应用数学和力学，第5卷第6期（1984年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲*

沈 惠 川

（中国科学技术大学，1983年11月20日收到）

摘 要

本文借用量子电动力学中的知识，将小挠度弹性薄板的一般Euler方程降阶成Schrödinger方程型的形式，进而求得了弹性基上的薄板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的小挠度弯曲的一般解.

一、前 言

小挠度弹性薄板的Euler方程是弹性稳定理论中关于这类问题的基本微分方程．一般来说，要精确求解这个方程是相当困难的．以往关于这个方程的解法，用得最多的是Rayleigh-Ritz法，Галёркин法，Канторович-Крылов法和Trefftz法．这几种方法都是一种近似解法，只有在个别问题中才能找到精确解．当然，从根本上来讲，小挠度弹性薄板的基本方程本身也是近似的，"精确解"的含义只有相对的意义．故而，我们用不着挖空心思去追求Euler方程的精确解，而宁可在比较好的近似下(这种近似或许比Euler方程更为精密)，发展一种新的求解方法．本文就是在这种思想指导下完成的．其优点首先表现在方程简单，便于数值解．

在进行这项工作之前，让我们先回顾一下弹性动力学Lamé方程的求解．弹性动力学的通解为[1]

$$u_r=(c_p^2-c_s^2)\partial_r\left[\psi_0+\frac{1}{2c_pc_s}x_m\psi_m\left(\frac{c_s}{c_p}x_j,\ t\right)\right]-\psi_r(x_j,t) \tag{1.1a}$$

或简记为

$$u_r=\hat{S}_r\psi_0+\hat{S}_0\psi_r \tag{1.1b}$$

式中 $\hat{S}_r$ 和 $\hat{S}_0$ 是算符

$$\hat{S}_r=(c_p^2-c_s^2)\partial_r \qquad (r=1,2,3) \tag{1.2}$$

$$\hat{S}_0=\frac{c_p^2-c_s^2}{2c_pc_s}\mathrm{repl}\left(\frac{c_s}{c_p}x_j,\ x_j\right)-1+\frac{c_p^2-c_s^2}{2c_pc_s}(x_m\partial_m)\,\mathrm{repl}\left(\frac{c_s}{c_p}x_j,\ x_j\right) \tag{1.3}$$

* 钱伟长推荐.

repl(A,B)是表示用A取代B的右向运算算符．另外有

$$c_p^2=\frac{\lambda+2\mu}{\rho},\qquad c_s^2=\frac{\mu}{\rho} \tag{1.4}$$

λ,μ为Lamé常数，ρ为介质密度；而ψ_0和ψ_r分别满足波动方程

$$(c_p^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\psi_0=0 \tag{1.5}$$

$$(c_s^2\partial_k\partial_k-\partial_t\partial_t)\psi_r=0\qquad (r=1,2,3) \tag{1.6}$$

(1.5)式和(1.6)式是场方程，还可以用算符表成

$$(c_p^2\hat{\mathrm{k}}^2-\hat{\Omega}^2)\psi_0=0 \tag{1.5a}$$

$$(c_s^2\hat{\mathrm{k}}^2-\hat{\Omega}^2)\psi_r=0 \tag{1.6a}$$

或用作描述声子时表成粒子波动方程

$$(c_p^2\hat{\mathrm{p}}^2-\hat{E}^2)\psi_0=0 \tag{1.5b}$$

$$(c_s^2\hat{\mathrm{p}}^2-\hat{E}^2)\psi_r=0 \tag{1.6b}$$

式中$\hat{\mathrm{k}}$为波矢算符，$\hat{\Omega}$为频率算符；$\hat{\mathrm{p}}$为动量算符，$\hat{E}$为能量算符．

$$\hat{\mathrm{k}}=-i\nabla,\qquad \hat{\Omega}=i\partial_t \tag{1.7}$$

$$\hat{\mathrm{p}}=-i\hbar\nabla\qquad \hat{E}=i\hbar\partial_t \tag{1.8}$$

$\hbar$为planck常数h除以2π．(1.5)式和(1.6)式写成(1.5a)式、(1.6a)式或(1.5b)式、(1.6b)式的原因是因为在弹性纵波中

$$\omega^2=c_p^2\mathbf{k}^2\qquad E^2=c_p^2\mathbf{p}^2 \tag{1.9}$$

在横波中

$$\omega^2=c_s^2\mathbf{k}^2\qquad E^2=c_s^2\mathbf{p}^2 \tag{1.10}$$

式中ω为频率，$\mathbf{k}$为波矢；E为能量，$\mathbf{p}$为动量．

从(1.1b)式中可以看出，弹性动力学的通解实际上是一种将弹性动力学Lamé方程变成波动方程(1.5)式和(1.6)式的变换．算符$\hat{S}_r$和$\hat{S}_0$就是变换矩阵的两个组成部分。如能算出这个变换矩阵的逆阵，则也能完成由波动方程(1.5)式和(1.6)式到Lamé方程的变换。

