应用数学和力学，第5卷第6期（1984年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

关于结构稳定的特征性质*

廖 山 涛

（北京大学数学系与数学研究所，1984年5月9日收到）

摘 要

本文摘要叙述有关三维紧致光滑流形上结构稳定的微分同胚的一个特征性定理的证明.

一、引 言

在微分动力体系理论中，寻找n维紧致光滑流形M^n（$n\geqq2$）上结构稳定的微分同胚的特征性质是长时期以来的一个基本问题．我们说$f\in\mathrm{Diff}^1(M^n)$是结构稳定的，如果f有一在$\mathrm{Diff}^1(M^n)$中的隣域V使得每一$g\in V$都与f拓扑同轭．多年前[1]中推测过，$f\in\mathrm{Diff}^1(M^n)$结构稳定的一个充要条件是f满足公理A及强横截条件．稍迟，这推测的充分性在[2]，[3]中得证．可是，必要性部份尚待解决，只有近时在[4]，[5]，[6]中，在$\dim M^n=2$的情况下有过证明.

我们说$f\in\mathrm{Diff}^1(M^n)$是一个Kupka-Smale微分同胚，如果f的每个周期点都是双曲的，且这些周期点的稳定流形与非稳定流形都横截相交.

本文提出下述当$\dim M^n=3$时的一个特征性定理，并在第三节和第四节中给出证明它的线索.

定理A **一个使$f\in\mathrm{Diff}^1(M^3)$结构稳定的充要条件是f在$\mathrm{Diff}^1(M^3)$中有一邻域W使得每一$g\in W$都是Kupka-Smale微分同胚.**

附带地，我们也验证了，当$\dim M^n=3$时的上述推测.

我们指出，定理A对于$f\in\mathrm{Diff}^1(M^2)$仍然成立．可是，这容易从一些以前已有的（包括[4]，[5]在内的）结果推出．较多的细节见下面第四节.

二、预备 阻碍集与极小歧变集

我们打算在略有限制的情况下先建立一个与上述定理相类似的，有关向量场的结果．然后通常的扭扩办法即可导出上述定理.

记$\mathscr{X}(M^n)$为M^n上所有的C^1切向量场（即常微系统）X作成的线性空间．就M^n上一任给定的C^∞ Riemann度量赋$\mathscr{X}(M^n)$以C^1模$\|X\|_1$后，$\mathscr{X}(M^n)$即成为一Banach空间．命

* 叶开沅推荐.

$$\mathscr{C}=\bigcup_{x\in M^n}\mathscr{C}_x$$

为M^n的切空间丛，其中$\mathscr{C}_x$表M^n在x处的切空间。

考虑一任给的$S\in\mathfrak{X}(M^n)$。S导出一C^1单参变换群$\phi_t:M^n\to M^n$ $(-\infty<t<\infty)$，由是导出一单参变换群

$$\Phi_t=d\phi_t:\mathscr{C}\to\mathscr{C}\qquad(-\infty<t<\infty)$$

记M为S所有常点作成的集合，并考虑S的共轭丛

$$\mathscr{D}=\bigcup_{x\in M^n}\mathscr{D}_x$$

这丛以M为底空间，在x处的纤维为$\mathscr{D}_x=\{u\in\mathscr{C}_x\mid\langle S(x),u\rangle=0\}$。对$u\in\mathscr{D}_x$取$\psi_t(u)$为$\Phi_t(u)$在$\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$上的垂直投影，即给出一单参变换群

$$\psi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D}\qquad(-\infty<t<\infty)$$

ψ_t把$\mathscr{D}_x$线性变换至$\mathscr{D}_{\phi_t(x)}$上。

我们尚需另外一个变换群

$$\Psi_t:\mathscr{D}\to\mathscr{D}\qquad(-\infty<t<\infty)$$

它是这样来定义使得$\psi_t(u)-\Psi_t(u)\in\psi_t(\otimes u)$且$\Psi_t(u)$与$\psi_t(\otimes u)$正交，这里

$$\otimes u=\{v\in\mathscr{D}_x\mid\langle u,v\rangle=0\}\quad\text{对于}u\in\mathscr{D}_x$$

