

# 强引力场中的一维活塞过程\*

唐 泽 眉

(中国科学院力学研究所, 1983年10月27日收到)

## 摘 要

本文在直角坐标系、柱坐标及球坐标系中研究一维匀速活塞在强引力场中的动力学过程。用特征线法数值求解流体力学方程组, 得出符合活塞速度条件及联结条件的解。分析讨论了不同坐标系对压缩区, 常流区, 稀疏区流场、激波传播速度及活塞面上声速的影响。

## 一、前 言

天体物理中观测到大量爆发现象, 例如超新星爆发、日冕瞬变等。太阳表面频繁地向外喷射物质, 这些物质具有很高的能量, 呈现为不同形态。瞬变前沿为向外运动的、明亮的高密度区域, 其后为一低密度暗区域。最近提出用活塞驱动模型来研究太阳引力场中爆发物质的动力学过程<sup>[1~3]</sup>。不计引力场及在弱引力场中一维匀速活塞的压缩区流动及激波传播过程已有详细的讨论<sup>[4~8]</sup>。中晚期恒星密度大, 在恒星表面所发生的爆发现象, 会受到很强的恒星引力的作用, 因此有必要研究强引力场对活塞运动的影响<sup>[9]</sup>。可以用不同模型模拟不同形态的瞬变现象。例如用球对称模型研究实泡状瞬变爆发, 用柱对称活塞模拟环状日冕瞬变现象, ……等等。因此, 分析讨论强引力场中平面、柱对称及球对称活塞运动的差别无论在理论上还是实用上均有一定的意义。

研究在静止坐标系中平面、柱面及球面活塞向与引力作用相反方向的匀速运动。引力场很强, 压缩区及稀疏区的流动都不再是自模拟的。用特征线法数值求解气体动力学方程组。激波条件及稀疏区边界条件取决于恒星大气中的声速分布, 即取决于恒星引力场的大小。初条件由  $x=1$  处,  $t=1$  时刻活塞的运动决定。

## 二、基本方程、边界条件及解法

取恒星中心为坐标原点,  $x$  沿恒星半径向外, 研究恒星大气中一维活塞运动。活塞扰动区流体质点的流动符合下列一维非定常气体动力学方程组:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\rho v}{x} = 0 \quad (2.1)$$

\* 戴世强推荐。

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{GM}{x^2} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) + v \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{p}{\rho^\gamma} \right) = 0 \quad (2.3)$$

式中  $M$  为恒星质量,  $G$  为引力常数,  $\gamma$  取  $5/3$ ,  $n=0, 1, 2$  分别对应于平面、柱面、球面活塞问题, 其余符号均为通常含义. 引入声速  $a = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$ , 考虑激波后活塞扰动区为等熵流动, 取活塞初始位置  $x_*$  为特征长度, 活塞运动速度为特征速度, 得到无量纲形式的一维非定常气体动力学方程组,

$$\frac{\partial a}{\partial t} + v \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\gamma-1}{2} a \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{nv}{x} \right) = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2}{\gamma-1} a \frac{\partial a}{\partial x} = -\frac{v_*^2}{v^2 x^2} \quad (2.5)$$

其中  $v_* = (GM/x_*)^{1/2}$  为  $x_*$  处的特征重力逃逸速度, 计算中取  $(v_*/v_1)^2 = 3.375$ . 活塞前有一压缩区, 活塞后形成常流区及稀疏区 (图 1). 活塞面为一稳定间断面, 对活塞前后分别求解.