弹性动力学问题现在似乎变成波动方程(1.5)式和(1.6)式的求解了．但我们还不满足．我们由文[2]知道，如果ψ_α $(\alpha=0,1,2,3)$ 满足波动方程

$$\left(\sum_1^4\gamma^\alpha K_\alpha\right)\psi=0 \tag{1.11}$$

式中γ^α为Flügge标准矩阵，$K_\alpha=-i\partial_\alpha$，$K_4=iK_0=\frac{1}{c}\partial_t$，$c$可以是$c_p$或$c_s$；则$\psi_\alpha$一定满足方程(1.5)式或(1.6)式，因此如果我们将ψ_α的定义域解析延拓到复平面，就可以用场方程(1.11)式来代替方程(1.5)式和(1.6)式了．进而．考虑到(1.11)式也可以是描述静质量为零的声子运动方程，而静质量为零的波动方程只需要三个彼此反对易的矩阵[3]，则(1.11)式还可以简化成

$$\left(\sum_1^4\sigma^\alpha K_\alpha\right)\psi=0 \tag{1.12}$$

式中σ^k $(k=1,2,3)$为Pauli矩阵，σ^4为2×2单位矩阵．

在弹性动力学中，与空间坐标x_k处于同等地位的是时间坐标与纵波波速或横波波速的

乘积，即 $c_p t$ 或 $c_s t$，而不象电动力学中那样，是时间坐标乘以光速。我们称弹性动力学中这种相当于Lorentz不变性的性质为"准Lorentz不变性"，根据P. A. M. Dirac的推理[4]，波动方程必须是P_a（在我们这里必须是K_a）的有理式和线性式。因而方程(1.11)式或(1.12)式这样的形式更符合力学的普遍原理，同时它们并没有破坏弹性动力学问题的"准Lorentz不变性"。

这种将有四个分量组成的方程组(1.11)式或将有两个分量组成的方程组(1.12)式代替原方程(1.5)式和(1.6)式的做法，其物理根据也是充分的。(1.11)式或(1.12)式是场方程，同时又是描述单个声子的运动方程。当计入简谐近似所忽略的非线性效应的时候，声子同样会发生裂变而具有有限的寿命。文[5]认为声波（第一声）和零声是Fermi粒子系的Bose型准粒子，即是说，声波（弹性波）波谱在一定条件下会发生分裂。在地球物理观测中，由地球自转和扁率引起的谱分裂早就被发现过[6]。

至于方程(1.5)式或(1.6)式与方程(1.11)式或(1.12)式相比较，到底哪个更为基本的问题．争论双方各执己见。传统的观点(Newton)认为方程(1.11)式或(1.12)式只是方程(1.5)式或(1.6)式的近似渐近，但按现代物理学的观点(Dirac)来看，反而(1.11)式或(1.12)式应该更为基本，因为有理由认为经典力学作微元分析列出运动方程之前，并没有考虑（或已忽略）微元体的内禀自由度。

弹性动力学Lamé方程的这种求解方法，可以照搬到小挠度弹性薄板Euler方程的求解过程中来，关键是使Euler方程降阶。本文和文[2]再一次证明，一些复杂的物理方程或力学方程的求解，都可以归结为较为简单的几类方程的求解。

二、方程的"开方"

小挠度弹性薄板的Kirchoff方程为[7~11]

$$D\nabla^4 w = -q \tag{2.1}$$

式中 w 为挠度；q 为载荷密度，在动力学问题中

$$q = \rho h \partial_t \partial_t w \tag{2.2}$$

式中 ρ 为介质密度。在(2.1)式中，D为抗弯刚度

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \tag{2.3}$$

h 为板厚，E 为Young模量，ν为Poisson比。小挠度弹性薄板在侧向载荷 q 和中面力N_x，N_y，$N_{xy}=N_{yx}$的联合作用下的挠度曲面微分方程为

$$D\nabla^4 w = -q + (N_x \partial_x \partial_x + N_y \partial_y \partial_y + 2N_{xy} \partial_x \partial_y) w \tag{2.4}$$

