

文章编号: 1000-0887(2004)11-1117-07

# 组合超弹性球体中空穴的动态生成<sup>\*</sup>

任九生, 程昌钧

(上海大学 力学系, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(本刊编委程昌钧来稿)

**摘要:** 根据有限变形动力学理论, 研究了一个不可压超弹性材料组合球体在突加表面均布拉伸载荷作用下空穴的动态生成问题。当外加载荷超过其临界值时, 除一个平凡解外, 还有一个包含着球体内部生成的空穴的分叉解; 证明空穴随时间的演化是周期性的非线性振动; 同时给出了空穴生成时的临界载荷值、空穴振动的相图、振幅及近似的周期。

**关键词:** 组合不可压超弹性材料; 有限变形动力学; 空穴的动态生成; 非线性周期振动

中图分类号: O343 文献标识码: A

## 引 言

Gent 和 Lindley<sup>[1]</sup> 于 1958 年在橡胶材料实验中观察到了超弹性材料中空穴的突然生成现象。1965 年 Williams 和 Schapery 也观察到类似的现象。固体力学关于超弹性材料中空穴分叉问题的非线性理论以 1982 年 Ball<sup>[2]</sup> 的工作为基础, Horgan 和 Polignone<sup>[3]</sup> 对超弹性材料中空穴生成问题做了一个综述性评论, 包括均匀和非均匀、各向同性和各向异性的可压和不可压材料。任和程<sup>[4, 5]</sup> 分析了可压和不可压材料中空穴的生成问题。关于超弹性材料中的动力学问题, Knowles<sup>[6]</sup>、Guo 和 Solecki<sup>[7]</sup>、Calderer<sup>[8]</sup> 等分析了不可压空心圆柱、球体和球壳的振动问题, 他们着重分析了产生周期性运动的条件及运动的周期。Chou Wang 和 Horgan<sup>[9]</sup> 分析了 neo-Hookean 材料球体受到表面突加均布拉伸载荷作用时空穴的动态生成问题。任和程<sup>[10, 11]</sup> 分析均匀的及横观各向同性的球体中空穴的动态生成问题。他们指出外加载荷大于其临界值时, 球体中存在含有一个内部空穴的分叉解, 且该解相应于周期性的运动。本文的目的是根据有限变形动力学理论, 研究组合不可压超弹性材料中空穴的动态生成问题。对任意大小的外加载荷, 组合球体中总存在一个平凡解, 这时球体中虽然有应力产生但仍保持未变形的状态。但当外加载荷大于某一临界值时, 球体中存在含有一个突然生成的空穴分叉解, 得到了空穴半径和外加载荷的精确的微分关系, 证明该解相应的运动是周期性的非线性振动。根据空穴半径满足的二阶非线性常微分方程求得了空穴半径和其速度的关系, 给出了空穴生成

\* 收稿日期: 2003\_02\_20; 修订日期: 2004\_05\_28

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272069); 上海市重点学科建设资助项目

作者简介: 任九生(1970—), 男, 河南济源人, 博士(E-mail: jsren@mail.shu.edu.cn);

程昌钧(联系人, Tel: + 86\_21\_56331454; + 86\_21\_56380560; Fax: + 86\_21\_56380560; E-mail: chjcheng@mail.shu.edu.cn)。

时外加载荷的临界值, 空穴振动的相图、振动的振幅及近似的周期。

## 1 问题的数学描述

考察一个半径为  $b$ , 且在半径为  $a$  ( $a < b$ ) 的球面处由两种不可压 Valanis\_Landel 材料组合而成的球体在表面突加均布的径向拉伸死载荷  $p_0$  作用下的有限变形动力学问题。设球体的两部分粘合在一起并满足径向位移和径向应力的连续性条件, 设变形前组合球体所占区域为球坐标系中的  $D_0 = \{(R, \Theta, \Phi) \mid 0 \leq R < b, 0 < \Theta < 2\pi, 0 < \Phi \leq \pi\}$ , 并设变形前球体中位于  $(R, \Theta, \Phi)$  的点在时刻  $t$  运动到的  $(r, \theta, \varphi)$  的位置, 则球体的运动可表示为

$$\begin{cases} r^{[ij]} = r^{[ij]}(R, t) > 0; r(0^+, t) \geq 0, \\ \theta^{[ij]} = \Theta^{[ij]}, \varphi^{[ij]} = \Phi^{[ij]} \quad (i = 1, 2). \end{cases} \quad (1)$$

