，我们可有如下定理.

定理 1 在刚-塑性交界面上，公式 $[\sigma^{ij}]n_j=0$始终成立.

证明 这相当要证明 (1.12) 式右端等于零，即当$-C_+=-G+v_+^k n_k\neq 0$时，必然有$[v^i]=0$。

现采用反证法，即假定同时有$-C_+\neq 0$和$[v^i]\neq 0$。

这时，由 (1.12) 式可见应力和速度在Σ上有强间断。故可设想在Σ上有一个厚度为h的薄层过渡区，在此区域内我们可以利用 (1.8) 式至 (1.10) 式.

这里有两点要加以说明：i) 因为密度ρ恒大于零，故由 (1.11) 式可知也有$-C_-=-G+v_-^k n_k\neq 0$，而且C_-与C_+同号。这样，在薄层过渡区内的$\bar{C}=G-v^k n_k$也不为零，其中$\bar{C}$表示刚-塑性交界面Σ相对于薄层内介质质点的法向速度。ii) 由于速度在Σ上有强间断，故在薄层内变形率不为零，因此 (1.10) 式是可以利用的.

在薄层内，本构关系可写为：

$$\frac{1}{2}\left(g_{ik}n_j\frac{\partial v^k}{\partial n}+g_{ik}n_i\frac{\partial v^k}{\partial n}\right)=\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}} \tag{2.1}$$

由假定可知，此处λ大于零，且当$h\to 0$时$\lambda\to\infty$.

将 (1.10) 式改写为

$$-\bar{C}\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\leqslant 0,$$

再利用 (2.1) 式和 (1.8) 式，就得：

$$\begin{aligned}&-\frac{\bar{C}}{2}\left(g_{ik}n_j\frac{\partial v^k}{\partial n}+g_{jk}n_i\frac{\partial v^k}{\partial n}\right)\cdot\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\\&=\frac{1}{2}\bar{\rho}\cdot\bar{C}^2\left(g_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial n}\frac{\partial v^i}{\partial n}+g_{jk}\frac{\partial v^k}{\partial n}\frac{\partial v^j}{\partial n}\right)\\&=\bar{\rho}\cdot\bar{C}^2\cdot g_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial n}\frac{\partial v^i}{\partial n}\leqslant 0.\end{aligned}$$

由于$\bar{\rho}\bar{C}^2>0$和$g_{ik}\frac{\partial v^k}{\partial n}\cdot\frac{\partial v^i}{\partial n}\geqslant 0$，故必然有$\frac{\partial v^k}{\partial n}=0$。但这与假定是矛盾的。说明当$-C_+\neq 0$时一定有$[v^i]=0$。于是定理得证.

现讨论理想刚-塑性体的第二个性质。我们知道，在理想刚-塑性体的静力学中，即使其应力和速度是连续的，也同样可能产生变形率的间断[3]，但在动力学中，则有如下定理.

定理 2 如果刚-塑性交界面Σ的运动方向是由塑性区向刚性区扩展，即当$-C_+=-G+v_+^k n_k>0$时，则对严格凸屈服面材料，必然有$[d_{ij}]=0$。

证明：因为若$-C_+\neq 0$，则由定理一可知此时必然有$[v^k]=v_+^k-v_-^k=0$。这样，界面Σ左右两侧的速度向量可以不加区分：$v_+^k=v_-^k=v^k$。同样，$-C_+$和$-C_-$也可不加区分而在以

后的讨论中记之以$-C$。另外，由（1.11）式立即可知界面上的密度ρ也是连续的。

根据速度向量的连续性和（1.6）式，变形率的间断值可写为：

$$d_{ij}^{+}=[d_{ij}]=\frac{1}{2}\left(g_{ik}n_j\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]+g_{jk}n_i\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]\right) \tag{2.2}$$

再由$[\sigma_{ij}]n_j=0$，可知：

$$[\sigma^{ij}][d_{ij}]=\frac{1}{2}([\sigma^{ij}]n_jg_{ik}+[\sigma^{ij}]n_ig_{jk})\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]=0 \tag{2.3}$$

现在我们可用反证法来证明本定理，即假定$[d_{ij}]$不为零。那么，对于严格凸的屈服面Φ，由（2.3）式就必然有$[\sigma^{ij}]=0$[3]。这表明应力在Σ上是连续的且都在屈服面Φ上。此外，由于在塑性区V^+内的物质点的应力状态永远在屈服面上而在刚性区V^-内的物质点的应力状态或在屈服面内或在屈服面上，当选取在t时刻的物质坐标X^A和空间坐标x^j相重合时，由Σ两侧的关系式：

$$\left(\frac{\partial\Phi(\sigma^{ij})}{\partial n}\right)^-=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\right)^-\left(\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\right)^-\geqslant 0,\quad \left(\frac{\partial\Phi(\sigma^{ij})}{\partial n}\right)^+=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\right)^+\left(\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\right)^+=0$$

和
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\right)^-=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\right)^+=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\right)$$

便可得：
$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\right)\left[\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\right]\leqslant 0 \tag{2.4}$$