取简单情况，当板中面力是由沿边界的均布压力T所引起时，方程(2.4)式变为Euler方程(Navier方程)

$$D\nabla^4 w + T\nabla^2 w = -q \tag{2.5}$$

若弹性薄板置于弹性基上，基的弹性常数为K，则方程(2.5)式取形式

$$D\nabla^4 w + T\nabla^2 w + Kw = -q \tag{2.6}$$

方程(2.6)式可以称为一般Euler方程（GE方程）。考虑动力学问题。将(2.2)式代入(2.6)式，得

$$(\partial_t \partial_t + \xi^2 \nabla^2 \nabla^2 + \eta^2 \nabla^2 + \zeta^2) w = 0 \tag{2.7}$$

式中

$$\xi^2=\frac{D}{\rho h},\quad \eta^2=\frac{T}{\rho h},\quad \zeta^2=\frac{K}{\rho h} \tag{2.8}$$

方程(2.7)式的色散关系为

$$\omega^2=\xi^2k^4-\eta^2k^2+\zeta^2 \tag{2.9}$$

这与钢琴弦的色散关系[12]有相似之处．实际上方程(2.7)式可以从色散关系(2.9)式和变换关系(1.7)式导出．

方程(2.7)式可以按弹性动力学中(1.5)式和(1.6)式变为方程(1.11)式或(1.12)式同样的理由和方法进行"开方"．为使讨论问题方便，现在我们假设挠度w的定义域已解析延拓到复平面．首先，我们引入 Flügge 标准矩阵[13]：

$$\left.\begin{aligned}
&\gamma_1=\begin{bmatrix}0&0&0&-i\\0&0&-i&0\\0&i&0&0\\i&0&0&0\end{bmatrix},\quad \gamma_2=\begin{bmatrix}0&0&0&-1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{bmatrix}\\
&\gamma_3=\begin{bmatrix}0&0&-i&0\\0&0&0&i\\i&0&0&0\\0&-i&0&0\end{bmatrix},\quad \gamma_4=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\end{bmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

同时，使挠度w定义为 Hilbert 空间中的一个四分量列矢量

$$w=[w_1,\ w_2,\ w_3,\ w_4]^T \tag{2.11}$$

就可以用新方程组

$$[\gamma_4\partial_t-i(-\xi\gamma_3\nabla^2+\eta\gamma_k\partial_k+\zeta)]w=0 \tag{2.12}$$

来代替原方程(2.7)式了．式中$k=1,2$．特别是，当$\zeta=0$即$K=0$时，方程(2.12)式中只需要三个彼此反对易的矩阵，这时，可用方程

$$[\partial_t-i(-\xi\sigma_3\nabla^2+\eta\sigma_k\partial_k)]w=0\qquad (k=1,2) \tag{2.13}$$

来代替原方程(2.7)式．此时挠度w定义为 Hilbert 空间中的二分量列矢量

$$w=[w_1,\ w_2]^T \tag{2.14}$$

而σ_m $(m=1,2,3)$ 为 Pauli 矩阵

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\quad \sigma_2=\begin{bmatrix}0&-i\\i&0\end{bmatrix},\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&-1\end{bmatrix} \tag{2.15}$$

一般来说，当有标量外场势函数B和矢量外场势函数A_k $(k=1,2)$存在时，用经典规则，对应于方程组(2.12)式的推广的方程组应为

$$\{\gamma_4\partial_t-i[\gamma_3(-\xi\nabla^2+B)+\gamma_k(\eta\partial_k+iA_k)+\zeta]\}w=0 \tag{2.16}$$

式中$B(x_i,t)$，$A_k(x_i,t)$为外场的频率算符，具有频率的量纲，$i=1,2$．

方程组(2.12)式与方程(2.7)式在没有其他外场作用下是等效的[14]，二者的区别仅在于所给初始条件和边值条件的方式不同．但在有外场作用时，这种等效性便不复存在．在解决诸如波谱分裂之类的问题时，方程组(2.16)式的优越性是显而易见的．对小挠度弹性薄板中许多悬而未决的问题，也不妨用方程组(2.16)式一试．

当$\zeta=0$即$K=0$时，对应于(2.16)式的方程组应是

$$\{\partial_t - i[\sigma_3(-\xi\nabla^2+B)+\sigma_k(\eta\partial_k+iA_k)]\}w=0 \tag{2.17}$$