式中,  $r^{[ij]}(R, t)$  为两个待定函数。如没有特殊声明, 当  $0 \leq R \leq a$  时,  $[ij] = 1$  表示与内球体相关的量; 当  $a \leq R \leq b$  时,  $[ij] = 2$  表示与外球壳相关的量。当  $r(0^+, t) = 0$  时, 球体中没有空穴生成, 当  $r(0^+, t) > 0$  时, 有空穴生成现象。

相应的变形梯度张量为

$$\mathbf{F}^{[ij]} = \text{dig} \left[ \frac{\partial r^{[ij]}(R, t)}{\partial R}, \frac{r^{[ij]}(R, t)}{R}, \frac{r^{[ij]}(R, t)}{R} \right] = \text{dig}(\lambda_R^{[ij]}, \lambda_\Theta^{[ij]}, \lambda_\Phi^{[ij]}), \quad (2)$$

这里,  $\lambda_R = \partial r^{[ij]}(R, t) / \partial R$ ,  $\lambda_\Theta = \lambda_\Phi = r^{[ij]}(R, t) / R$  为相应的主伸长。

由材料的不可压缩性条件可得

$$r^{[ij]} = r^{[ij]}(R, t) = \sqrt[3]{R^3 + c^{[ij]^3}(t)}, \quad c^{[ij]}(t) \geq 0, t \geq 0, \quad (3)$$

式中,  $c^{[ij]}(t)$  (空穴的半径) 为时间的待定函数。利用径向位移的连续性条件

$$r^{[1]}(a, t) = r^{[2]}(a, t) \quad (4)$$

可得  $c^{[1]}(t) = c^{[2]}(t)$ , 因此,  $r^{[1]}(R, t) = r^{[2]}(R, t) = r(R, t) = \sqrt[3]{R^3 + c^3(t)}$ 。于是, 有

$$\lambda_R = \left[ 1 - \left[ c(t)/r \right]^3 \right]^{2/3}, \quad \lambda_\Theta = \lambda_\Phi = \left[ 1 - \left[ c(t)/r \right]^3 \right]^{-1/3}. \quad (5)$$

相应的非零 Cauchy 应力张量为

$$\begin{cases} \tau_r^{[ij]}(r, t) = \lambda_R \partial W / \partial \lambda_R - p^{[ij]}(r, t), \\ \tau_{\theta\theta}^{[ij]}(r, t) = \tau_{\varphi\varphi}^{[ij]}(r, t) = \lambda_\Theta \partial W / \partial \lambda_\Theta - p^{[ij]}(r, t), \end{cases} \quad (6)$$

式中,  $p^{[ij]}(r, t)$  为待定的静水压力函数。

不可压 Valanis\_Landel 材料的应变能函数可写为<sup>[12]</sup>

$$W^{[ij]} = 2\mu^{[ij]} \left[ \lambda_R^{[ij]} (\ln \lambda_R^{[ij]} - 1) + \lambda_\Theta^{[ij]} (\ln \lambda_\Theta^{[ij]} - 1) \lambda_\Phi^{[ij]} (\ln \lambda_\Phi^{[ij]} - 1) \right], \quad (7)$$

