

快传播裂缝尖周围的温度场*

汪 懋 骅

(北京航空学院, 1982年11月22日收到)

摘 要

裂缝进入快传播时, 裂缝尖周围的温度升高是一个十分重要的实际问题, 它不仅取决于一些材料常数, 也取决于传播速度和热源的密度分布. 本文讨论了裂缝尖周围塑性区形状以及热源密度, 提出了一个温度场模型, 对 PMMA 材料进行了数值计算, 并将结果与其它理论和实验结果作了比较.

一、能 量 平 衡

裂缝的扩张进入快传播时, 裂缝尖端附近所集聚的能量将转化为很大热量, 使温度发生相当的升高, 快传播裂缝尖周围的温度场, 在给定的材料, 将取决于快速移动热源状况及其移动速度.

材料所具有的裂缝呈现逐步扩张直至最终断裂破坏期间, 弹性能将发生消耗 (即降低), 这可用 G 值 (裂缝扩张单位长度所释放的能量或称单位扩张力) 加以表示. 一般说来, 一个弹塑性裂缝尖的 G 值, 部份地消耗在附近周围的塑性做功, 部份地用于开创新的裂缝表面, 这可用 H . Andersson (1973, 1974) 所给出的一般裂缝尖条件加以说明.

图1中 I 部份表明远离裂缝尖的弹性场, II 部份为塑性变形范围, III 部份称端范围 (具有不连续性), 当裂缝向前推进一个微小距离时, 范围 II 中将进一步作塑性变形而耗散能量用 p 表示, 同时在端范围 III 中开创新的裂缝表面而耗去能量用 2γ 表示, 从能量平衡观点有

$$G = 2\gamma + p \quad (1.1)$$

但是作者认为 III 中所耗去的能量 2γ , 仅有部份 $2\alpha\gamma$ ($0 < \alpha \leq 1$) 为其正的创新表面能, 其余量 $2(1-\alpha)\gamma$ 仍耗于塑性功 (当然这一消耗的详细机理尚待探讨). 用 G_p 表示全部塑性功耗去的能量, 而用 G_{p2} 和 G_{p3} 分别表示在范围 II 和 III 中塑性功耗去的能量, 于是式 (1.1) 可写成

$$G = 2\alpha\gamma + G_p = 2\alpha\gamma + G_{p2} + G_{p3} \quad (1.2)$$

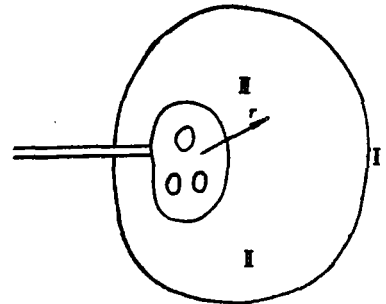


图 1

* 钱伟长推荐.

二、模 型

忽略热幅射损失，而热量全部散入试样内。Hans. Bergkuist (1973) 得出结论，快传播裂缝尖断裂能 G 取决于传播速度 v 。R. Weichert 和 K. Schönert (1974) 假定裂缝快传播速度为常数，热源移动每单位距离所产生的热量 Q 也为常数。

下面讨论二个问题：

1) 不可逆塑性范围的形状

目前对静态或稳定增长裂缝情形已有一些研究，但其结果不够统一。例如 J. R. Rice (1974) 考虑为以裂缝尖为顶点之扇形滑移；R. O. Ritchie, J. F. Knott 和 J. R. Rice (1973) 给出了从缺口根部发出的指数螺旋形（出自 R. Hill 的滑移线场理论 1950）；而 S. G. Lanson 和 A. J. Carlsson (1973) 给出了不甚规则的叶形；П. М. Витвицкий, В. Власюк 和 С. Я. Ярема 也有这方面的详细叙述。总之弹塑性裂缝尖周围的塑性范围形状将视材料，裂缝尖的钝锐度，不同的受荷状态而有所差异。至于快传播裂缝尖周围的塑性范围形状，目前研究更少，况且实验与理论也有相当差距，现在仅就准脆性断裂而论，以反平面剪切增长为典型，H. Andersson (1974) 所给出的裂缝尖周围塑性范围形状是半径为 ρ 的圆，如图所示。