式中 $w=[w,\ w_2]^T$

对方程组(2.16)式等号两端同时左乘$\gamma_4=\sigma_3\otimes\sigma_4$，式中$\sigma_4$为$2\times2$单位矩阵，$\otimes$表示直积[2]；则(2.16)式成为

$$\{\partial_t+[\sigma_1\otimes\sigma_3(-\xi\nabla^2+B)+\sigma_1\otimes\sigma_k(\eta\partial_k+iA_k)]-i\sigma_3\otimes\sigma_4\zeta\}w=0 \qquad (k=1,2) \tag{2.18}$$

在方程组(2.18)式中，令

$$w=\alpha\psi \tag{2.19}$$

式中

$$\alpha=[\sigma_4\otimes\sigma_4-i\sigma_2\otimes\sigma_4] \tag{2.20}$$

将(2.19)式，(2.20)式代入(2.18)式，并在方程等号两端同时左乘

$$\alpha^{-1}=\frac{1}{2}[\sigma_4\otimes\sigma_4+i\sigma_2\otimes\sigma_4] \tag{2.21}$$

得

$$\{\partial_t+[\sigma_3\otimes\sigma_3(-\xi\nabla^2+B)+\sigma_3\otimes\sigma_k(\eta\partial_k+iA_k)]+i\sigma_1\otimes\sigma_4\zeta\}w=0 \tag{2.22}$$

方程(2.22)式中当第三项、第四项为零时，可分解为分量方程

$$[\partial_t+(-\xi\nabla^2+B)][\psi_1,\psi_4]^T=0 \tag{2.23}$$

及其共轭

$$[\partial_t-(-\xi\nabla^2+B)][\psi_2,\psi_3]^T=0 \tag{2.24}$$

这两个方程也可从方程组(2.17)式导出，这时$\psi_1=\psi_4$，$\psi_2=\psi_3$。

方程(2.23)式与量子力学中的 Schrödinger 方程相似，只要令

$$\xi=\frac{i\hbar}{2\mu} \tag{2.25}$$

便可．式中$\hbar=h/2\pi$，h为 Planck 常数，μ为量子质量．由此可知，方程(2.18)式为 Schrödinger 型的方程．在方程(2.18)式中，总频率算符用$\hat{\Omega}$表示

$$\hat{\Omega}=-i[\sigma_1\otimes\sigma_3(-\xi\nabla^2+B)+\sigma_1\otimes\sigma_k(\eta\partial_k+iA_k)-i\sigma_3\otimes\sigma_4\zeta] \tag{2.26}$$

这时方程(2.18)式具有形式

$$i\partial_t w=\hat{\Omega}w \tag{2.27}$$

三、“开方”方程当外场与时间无关时的标准解法

外场B和A_k $(k=1,2)$一般来说应与时间t有关，但在仅考虑外场与时间无关时的特殊情况时有一般的解法．这时方程(2.18)式的解法可以分成两步来完成．

第一步，求定常问题中总频率算符的本征值和本征函数．

当外场B和A_k $(k=1,2)$与时间t无关时，我们可以按定常问题中的处理办法将总频率算符$\hat{\Omega}$按其本征函数展开．设此本征函数为$\phi_\Omega(x_i)$，与本征函数$\phi_\Omega(x_i)$对应的本征值为Ω，则频率本征方程为

$$\hat{\Omega}\phi_\Omega(x_i)=\Omega\phi_\Omega(x_i) \qquad (i=1,2) \tag{3.1}$$

将(3.1)式等号右端移到左端，便得方程

$$(\hat{\Omega}-\Omega)\phi_\Omega(x_i)=0 \tag{3.2}$$

对于确定的B和A_k，方程(3.2)式的解总可以找到．

当 $B(x_i)=0$，$A_k(x_i)=0$，及 $\eta=0$，$\zeta=0$ 时，(3.2) 式的解可以是三角函数，因而显得格外简单．

第二步，假设方程组(3.2)式的解已经找到，以这个特解求方程(2.18)式的通解．

我们将挠度 $w(x_i,t)$ 按其频率本征函数 $\phi_\Omega(x_i)$ 展开，这时展开系数依赖于时间 t，即

$$w(x_i,t)=\sum_\Omega A_\Omega(t)\phi_\Omega(x_i),\quad A_\Omega(t)=\int\phi_\Omega^* w dx_1dx_2 \tag{3.3}$$