式中,  $\mu^{[ij]}$  为材料参数。于是, 相应的应力分量为

$$\begin{cases} \tau_r^{[ij]}(r, t) = 2\mu^{[ij]} \left[ 1 - \left[ c/r \right]^3 \right]^{2/3} \ln \left[ 1 - \left[ c/r \right]^3 \right]^{2/3} - p^{[ij]}(r, t), \\ \tau_{\theta\theta}^{[ij]}(r, t) = \tau_{\varphi\varphi}^{[ij]} = \\ 2\mu^{[ij]} \left[ 1 - \left[ c/r \right]^3 \right]^{-1/3} \ln \left[ 1 - \left[ c/r \right]^3 \right]^{-1/3} - p^{[ij]}(r, t). \end{cases} \quad (t \geq 0) \quad (8)$$

忽略体积力时, 应力分量满足的运动方程为

$$\frac{\partial \tau_r^{[ij]}}{\partial r} + \frac{2}{r} [\tau_r^{[ij]} - \tau_{\theta\theta}^{[ij]}] = \rho^{[ij]} \ddot{r} \quad (t \geq 0), \quad (9)$$

式中,  $\rho^{[ij]}$  为材料的密度。球体表面受突加死载荷  $p_0 > 0$  作用的边界条件为

$$\tau_{rr}^{[1]}(B, t) = 0 \quad (t < 0), \quad \tau_{rr}^{[2]}(B, t) = p_0 \left( \frac{b}{B} \right)^2 \quad (t \geq 0), \quad (10)$$

式中,  $p_0 > 0$  为给定的外加载荷,  $B = r(b, t) = \sqrt{b^3 + c^3(t)}$  为变形后的外边界. 如有空穴生成, 则空穴的边界条件为

$$\tau_{rr}^{[1]}(c, t) = 0, \quad c(t) > 0, \quad t \geq 0. \quad (11)$$

假设  $t = 0$  时球体处于自然状态, 则  $r(R, 0) = R, \dot{r}(R, 0) = 0$ . 故空穴半径的初始条件为

$$c(0) = 0, \quad \dot{c}(0) = 0. \quad (12)$$

径向应力的连续性条件为

$$\tau_{rr}^{[1]}(a, t) = \tau_{rr}^{[2]}(a, t). \quad (13)$$

因此, 问题是对给定的突加死荷载  $p_0 > 0$ , 求满足运动微分方程(9)、边界条件(10)、(11)、初始条件(12)及连接条件(13)的待定函数  $p^{[ij]}(r, t)$  和  $c(t) \geq 0$ . 如果存在  $c(t) > 0$  的解, 意味着球体中有一个半径为  $c$  的空穴生成, 它将随时间  $t$  而演化, 故问题有分叉解存在.

## 2 问题的求解

不难看出, 对任意的  $p_0 > 0$ , 问题总存在一个平凡解

$$p^{[ij]}(r, t) = -p_0, \quad c(t) = 0 \quad (t \geq 0). \quad (14)$$

该解对应于初始的未变形状态  $r(R, t) = R$ , 相应的应力状态为均匀应力状态, 即  $\tau_{rr}^{[ij]}(r, t) = \tau_{\theta\theta}^{[ij]}(r, t) = \tau_{\phi\phi}^{[ij]}(r, t) = p_0$ . 为寻求  $c(t) > 0$  的解, 将(8)代入运动方程(9)可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \left[ 2\mu^{[ij]} \left[ 1 - \left( \frac{c}{r} \right)^3 \right]^{2/3} \ln \left[ 1 - \left( \frac{c}{r} \right)^3 \right]^{2/3} - p^{[ij]}(r, t) \right] + \\ \frac{2\mu^{[ij]}}{r} \left[ \left[ 1 - \left( \frac{c}{r} \right)^3 \right]^{2/3} \ln \left[ 1 - \left( \frac{c}{r} \right)^3 \right]^{2/3} - \right. \\ \left. \left[ 1 - \left( \frac{c}{r} \right)^3 \right]^{-1/3} \ln \left[ 1 - \left( \frac{c}{r} \right)^3 \right]^{-1/3} \right] = \rho^{[ij]} \ddot{r}. \end{aligned} \quad (15)$$