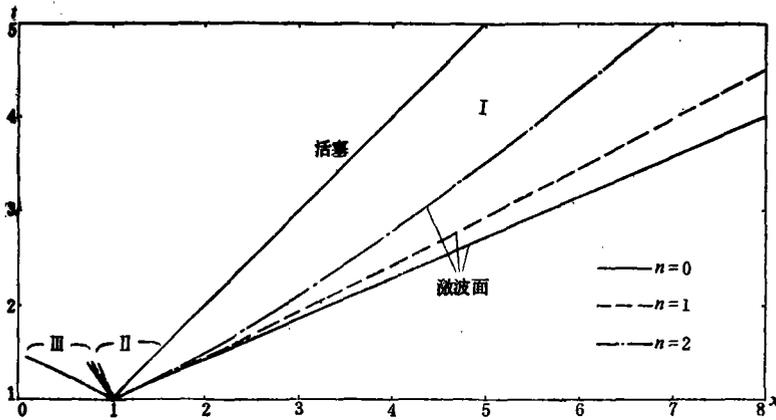


图 1 活塞运动图象

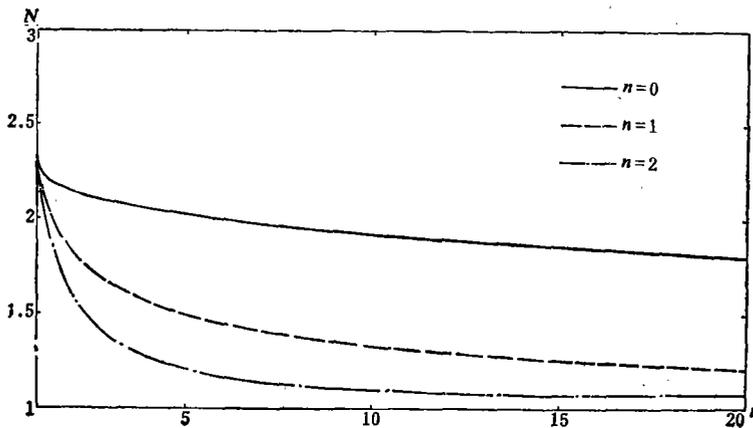


图 2 激波传播速度

压缩区：活塞面上质点流速  $v_r=1$ ，声速由激波条件决定。压缩区前沿的激波应满足激波守恒关系。考虑激波前气体处于静止状态，以下标“1”表示此区的参量，以“s”表示激波后压缩区的参量。激波守恒关系为：

$$v_s = \frac{2}{\gamma+1} \frac{1}{N} (N^2 - a_1^2) \quad (2.6)$$

$$a_s = \left\{ \left[ \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2}{\gamma+1} \left( \frac{a_1}{N} \right)^2 \right] \left[ \left( \frac{a_1}{N} \right)^2 + \frac{2\gamma}{\gamma+1} \left( 1 - \left( \frac{a_1}{N} \right)^2 \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} N \quad (2.7)$$

其中， $N$  为激波传播速度； $a_1(x) = \sqrt{\frac{\gamma-1}{x}} \frac{v_*}{v_r}$ ， $a_0 = a_1(1) = 1.5$ 。

常流区及稀疏区：活塞面上质点流速  $v_r=1$ ，声速由稀疏区边界条件决定。稀疏区边界以  $-a_r(x)$  的速度在静止恒星大气中传播，稀疏区边界上有：

$$v_r = 0 \quad (2.8)$$

$$a_r(x) = \sqrt{\frac{\gamma-1}{x}} \frac{v_*}{v_r} \quad (2.9)$$

(2.9)式由静止恒星大气中引力与流体压力相平衡，并考虑绝热过程得来。恒星质量的大小决定了它周围的声速分布。

用特征线法数值求解强引力场中的一维活塞运动问题。按照特征理论，特征线及特征方程为：

$$dv + \frac{2}{\gamma+1} da + \left( \frac{nav}{x} + \frac{v_*^2}{v_r^2 x^2} \right) dt = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v + a \quad (2.10)$$

$$dv - \frac{2}{\gamma-1} da - \left( \frac{nav}{x} - \frac{v_*^2}{v_r^2 x^2} \right) dt = 0, \quad \frac{dx}{dt} = v - a \quad (2.11)$$

我们将从(2.10)、(2.11)式出发，研究在  $\frac{v_*^2}{v_r^2} = 3.375$  的强引力场中，在  $x=1$  处，活塞以  $v_r=1$  的速度匀速运动所形成的初始间断随时间的发展。初始流场与坐标系的选取无关，在本文中用平面活塞运动的分析结果作为初值，研究在强引力场中不同坐标系的选取对初始流场及初始间断演化的影响。

### 三、计算结果及讨论

与普通气体动力学的结果类似，平面、柱面及球面活塞在强引力场中作匀速运动时，按流动特征可将流场分为三个区域（图1）。I，活塞前压缩区，以激波与静止恒星大气相联结。II，活塞后常流区，以一弱间断与稀疏区III分界。活塞为一稳定间断面，稀疏区的边界特征线以速度  $-a_r$  在静止恒星大气中传播。