这个变换群可自然且唯一地扩充到$\mathscr{D}$在$\mathscr{C}$中的闭包$\mathscr{D}^*$上，仍记作

$$\Psi_t:\mathscr{D}^*\to\mathscr{D}^*\qquad(-\infty<t<\infty)$$

按照[8]，[9]我们定义S的阻碍集$\mathrm{Ob}(S)$作为

$$\mathrm{Ob}(S)=\{x\in M^n\mid\exists u\in\mathscr{D}^*\cap\mathscr{C}_x\text{使得}\quad\|u\|=1=\inf_{t\in(-\infty,\infty)}\|\Psi_t(u)\|\}$$

按照[10]，M^n的一子集Λ将叫作S的一个歧变集，如果Λ在M^n中闭，在ϕ_t $(-\infty<t<\infty)$下不变，且$\Lambda\cap\mathrm{Ob}(S)\neq 0$。一个歧变集将叫作极小的，如果它不包含有真歧变子集。用Brouwer约化定理可看出每一歧变集都至少包含一个极小歧变集。

S的一极小歧变集Λ将叫作简单的，如果或 (i)Λ不含有S的常点，或 (ii)$\Lambda\cap\mathrm{Ob}(S)$至少含有$S$的一常点$c$使得轨线$\{\phi_t(c)\mid t\in(-\infty,\infty)\}$的$\omega$-极限集合与$\alpha$-极限集合都是$\Lambda$的真子集。否则，这极小歧变集将叫作非简单的。

极小歧变集这概念在我们的工作中将几乎到处出现。

我们也将用下面的一些记号：对于$t\in\langle 0,\infty)$，$x\in M$及$\mathscr{D}_x$中一个维数>0的子线性空间A，写

$$\eta_-(t,A)=\sup_{u\in A,\|u\|=1}\log\|\psi_t(u)\|$$

$$\eta_+(t,A)=\inf_{u\in A,\|u\|=1}\log\|\psi_t(u)\|$$

如同S这情况一样，每一$X\in\mathfrak{X}(M^n)$也将导出M^n的切空间丛$\mathscr{C}$上一单参变换群（将记作）

$$\Phi_{Xt}:\mathscr{C}\to\mathscr{C}\qquad(-\infty<t<\infty)$$

显然$\Phi_{Xt}=\Phi_t$对于$X=S$。若K是M^n中一非空的连通闭子集，且是X的一双曲不变集（例如，K是X的一双曲周期轨道），我们写

$$\mathrm{Ind}_X K=\dim\{u\in\mathscr{C}_x\mid\lim_{t\to\infty}\|\Phi_{Xt}(u)\|=0\}$$

其中$x\in K$。$\mathrm{Ind}_X K$的定义与K中的点x的选取无关。

三、关 键 步 骤

考虑$\mathscr{X}(M^n)$中所有具有下述性质的X作成的族$\mathscr{X}^*(M^n)$。这性质是：X在$\mathscr{X}(M^n)$中有一隣域W使得每一$Y\in W$的所有奇点和周期轨道都是双曲的．我们曾经在[11]，[10]中对$\mathscr{X}^*(M^n)$作过较广泛的讨论（关于微分同胚的相应的讨论，可参考[5]）．

设$S\in\mathscr{X}^*(M^n)$．对于一整数$p\in\langle 0,n-1\rangle$，由$X_i\in\mathscr{X}^*(M^n)$及X_i的周期轨道P_i作成的叙列$\{X_i, P_i\}$将叫作S的一基本p-叙列，如果

$$\lim_{i\to\infty}\|X_i-S\|_1=0 \text{ 且}\mathrm{Ind}_{X_i}P_i=p \quad (i=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