将不可压缩性条件(3)对  $t$  微分两次可得

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = 2cr^{-5}(r^3 - c^3) \left( \frac{dc}{dt} \right)^2 + r^{-2} c^2 \frac{d^2 c}{dt^2}. \quad (16)$$

将(16)代入(15), 同时对  $r$  从  $c$  到  $t$  积分, 可得

$$\begin{aligned} 2\mu^{[ij]} \left[ 1 - \left( \frac{c}{r} \right)^3 \right]^{2/3} \ln \left[ 1 - \left( \frac{c}{r} \right)^3 \right]^{2/3} - p^{[ij]}(r, t) + p^{[ij]}(c, t) + J^{[ij]}(r) = \\ 2\rho^{[ij]} c \left[ \frac{dc}{dt} \right]^2 \left[ \frac{c^3}{4r^4} - \frac{1}{r} + \frac{3}{4c} \right] + \rho^{[ij]} c^2 \frac{d^2 c}{dt^2} \left[ \frac{1}{c} - \frac{1}{r} \right], \end{aligned} \quad (17)$$

式中,

$$J^{[1]}(r) = \mu^{[1]} \int_c^r \left[ \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{2/3} \ln \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{2/3} - \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{-1/3} \ln \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{-1/3} \right] \frac{ds}{s} \quad (0 \leq R \leq a),$$

$$J^{[2]}(r) = \mu^{[1]} \int_c^a \left[ \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{2/3} \ln \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{2/3} - \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{-1/3} \ln \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{-1/3} \right] \frac{ds}{s} + \mu^{[2]} \int_a^r \left[ \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{2/3} \ln \left[ 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right]^{2/3} - \right.$$

$$\left[1 - \left(\frac{c}{s}\right)^3\right]^{-1/3} \ln \left[1 - \left(\frac{c}{s}\right)^3\right]^{-1/3} \frac{ds}{s} \quad (a \leq R \leq b),$$

这里  $A = \sqrt{a^3 + c^3}$ . 代入(8)式可得

$$\begin{aligned} \tau_{rr}^{[ij]}(r, t) &= 2\rho^{[ij]} c \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 \left[\frac{c^3}{4r^4} - \frac{1}{r} + \frac{3}{4c}\right] + \\ &\rho^{[ij]} c^2 \frac{d^2c}{dt^2} \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{r}\right] - J^{[ij]}(r) - p^{[ij]}(c, t), \end{aligned} \quad (18)$$

将其代入(13)式可得

$$\begin{aligned} p^{[2]}(c, t) - p^{[1]}(c, t) &= 2(\rho^{[2]} - \rho^{[1]}) c \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 \left[\frac{c^3}{4A^4} - \frac{1}{A} + \frac{3}{4c}\right] + \\ &(\rho^{[2]} - \rho^{[1]}) c^2 \frac{d^2c}{dt^2} \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{A}\right]. \end{aligned} \quad (19)$$

代入(11)式可得  $p^{[1]}(c, t) = 0$ . 令(18)中  $r = r(b, t) = B = \sqrt{b^3 + c^3}$ , 并代入(10)可得

$$\begin{aligned} p_0 \left[1 + \left(\frac{c}{b}\right)^3\right]^{-2/3} &= 2\rho^{[2]} c \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 \left[\frac{c^3}{4B^4} - \frac{1}{B} + \frac{3}{4c}\right] + \\ &\rho^{[2]} c^2 \frac{d^2c}{dt^2} \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{B}\right] - 2(\rho^{[2]} - \rho^{[1]}) c \left(\frac{dc}{dt}\right)^2 \left[\frac{c^3}{4A^4} - \frac{1}{A} + \frac{3}{4c}\right] + \\ &(\rho^{[2]} - \rho^{[1]}) c^2 \frac{d^2c}{dt^2} \left[\frac{1}{c} - \frac{1}{A}\right] - J^{[2]}(B). \end{aligned} \quad (20)$$

这个关于  $c(t)$  的二阶非线性常微分方程(20) 给出了空穴半径  $c$  和外加荷载  $p_0$  之间的一个精确的关系. 给定外加荷载  $p_0$ , 由此可以得到空穴半径  $c(t)$  随时间的演化规律.