首先分析无引力场作用时，平面、柱面、球面活塞运动的流场（图3、4）。对压缩区及常流区，按相似解的结果有：

$$\frac{dv}{d\xi} = \frac{a^2(\xi)}{[(v(\xi)-\xi)^2 - a^2(\xi)]} \frac{nv(\xi)}{\xi} \quad (3.1)$$

$$\frac{da}{d\xi} = \frac{(\gamma-1)a(\xi)(v(\xi)-\xi)nv(\xi)}{2\xi[a^2(\xi) - (v(\xi)-\xi)^2]} \quad (3.2)$$

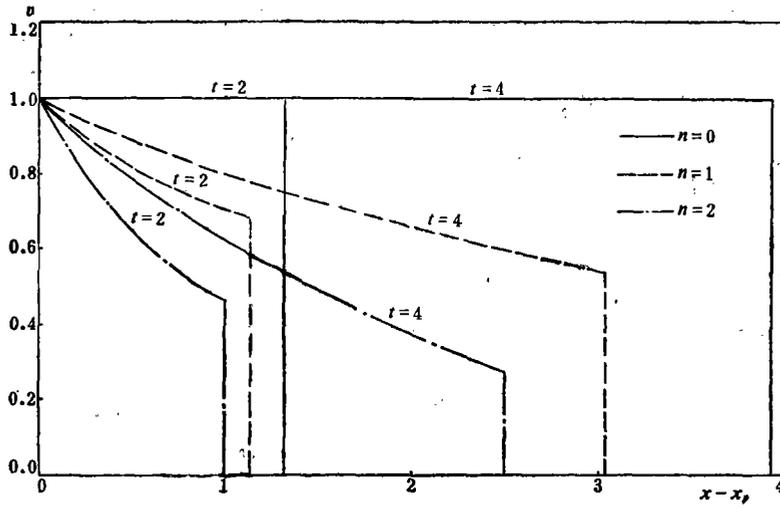


图 3 压缩区流速分布 (无引力场)

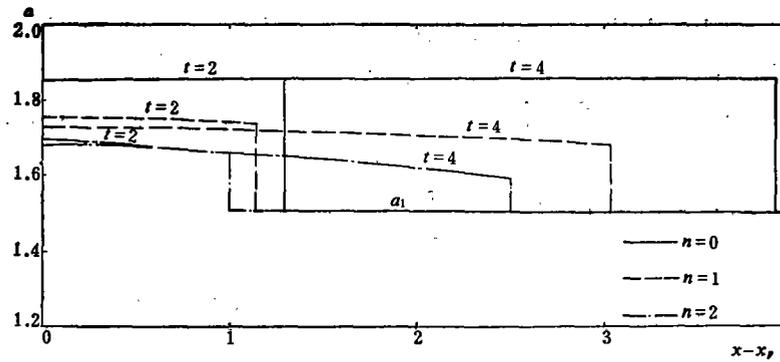


图 4 压缩区声速分布 (无引力场)

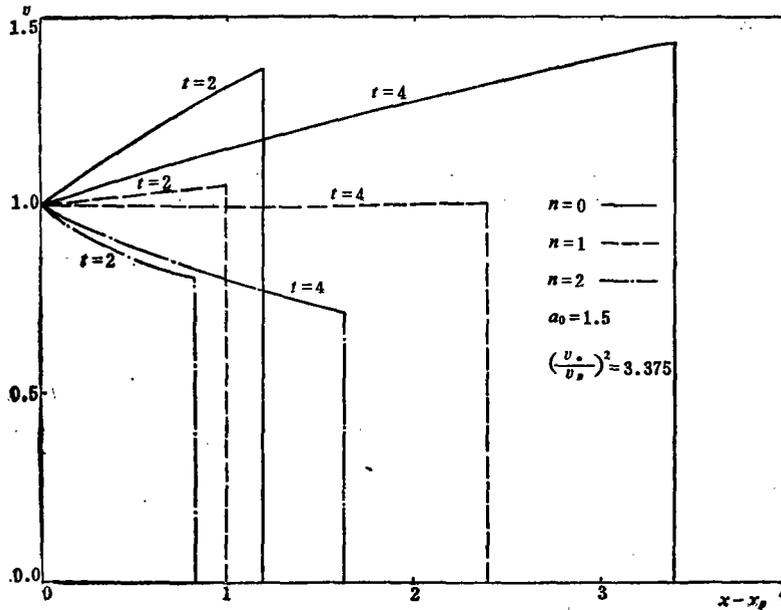


图 5 压缩区流速分布 (无引力场)