将(3.3)式代入方程组(2.18)式，得

$$\sum_\Omega\phi_\Omega(x_i)\frac{dA_\Omega(t)}{dt}=-i\sum_\Omega A_\Omega(t)\Omega\phi_\Omega(x_i) \tag{3.4}$$

由于本征函数ϕ_Ω的正交归一性，方程(3.4)式等价于

$$\frac{dA_\Omega(t)}{dt}=-i\Omega A_\Omega(t) \tag{3.5}$$

上式立刻可以积出，即

$$A_\Omega(t)=A_\Omega(t_0)\exp[-i\Omega(t-t_0)] \tag{3.6}$$

因而，$t=t_0$时$w(x_i,t)$可知，由(3.3)和(3.6)即可求得任意时间 t 的解[15]

$$\left.\begin{aligned}w(x_i,t)&=\sum_\Omega A_\Omega(t_0)\exp[-i\Omega(t-t_0)]\phi_\Omega(x_i)\\ A_\Omega(t_0)&=\int\phi_\Omega^*(x_i')w(x_i',t_0)dx_1dx_2\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

或

$$w(x_i,t)=\int[\sum_\Omega\phi_\Omega^*(x_i')\phi_\Omega(x_i)\exp[-i\Omega(t-t_0)]w(x_i',t_0)dx_1dx_2 \tag{3.8}$$

从而整个问题的关键现在成为求总频率算符的本征值和本征函数．

四、弹性基上的板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的弯曲

在方程组(2.16)式中，令

$$A_k=0,\quad B=B(t) \tag{4.1}$$

则描述弹性基上的板在侧向动载荷、中面力和外场联合作用下的弯曲的方程应为

$$\{\sigma_3\otimes\sigma_4\partial_t-i[\sigma_2\otimes\sigma_3(-\xi\nabla^2+B)+\eta\sigma_2\otimes\sigma_k\partial_k+\zeta]\}w=0\qquad(k=1,2) \tag{4.2}$$

方程 (4.2) 式可以求解．为此，设

$$w(x_i,t)=\sum_\Omega w_\Omega=\sum_\Omega A_\Omega(t)\exp[i(k_{(\Omega)1}x_1+k_{(\Omega)2}x_2)] \tag{4.3}$$

式中k_m $(m=1,2)$为 m 方向的波矢分量，Ω 为频率，

$$k_{(\Omega)}^2=(k_{(\Omega)1})^2+(k_{(\Omega)2})^2 \tag{4.4}$$

由于方程(4.2)式是关于 w 的线性方程，可以先对某一频率（相当于某一单个声子）求解然后迭加，因而暂时可以略去角标(Ω)．将(4.3)式和 (4.4) 式代入(4.2)式，得

$$\left[\sigma_3\otimes\sigma_4\frac{d}{dt}-i\sigma_2\otimes\sigma_3(\xi k^2+B)+\eta(\sigma_2\otimes\sigma_1k_1+\sigma_2\otimes\sigma_2k_2)-i\zeta\right]A=0 \tag{4.5}$$

令

$$A=\phi c$$

$$\phi=\begin{bmatrix}\phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} & \phi_{14}\\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} & \phi_{24}\\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} & \phi_{34}\\ \phi_{41} & \phi_{42} & \phi_{43} & \phi_{44}\end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{bmatrix} \tag{4.6}$$

式中 c_a $(a=1,2,3,4)$ 为待定常数；矩阵 ϕ 的选择，必须使(4.5)式成为

$$\left\{\phi^{-1}\left[\sigma_3\otimes\sigma_4\frac{d}{dt}-i\sigma_2\otimes\sigma_3(\xi k^2+B)\right]\phi+\eta(\sigma_2\otimes\sigma_1k_1+\sigma_2\otimes\sigma_2k_2)-i\zeta\right\}c=0 \tag{4.7}$$

即

$$\sigma_2\otimes\sigma_1\phi=\phi\sigma_2\otimes\sigma_1,\quad \sigma_2\otimes\sigma_2\phi=\phi\sigma_2\otimes\sigma_2 \tag{4.8}$$

满足方程(4.8)式的 ϕ 必须具有形式

$$\phi=\begin{bmatrix}\phi_1 & 0 & -\phi_3 & 0\\ 0 & \phi_2 & 0 & -\phi_4\\ \phi_4 & 0 & \phi_2 & 0\\ 0 & \phi_3 & 0 & \phi_1\end{bmatrix} \tag{4.9}$$