由于应力连续，故利用（1.6）式后就有

$$[\sigma^{i}{}_{;j}]=n_j\left[\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\right]$$

再由速度和密度的连续性，故利用（1.6）式和（1.7）式后，就有

$$\left[\rho\frac{dv^i}{dt}\right]=\rho(-G+v^kn_k)\left[\frac{\partial v^i}{\partial n}\right]$$

因此，当体力在Σ上连续时，运动方程（1.2）式便可写为：

$$n_j\left[\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\right]=-\rho C\left[\frac{\partial v^i}{\partial n}\right] \tag{2.5}$$

上式中$-C=-G+v^kn_k>0$。

因为假定$[d_{ij}]\neq 0$，所以在界面Σ的塑性区V^+一侧，其本构方程

$$d_{ij}^{+}=\frac{1}{2}\left(g_{ik}n_j\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]+g_{jk}n_i\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]\right)$$

$$=\lambda^+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\right)^+=\lambda^+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\right) \tag{2.6}$$

中的λ^+应该大于零。（若$\lambda^+=0$，则定理结论已经成立）。

这样，由（2.4）式至（2.6）式便知：

$$\lambda^+\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma^{ij}}\right)\left[\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\right]=\frac{1}{2}\left(g_{ik}n_j\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]+g_{jk}n_i\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]\right)\left[\frac{\partial\sigma^{ij}}{\partial n}\right]$$

$$=-\frac{1}{2}\rho C\left(g_{ik}\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]\left[\frac{\partial v^i}{\partial n}\right]+g_{jk}\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]\left[\frac{\partial v^j}{\partial n}\right]\right)$$

$$= -\rho C \cdot g_{ik}\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]\left[\frac{\partial v^i}{\partial n}\right] \leqslant 0.$$

由于$-\rho C>0$，因此上式要求$g_{ik}\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]\left[\frac{\partial v^i}{\partial n}\right]\leqslant 0$，这只可能有$\left[\frac{\partial v^k}{\partial n}\right]=0$。故由（2.2）式可得：$[d_{ij}]=0$。定理得证。

三、结　　论

以上间断定理不仅具有理论意义，而且在实际计算中也是十分重要的。例如，在不忽略剪切变形和转动惯量的梁、板、壳结构的刚-塑性动力分析中，往往可以分别得到刚性区和塑性区内解的形式，其相应的待定系数就要由刚-塑性交界处的间断关系来确定。上述定理就为合理给出这些关系提供了依据。文献[5]曾对小变形下的理想刚-塑性 Timoshenko 梁的动力响应问题进行了计算。该文利用上述定理不仅考虑了刚性区扩大，而且还考虑了塑性区扩大的情形。

另外，定理一的结论同样也适用于两侧都是塑性区的界面。故对分片线性屈服面，如果其一侧的应力状态在屈服面的角点上，另一侧的应力状态在屈服面的边界上时，其面力在这两个区域的交界处仍然是连续的。在小变形分析中，N. Jones 等[6~8]曾计算过不忽略剪切变形和转动惯量的梁、板、壳结构，当分别采用方形、六棱柱体和立方体屈服面时，所遇到的正是这种情形。

作者得到王仁教授的指导，郭仲衡教授和陈文芳教授对本文给予了很多帮助，特此致谢！

参 考 文 献

[1] 黄筑平，理想刚-塑性动力分析中的间断性质，力学学报，5 (1983)，500—508.

[2] Thomas, T. Y., The general theory of compatibility conditions, *Int. J. Engng. Sci.*, **4**, 3 (1966), 207—233.

[3] Hill, R., Discontinuity relations in mechanics of solids, *Progress in Solid Mechanics*, Vol. II, (1961), 247—276.

[4] Thomas, T. Y., *Plastic Flow and Fractures in Solids*, Academic Press, New York, (1961).

[5] 金泉林，理想刚-塑性 Timoshenko 梁动力响应的分析解，力学学报，**16**, 5(1984),504—511.

[6] Jones, N. and J. G. de Oliveira, The influence of rotatory inertia and transverse shear on the dynmic plastic behavior of beams, *J. Appl. Mech.*, **46**, (1979), 303—310.

[7] Jones, N. and J. G. de Oliveira, Dynamic plastic response of circular plates with transverse shear and rotatory inertia, *J. Appl. Mech.* **47**, (1980), 27—34.

[8] Jones N. and J. G. de Oliveira, Impulsive loading of a cylindrical shell with transverse shear and rotatory inertia, *Int. J. Solids Structures*, **19**, 3 (1983), 263—279.

Two Theorems Concerning Discontinuities in Dynamics of Rigid-Perfectly Plastic Continua under Finite Deformation

Huang Zhu-ping

(*Peking University, Beijing*)

Abstract

In this paper the results of ref. [1] are generalized. Two theorems concerning discontinuities in dynamics of rigid-perfectly plastic continua under finite deformation are proved, namely: i) the traction on the interface between the rigid and the plastic regions is continuous and ii) when the interface moves from the plastic region into the rigid region, the rate of deformation is continuous, too. These conclusions can also be applied to structures such as beams, plates and shells, in which the shear deformation and rotatory inertia are considered.