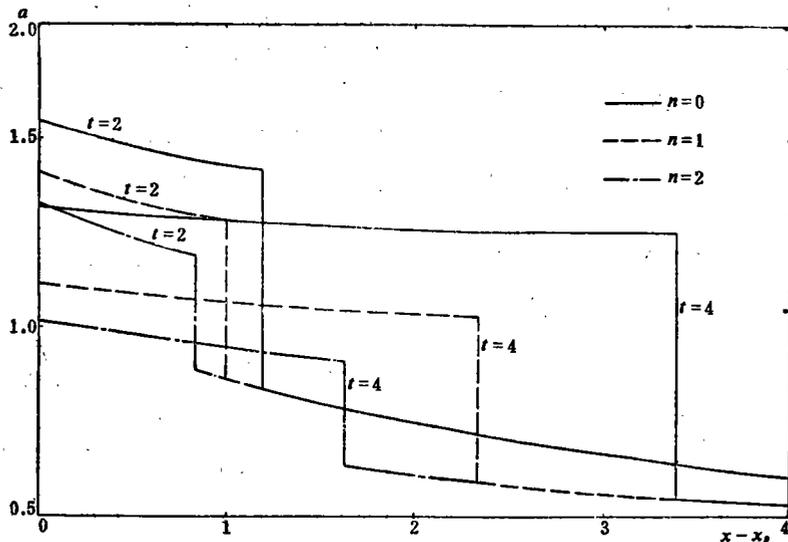


图 6 压缩区声速分布 (强引力场)

式中  $\xi = x/t$ , 平面活塞有  $n=0$ , 对应不变的流场。在  $v_p=1$ ,  $a_0=1.5$  时, 柱面、球面活塞的压缩区中  $\xi > 0$ ,  $v > 0$ ,  $a > 0$ ,  $v(\xi) < \xi$ , 且  $a^2 > (v(\xi) - \xi)^2$  所以  $dv/d\xi$  与  $da/d\xi$  均小于零。这是由于柱面及球面活塞前压缩区逐渐扩大, 将消耗流体质点的动能及内能, 使流速及声速沿活塞运动方向逐渐减小 (图3、4)。坐标系的影响反映在方程(2.1)中增加了  $n\rho v/x$  一项,  $n$  越大活塞前压缩区体积增加得越大。球对称活塞  $n$  值最大 ( $n=2$ ), 这就是为什么相应于同一时刻 (例如  $t=4$ ) 球面活塞运动有最低的流速及声速的原因。随着时间的增加, 活塞及压缩区越远离中心,  $x$  增大, 球、柱坐标系的影响将逐渐减弱, 因此  $t=\psi$  时刻的流速及声速分布曲线较  $t=2$  时坡度变缓。这也就决定了球面活塞将有最低的激波传播速度、最小的激波强度及最窄的压缩区, 激波传播速度随  $t$  的增加逐渐减小, 开始减小得很快, 最后接近于某一极限 (图1、2)。引力将使压缩区流体质点加速, 声速降低, 激波传播速度减小<sup>[6]</sup>。图5表明, 引力使平面活塞压缩区的流动加速, 但这影响随  $t$  的增加而逐渐减弱, 所以  $t=2$  的流速曲线高于  $t=4$  的结果。在我们的计算条件下, 球坐标系的影响大于引力场的作用。因此, 球面活塞压缩区流动减速, 并且  $t=\psi$  的速度曲线高于  $t=2$  的结果。这两种因素的综合将使压缩区声速及激波传播速度减小得更多。

常流区及稀疏区流场: 平面、柱面及球面活塞运动有相同的稀疏区边界。在无引力场作用时, 从稀疏区边界到活塞面, 与平面活塞相比球面活塞的流动区域体积膨胀, 消耗能量。活塞处流体质点的流速由活塞运动速度决定, 与坐标系的选取无关。因此在活塞面上, 球面活塞运动必然会有较低的声速 (图7、8)。从 (3.1)、(3.2) 式可以看出, 常流区中  $v > \xi$ ,  $(v - \xi)^2 < a^2$ , 所以  $dv/d\xi < 0$ ,  $da/d\xi > 0$ , 这就决定了某一时刻常流区的流速及声速变化趋势 (图7、8)。也就形成了稀疏区中的流速及声速分布。在球面活塞的弱间断面处应比活塞面有较高的总能量, 由 (3.2) 式决定此处流体质点的声速小于活塞面上的声速, 因此弱间断面上的流速必然较平面活塞运动的流速增加。在活塞后区域中弱间断面上有最高的流速及最小的声速。在强引力场作用下, 活塞后的流场如图9、10所示。不同的是, 从活塞面到稀疏区边界, 声速单调增加, 活塞面上流速最大, 在稀疏区边界附近存在一个与活塞运动反向流动的区域。