方程(4.7)式要成立的充分条件是

$$\phi^{-1}\left[\sigma_3\otimes\sigma_4\frac{d}{dt}-i\sigma_2\otimes\sigma_3(\xi k^2+B)\right]\phi=N \tag{4.10}$$

式中N为某一个 4×4 常数矩阵。由此，方程(4.7)式可以分解成如下两个方程

$$\left[\sigma_3\otimes\sigma_4\frac{d}{dt}-i\sigma_2\otimes\sigma_3(\xi k^2+B)\right]\phi c=\phi Nc \tag{4.11}$$

及

$$[N+\eta(\sigma_2\otimes\sigma_1k_1+\sigma_2\otimes\sigma_2k_2)-i\zeta]c=0 \tag{4.12}$$

常数矩阵N不是任意的，它必须使

$$\det[N+\eta(\sigma_2\otimes\sigma_1k_1+\sigma_2\otimes\sigma_2k_2)-i\zeta]=0 \tag{4.13}$$

否则 $c=0$ 是没有意义的平凡解；再者它又必须使方程组(4.11)式相容。研究表明，N 的最简单形式是

$$N=\lambda\sigma_4\otimes\sigma_3 \tag{4.14}$$

不难验证

$$\phi(\lambda\sigma_4\otimes\sigma_3)=(\lambda\sigma_4\otimes\sigma_3)\phi \tag{4.15}$$

式中 λ 为任意常数。

将(4.14)式代入(4.13)式，得

$$\det[\lambda\sigma_4\otimes\sigma_3+\eta(\sigma_2\otimes\sigma_1k_1+\sigma_2\otimes\sigma_2k_2)-i\zeta]=0 \tag{4.16}$$

从中决定 λ 的取值

$$\lambda=i\lambda_0,\quad \lambda_0=\pm(\eta^2k^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.17}$$

方程(4.12)式的解为

$$c_4=\frac{\eta(k_1+ik_2)}{\lambda_0+\zeta}c_1,\quad c_3=\frac{\eta(-k_1+ik_2)}{\lambda_0-\zeta}c_2 \tag{4.18}$$

并且 c 系数之间有下列关系：

$$c_3c_4=-c_1c_2 \tag{4.19}$$

因而 c 矢量的独立分量只有两个。

将方程(4.11)式等号两端左乘$\gamma_4=\sigma_3\otimes\sigma_4$，得

$$\left[\frac{d}{dt}-\sigma_1\otimes\sigma_3(\xi k^2+B)\right]A=i\lambda_0\sigma_3\otimes\sigma_3 A$$

然后再作用算子$\frac{d}{dt}$，最后可得

$$\frac{d^2}{dt^2}A=\left[\sigma_1\otimes\sigma_3\frac{dB}{dt}+(\xi k^2+B)^2-\lambda_0^2\right]A \tag{4.20}$$

引入变换

$$A=\beta u \tag{4.21}$$

式中u是四维函数列矢量，

$$\beta=[\sigma_4\otimes\sigma_4-i\sigma_2\otimes\sigma_4] \tag{4.22}$$

将(4.21)式及(4.22)式代入(4.20)式，并在方程两边左乘β^{-1}，

$$\beta^{-1}=\frac{1}{2}[\sigma_4\otimes\sigma_4+i\sigma_2\otimes\sigma_4] \tag{4.23}$$

利用关系

$$\beta^{-1}\sigma_1\otimes\sigma_3\beta=\sigma_3\otimes\sigma_3 \tag{4.24}$$

可以得到矢量u所满足的方程

$$\frac{d^2}{dt^2}u=\left[\sigma_3\otimes\sigma_3\frac{dB}{dt}+(\xi k^2+B)^2-\lambda_0^2\right]u \tag{4.25}$$

现在联立方程组(3.25)式中的u_α ($\alpha=1,2,3,4$)分离了，变成u_1,u_2,u_3,u_4分别满足的四个独立的二阶齐次线性方程，而这四个方程均可以归结为下面一种形式的微分方程

$$u''+\left[\lambda_0^2-(\xi k^2+B)^2-\frac{dB}{dt}\right]u=0 \tag{4.26}$$

其中u_1，u_4满足上述方程，而u_2，u_3满足上述方程的共轭方程。

下面，我们分两种情况来讨论方程(4.26)式的解。

(一) 外场与时间成正比

$$B=iat \tag{4.27}$$

式中a为场常量。此时，方程(4.26)式成为

$$u''+[\lambda_0^2-(\xi k^2+iat)-ia]u=0 \tag{4.28}$$

引入新的自变量τ和参数m可以使方程(4.28)式无量纲化

$$\tau=a^{\frac{1}{2}}\left(t+\frac{\xi k^2}{ia}\right),\qquad m=a^{-\frac{1}{2}}\lambda=ia^{-\frac{1}{2}}\lambda_0 \tag{4.29}$$