### 3 结果分析

为求解方程(20), 令

$$x(t) = c(t)/b, \quad (21)$$

$$\text{则有 } c(t) = bx(t), \quad \frac{dc}{dt} = b \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2c}{dt^2} = b \frac{d^2x}{dt^2}. \quad (22)$$

应用变换(21)可将(20)改写为

$$\begin{aligned} p_0(1 + x^3)^{-2/3} &= 2\rho^{[2]} b^2 x \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left[\frac{x^3}{4(1 + x^3)^{4/3}} - \frac{1}{(1 + x^3)^{1/3}} + \frac{3}{4x}\right] + \\ &\rho^{[2]} b^2 x^2 \frac{d^2x}{dt^2} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{(1 + x^3)^{1/3}}\right] - 2(\rho^{[2]} - \rho^{[1]}) b^3 x \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \left[\frac{b^3 x^3}{4A^4} - \right. \\ &\left. \frac{1}{A} + \frac{3}{4bx}\right] + (\rho^{[2]} - \rho^{[1]}) b^3 x^2 \frac{d^2c}{dt^2} \left[\frac{1}{bx} - \frac{1}{A}\right] - f(x). \end{aligned} \quad (23)$$

注意到  $J^{[2]}(b)$  是  $x$  的函数, 记为  $f(x)$ . 由(11)和(19)可知  $x(t)$  应满足的初始条件为

$$x(0) = 0, \quad dx(0)/dt = 0. \quad (24)$$

应用变换

$$v = \frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = v \frac{dv}{dx}$$

及如下关系

$$\frac{d}{dx} \left\{ x^4 v^2 \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(1 + x^3)^{1/3}} \right] \right\} = 4x^3 v^2 \left[ \frac{x^3}{4(1 + x^3)^{4/3}} - \frac{1}{(1 + x^3)^{1/3}} + \frac{3}{4x} \right] +$$

$$2x^4 v \frac{dv}{dx} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}} \right), \tag{25}$$

可将方程(23)改写为

$$\begin{aligned} & \rho^{2j} b^2 \frac{d}{dx} \left\{ x^4 v^2 \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}} \right] \right\} - \\ & (\rho^{2j} - \rho^{1j}) b^2 \frac{d}{dx} \left\{ x^4 v^2 \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(a^3+x^3)^{1/3}} \right] \right\} - 2x^2 f(x) = \\ & 2p_0 x^2 (1+x^3)^{-2/3}. \end{aligned} \tag{26}$$

将此式对变量  $x$  从零到  $x$  积分可得

$$\begin{aligned} 2p_0 \left[ (1+x^3)^{1/3} - 1 \right] &= \rho^{2j} b^2 x^4 v^2 \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(1+x^3)^{1/3}} \right] - \\ & (\rho^{2j} - \rho^{1j}) b^2 x^4 v^2 \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{(a^3+x^3)^{1/3}} \right] - g(x), \end{aligned} \tag{27}$$

式中

$$\begin{aligned} g(x) &= 8\mu^{1j} \int_0^x y^2 \int_{b_j}^A \left[ \left( 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right)^{2/3} \ln \left( 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right)^{2/3} - \right. \\ & \left. \left( 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right)^{-1/3} \ln \left( 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right)^{-1/3} \right] \frac{ds}{s} dy + \\ & 8\mu^{2j} \int_0^x y^2 \int_A^B \left[ \left( 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right)^{2/3} \ln \left( 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right)^{2/3} - \right. \\ & \left. \left( 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right)^{-1/3} \ln \left( 1 - \left( \frac{c}{s} \right)^3 \right)^{-1/3} \right] \frac{ds}{s} dy. \end{aligned}$$