综上所述，球面活塞较平面活塞运动有较小的激波强度及激波传播速度，较窄的压缩区及常流区。压缩区的声速及流速减小，常流区及稀疏区流速增加，声速减小。引力场的影响将使压缩区流速增加，常流区及稀疏区流速减小，其余影响均与球面活塞对流场的影响相同。强引力场中，柱面、球面活塞运动的流场将受上述两个因素的影响。活塞扰动区流场中的各量将由恒星质量 $M$ ，活塞的起始位置，运动规律及坐标系的选取决定。

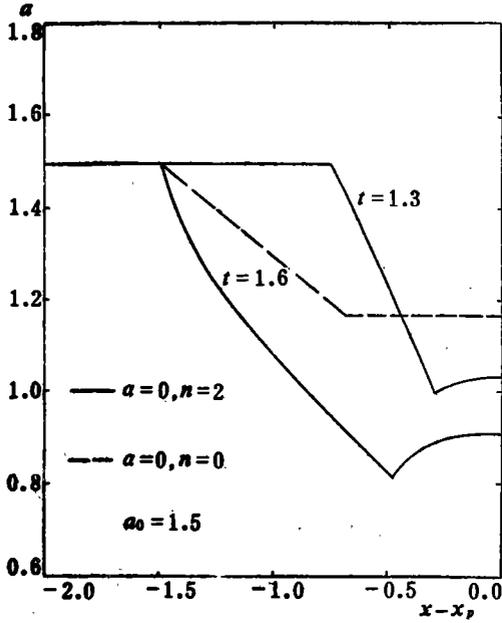


图7 活塞后声速分布 (无引力场)

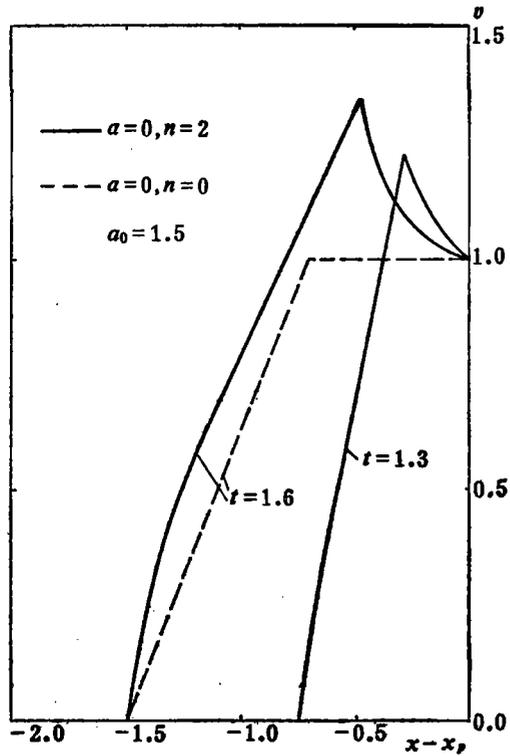


图8 活塞后流速分布 (无引力场)

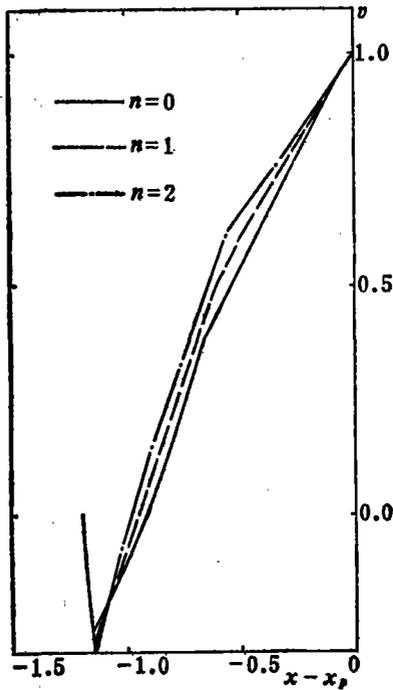


图9 活塞后流速分布 (强引力场)