u的无量纲方程为

$$\left[\frac{d^2}{d\tau^2}+(\tau^2-m^2-i)\right]u=0 \tag{4.30}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\exp\left[\frac{i}{2}\tau^2\right]M\left(\frac{m^2}{4}i,\ \frac{1}{2},\ -i\tau^2\right)\\ u_2&=\tau\exp\left[\frac{i}{2}\tau^2\right]M\left(\frac{1}{2}+\frac{m^2}{4}i,\ \frac{3}{2},\ -i\tau^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{4.31a}$$

其共轭解为

$$\left.\begin{aligned} u_1^* &= \exp\left[-\frac{i}{2}\tau^2\right]M\left(-\frac{m^2}{4}i,\ \frac{1}{2},\ i\tau^2\right) \\ u_2^* &= \tau\exp\left[-\frac{i}{2}\tau^2\right]M\left(\frac{1}{2}-\frac{m^2}{4}i,\ \frac{3}{2},\ i\tau^2\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.31b}$$

式中M为 Kummer 函数[16]。

最后的解可写为[17]

$$\left.\begin{aligned} & w_\Omega=\phi c\exp[i(k_1x_1+k_2x_2)] \\ & \phi=\begin{bmatrix} \phi_1 & 0 & -\phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & -\phi_1 \\ \phi_1 & 0 & \phi_2 & 0 \\ 0 & \phi_2 & 0 & \phi_1 \end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \\ & \phi_1=u_1+\delta mu_2,\qquad \phi_2=u_1^*+\frac{1}{\delta}mu_2^* \\ & m=ia^{-\frac{1}{2}}\lambda_0,\qquad \delta=-i\frac{c_3}{c_1} \\ & c_4=\frac{\eta(k_1+ik_2)}{\lambda_0+\zeta}c_1,\quad c_3=\frac{\eta(-k_1+ik_2)}{\lambda_0-\zeta}c_2 \\ & \lambda_0=\pm(\eta^2k^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.32}$$

待定的常数只有c_1，c_2两个。在要求(4.8)式成立时，必须有$\det\phi\neq0$，现在得到的ϕ_1和ϕ_2，根据Kummer函数的性质，可知$\det\phi=4\phi_1^2\phi_2^2\neq0$，符合上述要求。

（二）外场与时间成反比

$$B=-i\frac{b}{t} \tag{4.33}$$

式中 b 为场常量。现在，方程(4.26)式成为

$$u''+\left[\lambda_0^2-\left(\xi k^2-\frac{ib}{t}\right)^2-i\frac{b}{t^2}\right]u=0 \tag{4.34}$$

将(4.34)式展开，得

$$u''+\left[\lambda_0^2-\xi^2k^4+\frac{2i\xi k^2b}{t}+\frac{b(b-i)}{t^2}\right]u=0 \tag{4.35}$$

引入新的自变量τ和参数n,l使方程(4.35)式无量纲化

$$t=\frac{\tau}{2(\xi^2k^4+\eta^2k^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}},\quad n=\frac{i\xi k^2}{(\xi^2k^4+\eta^2k^2+\zeta^2)^{\frac{1}{2}}}b,\quad l=\left(b^2-ib+\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.36}$$

u 的无量纲方程是标准的超几何微分方程 Whittaker 方程[18]

$$u''+\left(-\frac{1}{4}+\frac{n}{\tau}-\frac{\frac{1}{4}-l^2}{\tau^2}\right)u=0 \tag{4.37}$$

其解为

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \tau^{p/2}\exp\left[-\frac{\tau}{2}\right]M(q,p,\tau) \\ u_2 &= \tau^{1-\frac{p}{2}}\exp\left[-\frac{\tau}{2}\right]M(q-p+1,\ 2-p,\ \tau) \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

其共轭解可由(4.38)式求出，式中

$$q=\frac{1}{2}-n+l,\quad p=1+2l \tag{4.39}$$

M为Kummer函数。

最后的解与前述(4.32)式相似，只是u的表式有所不同，我们用(4.40)式标记。

一般性评述

(A) 上述精确解是某一频率的解，即单色挠度波解。它相当于单个声子的行为。完整的解应对所有频率Ω求和，如果仅研究波谱的分裂，则可直接应用(4.32)式或(4.40)式。