定理B 设$S\in\mathscr{X}^*(M^n)$且设Λ是S的一非简单极小歧变集$\subset M$．下面(i)及(ii)成立．

(i)存在S的一基本p-叙列$\{X_i, P_i\}$，其中p不同于0和$n-1$，使得周期轨道叙列$\{P_i\}$收敛到Λ．由是存在数$\eta>0$及$T>0$使得在每一$x\in\Lambda$处，$\mathscr{D}_x$可唯一地分解成直和

$$\mathscr{D}_x=\Delta_-(x)\oplus\Delta_+(x),\ \dim\Delta_-(x)=p$$

满足

$$\psi_t(\Delta_-(x))=\Delta_-(\phi_t(x))\text{及}\psi_t(\Delta_+(x))=\Delta_+(\phi_t(x)) \qquad t\in(-\infty,\infty)$$

$$\eta_+(t,\Delta_+(x))-\eta_-(t,\Delta_-(x))\geqq 2\eta \qquad t\in\langle T,\infty)$$

(ii)如果有S的一基本p-叙列$\{X_i, P_i\}$以及η，T满足(i)中要求，且如果$\eta_+(t,\Delta_+(x))\geqq\eta$对所有$(t,x)\in\langle T,\infty)\times\Lambda$，则存在数$\xi>0$及$d>0$及点$c_*\in\Lambda$以及负整数

$$m_1>m_2>m_3>\cdots$$

使得对于点$c_j=\phi_{m_jd}(c_*)$我们有

$$\frac{1}{md}\sum_{k=0}^{m-1}\eta_-(d,\ \Delta_-(\phi_{kd}(c_j)))\leqq-\xi \quad (m=1,\ 2,\cdots,\ -m_j;\ j=1,\ 2,\ 3,\cdots)$$

且使得S过c_*的轨线的ω-极限集合Γ是S的一双曲不变集具有

$$0<\mathrm{Ind}_S\Gamma<p$$

这里，(i)的一部份是[10]中一些结果的重述．从一些与[10，pp.33—34]相类似的论据可看出$p\neq 0$，$n-1$．明显地，Γ是Λ中非空的连通闭子集．

(ii)是新的，且是证明上述定理A这类定理的关键步骤．对于所给的非简单极小歧变集作较细致的分析并应用如同[12]中所述的定理可导至定理B的证明．

现在，记$\mathscr{X}^{\#}(M^n)$为所有具有下述性质的$X\in\mathscr{X}^*(M^n)$作成的族．这性质是：X在$\mathscr{X}^*(M^n)$中有一隣域U使得，如果Q_1及Q_2是$Y\in U$的奇点或周期轨道，则就Y来说，Q_1的稳定流形与Q_2的非稳定流形总横截相交．简单地说，每一$Y\in U$都是一Kupka-Smale系统．

定理C 设$S\in\mathscr{X}^{\#}(M^n)$且设$\Lambda$是$S$的一非简单极小歧变集$\subset M$．则$S$不能有基本$p$-叙列$\{X_i, P_i\}$使得定理B的结论(ii)成立．

定理D 如果$S\in\mathscr{X}^{\#}(M^n)$，则$S$不能有简单极小歧变集．

最后的这个定理可以下述方式来证．设相反地有一如此的极小歧变集Λ．则按照[10，p.10]中一个定理，Λ含有S的一常点c使得$\{\phi_t(c)\,|\,t\in(-\infty,\ \infty)\}$的$\omega$-极限集合与$\alpha$-极限集合都是$S$的双曲不变集，且有$u\in\mathscr{D}_c$，$\|u\|=1$，使得

$$\lim_{t\to\infty}\|\Psi_t(u)\|=\infty=\lim_{t\to-\infty}\|\Psi_t(u)\|$$

且实际上，当$t\to\pm\infty$时，$\|\Psi_t(u)\|$像指数般增长。由是适当的C^1小扰动将破坏$S\in\mathscr{X}^*(M^n)$的Kupka-Smale特性。