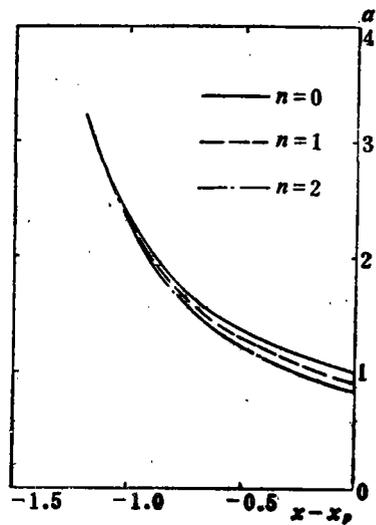


图10 活塞后声速分布 (强引力场)

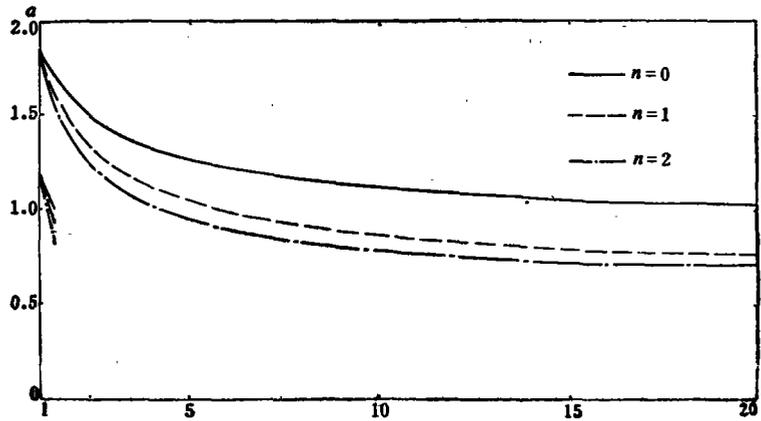


图11 活塞面上声速分布

我们将用这些结果来分析讨论不同形态的日冕瞬变现象,解释观测到的日冕瞬变现象中的密度分布和动力学特征<sup>[10,11]</sup>。这些结果可用于分析高密星周围所发生的爆发现象。

致谢 感谢胡文瑞同志的指导。

#### 参 考 文 献

- [1] Hu, W. R., The dynamical process of the coronal transient, XXIV Plenary Committee on Space Research, Ottawa (1982), 39.
- [2] Hu, W. R., The dynamical process of a coronal transient associated with an eruptive prominence, I. Basic mechanism, *Astrophys. and Space Sci.*, 92 (1983), 373.
- [3] Hu, W. R., The dynamical process of coronal transient associated with an eruptive prominence, II. Analytical solution in finite regions, *Astrophys. and Space Sci.*, 92 (1983), 395.
- [4] Седов Л. И., 《力学中的相似方法与量纲理论》, 科学出版社 (1982).
- [5] Белова А. В., 《气体动力学讲义》, 科学出版社 (1956).
- [6] 胡文瑞, 弱重力场中的平面活塞运动, *应用数学和力学*, 6, 1 (1985). (付印中)
- [7] 胡文瑞, 弱引力场中的柱面活塞过程, *数学物理学报* (付印中).
- [8] 唐泽眉, 弱引力场中活塞运动的球对称解, *力学学报* (1984).
- [9] 唐泽眉, 强引力场中活塞运动的球对称解, *力学学报* (待印).
- [10] Hu, W. R. and Z. M. Tang, The piston model of coronal transients, *Astrophys. and Space Sci.*, (1984).
- [11] 胡文瑞、唐泽眉, 环状日冕瞬变的活塞驱动理论, *天体物理学报* (送审).

## One-Dimensional Piston Process in Strong Gravitational Field

Tang Ze-mei

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)*

### Abstract

In this paper, the dynamic process driven by one-dimensional piston in strong gravitational field was studied on the Cartesian, cylindrical and spherical coordinates. The gasdynamic equations were numerically solved by the characteristic method. The solution which satisfies the velocity condition at piston and the boundary conditions connect the flow region and the quiet region is obtained. The present paper analyses especially the influence of coordinate systems on the field of compressible flow, uniform flow and rarefaction flow region, the shock velocity and the temperature distribution at the piston.