根据振动理论, 当且仅当相图中  $xv$  的关系曲线是一条封闭曲线且有一个有限的周期  $\oint \frac{dx}{v}$  时, 运动  $x(t)$  是周期的. 对给定的  $p_0$ , 如果当  $v = 0$  时(27) 存在的  $x > 0$  的根, 则周期性运动  $x(t)$  就会产生. 在(27) 中令  $v = 0$  可得

$$p_0 \left( \sqrt[3]{1+x^3} - 1 \right) = -g(x). \tag{28}$$

对给定的  $p_0 > 0$ , 如果(28) 存在  $x > 0$  的根, 则这个根相应振动过程中空穴半径的最大值, 记作  $x_m$ . 此时, 球体内部有一个空穴生成且可以扩展, 直到达到其最大值  $x_m$ , 然后这个空穴会一定程度的缩减, 再重复进行这个循环过程.

对(28)进行数值求解时, 可先给定一个  $x > 0$  的值, 然后对其进行数值积分, 求得相应的载荷值  $p_0$ , 当  $x \rightarrow 0^+$  时即可得到  $p_0$  的临界值  $p_{cr}$ . 如当  $a/b = 0.3, 0.5, 0.7$  时,  $p_0$  的临界值分别为  $p_{cr}/\mu^{1j} = 2.12, 2.1, 2.08$ . 结果表明  $p_{cr}$  和  $\mu^{2j}$  没有关系, 即  $p_{cr}$  仅和内圆球体的材料性质和圆球体的几何尺寸有关. 相应于  $p_0 \geq p_{cr}$  的空穴半径的最大值  $x_m$  分别示于图 1(  $\mu^{2j} = 2\mu^{1j}$  ) 和图 2(  $\mu^{2j} = 0.5\mu^{1j}$  ). 可见, 在动力学意义下也可以有内部空穴的突然生成, 也存在一个空穴生成的临界载荷值. 对任意大小的载荷, 球体总有一个平凡解, 对应于球体的未变形状, 只有当外加载荷大于其临界值时, 球体中才会有一个空穴的突然生成.

对(27)进行数值积分, 可求得  $\mu^{2j} = 2\mu^{1j}, \rho^{2j} = 2\rho^{1j}$  时对应于不同的  $p_0 > p_{cr}$  或  $\mu^{2j} = 0.5\mu^{1j}, \rho^{2j} = 0.5\rho^{1j}$  时对应于不同的  $p_0 > p_n((x_n, p_n)$  是  $x_m p_0$  曲线的拐点, 见图 2 的空穴振动的相图, 即空穴的  $xv$  关系曲线.  $p_0/\mu^{1j} = 1.99, \mu^{2j} = 2\mu^{1j}, \rho^{2j} = 2\rho^{1j}; \mu^{2j} = 0.5\mu^{1j}, \rho^{2j} = 0.5\rho^{1j}, p_0/\mu^{1j} = 1.99; \mu^{2j} = 0.5\mu^{1j}, \rho^{2j} = 0.5\rho^{1j}, p_0/\mu^{1j} = 1.94$  时, 球体 ( $a/b = 0.7$ ) 振动的相图分别示于图 3、图 4 和图 5. 可见, 在  $xv$  平面中,  $xv$  的关系曲线是一条封闭的曲线, 且关于  $x$  轴是对称的. 当  $t = 0$  时, 曲线的起点在  $x = x_{min}, v = 0$  处, 随着时