四、应 用

考虑$n=4$及$S\in\mathscr{X}^*(M^4)$无奇点这情况。用定理C及[10, p.27]，[4, p.11]中的定理，我们易导出

定理E 设$S\in\mathscr{X}^*(M^4)$无奇点。则S不能有非简单极小歧变集。

定理F 设$S\in\mathscr{X}^*(M^4)$无奇点。则下面的叙述(i)～(iv)是等价的：

(i) S结构稳定。

(ii) $S\in\mathscr{X}^*(M^4)$。

(iii) $\mathrm{Ob}(S)=0$。

(iv) S满足公理A及强横截条件。

这里(i)⇒(ii)易从Kupka-Smale定理[7]及结构稳定定义推出。(ii)⇒(iii)是上面定理D及E的结论，因为否则，S就会有极小歧变集。(iii)⇒(iv)给在[9]及[12, p.18]中。(iv)⇒(i)给在Robinson[13]中。

我们指出，上述定理对于$S\in\mathscr{X}(M^3)$仍成立，且可以同法得证。可是，这样一个三维定理也易从以前已有的结果推出。这些结果包括如下的一个，即[10, §6]：要使无奇点的$S\in\mathscr{X}(M^3)$ Ω-稳定的充要条件是$S\in\mathscr{X}^*(M^3)$，也是S满足公理A及无环性条件。从Peixoto[14]，定理F对于无奇点的$S\in\mathscr{X}(M^2)$显然仍成立。

通过扭扩，我们得出类似的

定理G 对于$f\in\mathrm{Diff}^1(M^3)$，下面的叙述(i)～(iii)是等价的：

(i) f结构稳定。

(ii) f在$\mathrm{Diff}^1(M^3)$中有一邻域V使得每一$g\in V$都是Kupka-Smale微分同胚。

(iii) f满足公理A及强横截条件。

同样，这定理对于$f\in\mathrm{Diff}^1(M^2)$仍成立。但这也容易从以前已有的结果（包括[4]及[5]中关于Ω-稳定的特征性质）来导出。

参 考 文 献

[1] Palis, J. and S. Smale, Structural stability theorems, Global analysis, *Proc. Sympos. Pure Math.*, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 14 (1970), 223—231.

[2] Robbin, J., A structural stability theorem, *Ann. of Math.*, 94 (1971), 447—493.

[3] Robinson, C., Structural stability of C^1 diffeomorphisms, *J. Diff. Equations*, 22 (1976), 28—71.

[4] Liao Shan-tao, On the stability conjecture, *Chinese Annals of Mathematics*, 1, 1 (1980), 9—29.

[5] Mañé, R., An ergodic closing lemma, Annals of Math., 116 (1982), 503—540.

[6] Sannami, A., The stability theorems for discrete dynamical systems on two-dimensional manifolds, *Nagoya Math. J.*, 90 (1983); Announcement and summary: *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.*, 57 (1981), 403—407.

[7] Abraham, R. and J. Robbin, *Transversal Mappings and Flows*, Benjamin, New York (1967).

[8] 廖山涛，阻碍集与强匀断条件，数学学报，19 (1976), 203—209.

[9] 廖山涛，阻碍集(I)，数学学报，23 (1980), 411—453.

[10] 廖山涛，阻碍集(II)，北京大学学报（自然科学），2 (1981), 1—36.

[11] 廖山涛，某类常微系统的一个基本性质，数学学报，22 (1979), 316—343.

[12] 廖山涛，一个关于周期轨道存在的定理，北京大学学报（自然科学），1 (1979), 1—20.

[13] Robinson, C., *Structural Stability for Flows*, Lecture Notes, Warwick, Springer-Verlag (1974), 468.

[14] Peixoto, M., Structural stability on two-dimensional manifolds, *Topology*, 1 (1962), 101—120.

On Characterizations of Structural Stability

Liao Shan-tao

(Mathematics Department and Mathematics Institute, Peking University, Beijing)

Abstract

This note takes a sketch of a proof of a characterization theorem for diffeomorphisms on a compact 3-dimensional smooth manifold to be structurally stable.