(B) 当外场$B=0$，即$a=0$或$b=0$时，(4.32)式或(4.40)式所给出的解还原为频率没有分裂时的情况，实际上就是方程(2.7)式的解，因为此时方程(2.12)式还原为方程(2.7)式。

(C) 当外场B不仅仅与时间成正比或反比时，方程(4.2)式的解的形式更为复杂。在一些情况中，它可以用广义超比级数来表示。

(D) 当$\zeta=0$，即不考虑弹性基的作用时，方程(4.2)式可用方程(2.17)式来代替。这时所得到的一组共轭解是

$$\left.\begin{aligned}u&=\exp\left[i(\xi k^2\pm nk)t+i\int Bdt\right]\\u^*&=\exp\left[-i(\xi k^2\pm nk)t-i\int Bdt\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.41}$$

(E) 当存在复杂中面力，即方程(2.4)式不能简单地化成(2.5)式时，(4.32)式或(4.40)式中的λ_0和c系数要进行修正。一般来说，应作如下代换

$$\left.\begin{aligned}\eta(k_1+ik_2)&\longrightarrow\eta_1k_1+i\eta_2k_2\\\eta(-k_1+ik_2)&\longrightarrow-\eta_1k_1+i\eta_2k_2\\\eta^2k^2\quad&\longrightarrow\eta_1^2k_1^2+\eta_2^2k_2^2\end{aligned}\right\} \tag{4.42}$$

式中$\eta_1\neq\eta_2$。

(F) 考虑到我们在解题过程中已将挠度w的定义域解析延拓到复平面，因此实际上的解应取(4.32)式或(4.40)式的实部。

参 考 文 献

[1] 沈惠川. 弹性动力学的通解, 自然杂志, 7, 8 (1984). 633.
[2] 沈惠川. 单色弹性波谱的分裂, 应用数学和力学, 5, 4 (1984). 541—552.
[3] 曾谨言.《量子力学》, 科学出版社 (1982), 578.
[4] Dirac. P. A. M.,《量子力学原理》, 陈咸亨译, 科学出版社 (1979), 260.
[5] 蔡建华等.《量子统计的格林函数理论》, 科学出版社 (1982), 21.
[6] Stacey. F. D.,《地球物理学》, 傅承义校, 地震出版社 (1981), 172.
[7] Timoshenko, S. P. and J. M. Gere,《弹性稳定理论》, 张福范译, 科学出版社 (1965).
[8] Timoshenko, S. P. and S. Woinowsky-Krieger,《板壳理论》, 科学出版社 (1977), 406.
[9] 钱伟长、叶开沅,《弹性力学》, 科学出版社 (1956), 260.
[10] 张福范.《弹性薄板》, 科学出版社 (1963), 3.
[11] Вольмир А. С.,《柔韧板与柔韧壳》, 卢文达等译, 科学出版社 (1959).
[12] Crawford, F. S.,《波动学》, 伯克利物理学教程, Vol. 3, 卢鹤绂等译, 科学出版社 (1981), 96.

[13] Van der Waerden, B. L., 《群论与量子力学》, 赵展岳等译, 上海科学技术出版社 (1980).
[14] Dirac, P. A. M., 同[4], 261.
[15] Schiff, L. I., 《量子力学》, 李淑娴等译, 方励之校, 人民教育出版社 (1982), 57.
[16] 小谷正雄, 橋本英典, 《特殊函数》, 现代应用数学丛书之一, 钱端壮译, 上海科学技术出版社 (1962).
[17] Ley, Koo, E. and R. C. Wang (王仁川), Charged spin-1/2 particles in uniform electrical field, 中国科学技术大学学报, 13, 2 (1983), 167.
[18] Erde'lyi, A., 《高级超越函数》, 张致中译, 科学技术出版社 (1957).

The Solution of Deflection of Elastic Thin Plate by the Joint Action of Dynamical Lateral Pressure Force in Central Surface and External Field on the Elastic Base

Shen Hui-chuan

(Department of Earth and Space Sciences, University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

In this paper the Euler equation of the deflection of elastic thin plate is reduced to the equation with Schrödinger form by the principle of quantum electro-dynamics. Then we can obtain the general solution of deflection of elastic thin bending plate by the joint action of dynamical lateral pressure, force in central surface and external field on the elastic base.