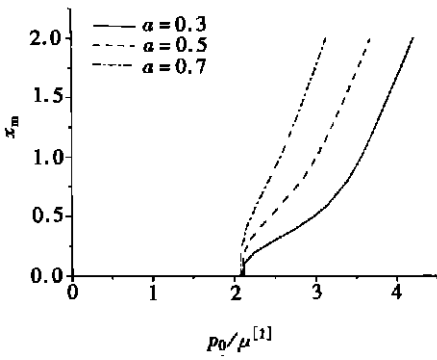


图 1  $x_m-p_0$  关系曲线 ( $\mu^{[2]} = 2\mu^{[1]}$ )

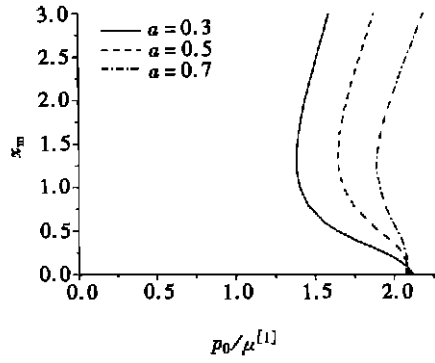


图 2  $x_m-p_0$  关系曲线 ( $\mu^{[2]} = 0.5\mu^{[1]}$ )

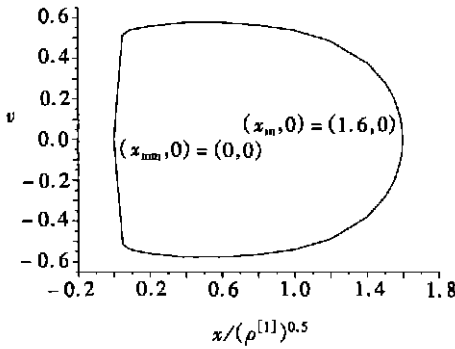


图 3 相图 ( $\mu^{[2]} = 2\mu^{[1]}, \rho^{[2]} = 2\rho^{[1]}$ )

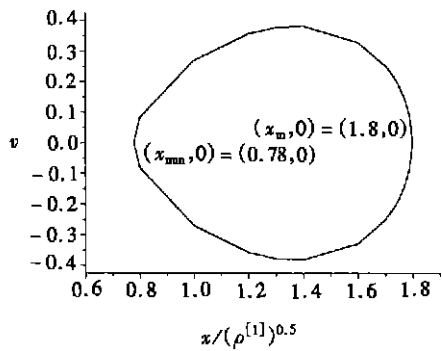


图 4 相图 ( $\mu^{[2]} = 0.5\mu^{[1]}, \rho^{[2]} = 0.5\rho^{[1]}$ )

间的增加, 空穴半径  $x$  逐渐增加, 其速度  $v$  开始增加, 而后逐渐减少, 当空穴半径  $x$  达到其最大值  $x_m$  时, 其速度  $v$  降为零; 然后随着时间的增加, 空穴半径  $x$  逐渐减少, 速度  $v$  先增加而后减少, 当空穴半径  $x$  达到  $x_{min}$  时, 速度  $v$  也降为零。封闭的相图曲线表明空穴随时间的演化是周期性的非线性振动。

利用空穴振动的相图可求得空穴振动的周期的近似值, 如当  $p_0/\mu^{[1]} = 2.92, \mu^{[2]} = 2\mu^{[1]}, \rho^{[2]} = 2\rho^{[1]}$  或  $p_0/\mu^{[1]} = 1.98, \mu^{[2]} = 0.5\mu^{[1]}, \rho^{[2]} = 0.5\rho^{[1]}$  时, 球体 ( $a/b = 0.7$ ) 振动的近似周期分别为  $T = 2.02 \sqrt{\mu^{[1]}/\rho^{[1]}}$  和  $T = 2.62 \sqrt{\mu^{[1]}/\rho^{[1]}}$ 。

### 4 小 结

根据有限变形动力学理论, 研究了一个不可压超弹性材料组合球体中空穴的动态生成问题。证明了当外加载荷超过其临界值时, 除一个平凡解外, 球体内部还有一个空穴生成的分叉解; 证明了空穴生成的临界载荷值仅与内球体的材料性质有关, 空穴随时间的演化是周期性的非线性振动。

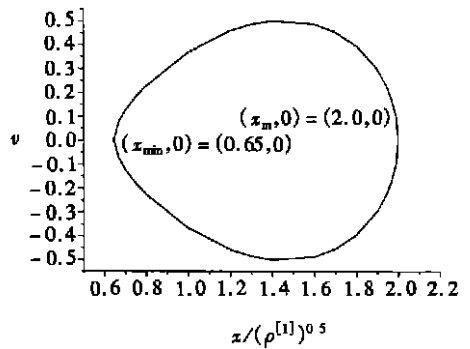


图 5 相图 ( $\mu^{[2]} = 0.5\mu^{[1]}, \rho^{[2]} = 0.5\rho^{[1]}$ )

## [参 考 文 献]

- [1] Gent A N, Lindley P B. Internal rupture of bonded rubber cylinders in tension[J]. Proc Roy Soc London, 1959, A249(2): 195—205.
- [2] Ball J M. Discontinuous equilibrium solutions and cavitations in nonlinear elasticity[J]. Phil Trans R Soc London, Ser A, 1982, 306(3): 557—610.
- [3] Horgan C O, Polignone D A. Cavitation in nonlinearly elastic solids: A review[J]. Appl Mech Rev, 1995, 48(3): 471—485.
- [4] 任九生, 程昌钧. 不可压超弹性材料中的空穴分叉[J]. 应用数学和力学, 2002, 23(8): 783—789.
- [5] 任九生, 程昌钧, 朱正佑. 可压超弹性材料组合球体中心的空穴生成[J]. 应用数学和力学, 2003, 24(9): 892—898.
- [6] Chou Wang M\_S, Horgan C O. Cavitation in nonlinear elastodynamic for neo-Hookean materials[J]. Internat J Engrng Sci, 1989, 27(8): 967—973.
- [7] Knowles J K. Large amplitude oscillations of a tube of incompressible elastic material[J]. Quart Appl Math, 1960, 18(1): 71—77.
- [8] Guo Z H, Solecki R. Free and forced finite amplitude oscillations of an elastic thick\_walled hollow sphere made of incompressible material[J]. Arch Mech Stos, 1963, 15(3): 427—433.
- [9] Calderer C. The dynamical behavior of nonlinear elastic spherical shells[J]. J Elasticity, 1983, 13(1): 17—47.
- [10] REN Jiu\_Sheng, CHENG Chang\_Jun. Dynamical formation of cavity in transversely isotropic hyperelastic spheres[J]. Acta Mechanica Sinica, 2003, 19(4): 320—323.
- [11] REN Jiu\_Sheng, CHENG Chang\_Jun. Dynamical formation of cavity in hyper\_elastic materials[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2002, 15(3): 208—216.
- [12] Chalton D. T., Yang J. A review of methods to characterize rubber elastic behavior for use in finite element analysis[J]. Rubber Chemistry and Technology, 1994, 67(3): 481—503.

## Dynamical Formation of Cavity in a Composed Hyper\_Elastic Sphere

REN Jiu\_sheng, CHENG Chang\_jun

(Department of Mechanics, Shanghai University, Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics, Shanghai 200072, P. R. China)

**Abstract:** The dynamical formation of cavity in a hyper\_elastic sphere composed of two materials with the incompressible strain energy function, subjected a suddenly applied uniform radial tensile boundary dead\_load, was studied following the theory of finite deformation dynamics. Besides a trivial solution corresponding to the homogeneous static state, a cavity forms at the center of the sphere when the tensile load is larger than its critical value. It is proved that the evolution of cavity radius with time displays nonlinear periodic oscillations. The phase diagram for oscillation, the maximum amplitude, the approximate period and the critical load were all discussed.

**Key words:** composed incompressible hyper\_elastic materials; finite deformation dynamics; cavity formation; non\_linear periodic oscillation