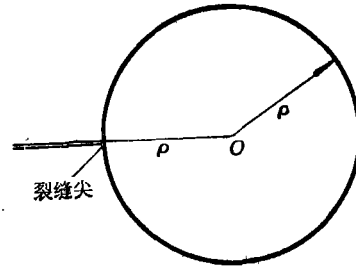


图 2

2) 热源密度

快传播裂缝尖周围发出的热量是由不可逆塑性功转换而来，以往的研究表明，确为 G 值。R. Weichert 和 K. Schönert (1974) 用 PMMA 材料研究，也确认此点。 G_1 发出的热量用 Q_1 表示，而 G_{r2} 和 G_{r3} 发出的热量分别用 Q_{r2} 和 Q_{r3} 表示。将 Q_{r3} 作为裂缝尖处的点热源，而将 Q_{r2} 在半径为 ρ 的塑性圆内进行密度分配。由于仅考虑准脆性断裂，所以线弹性断裂理论仍沿用有

$$\sigma_{ij} = K_I (2\pi r)^{-\frac{1}{2}} f_{ij}(\theta) \quad (2.1)$$

其中 K_I 为反平面剪切应力强度因子， r 和 θ 是以裂缝尖为顶点的极坐标； $f_{ij}(\theta)$ 为一般函数。

由此可假设塑性圆内热源密度为

$$q_s = \frac{c}{s} + a \quad (2.2)$$

其中 c 和 a 均为常数。

考虑到

$$Q_{r2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\rho} q_s 2\pi s ds \quad (2.3)$$

以及弹塑性交界的连续性有

$$q_{\rho} = 0 \quad (2.4)$$

由式(2.4)和(2.2)可知

$$a = -\frac{c}{\rho} \tag{2.5}$$

由式(2.3)和(2.5)得

$$Q_{r2} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_s^{\rho} \left(\frac{c}{s} + a \right) 2\pi s ds = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [2\pi cs + \pi as^2] \Big|_s^{\rho} = \pi c \rho$$

于是

$$c = \frac{Q_{r2}}{\pi \rho}$$

将此式代入式(2.5)而后一并代入式(2.2)有

$$q_s = \frac{Q_{r2}}{\pi \rho} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\rho} \right) \tag{2.6}$$

这就是塑性圆内的热源密度分布式。

三、解 答

以 x 和 y 为笛卡尔坐标, 考虑时间 t , 由热传导方程可知

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\phi}{k} = \frac{1}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial t} \tag{3.1}$$

其中 k 为导热系数, λ 为热扩散系数。

$$\phi = \begin{cases} q_s v & \text{在塑性圆内} \\ 0 & \\ Q_{r2} v & \text{在裂缝尖点处} \end{cases}$$

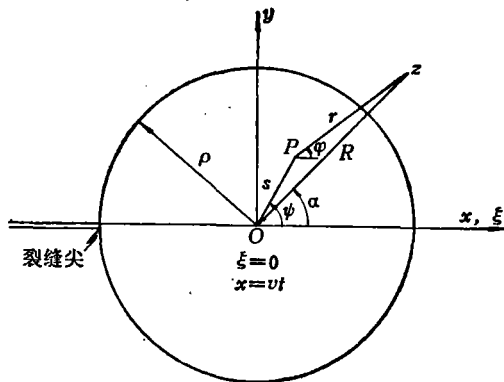


图 3

裂缝沿 x 轴正向移动, 因而可用流动笛卡尔坐标代之, 即 (伽利略变换)

$$\xi = x - vt$$

由此, 问题成为静定情形, 新的坐标系原点在塑性圆心, 如图 3 所示。

那末式(3.1)成为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\phi}{k} = -\frac{v}{\lambda} \frac{\partial T}{\partial \xi} \tag{3.2}$$

而边界条件是

$$\phi = \begin{cases} q_s v & \text{当 } (\xi^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = s < \rho \\ 0 & \\ Q_{r2} v & \text{在 } \xi = -\rho, y = 0 \text{ 处} \end{cases} \tag{3.3}$$

当 $s \rightarrow \infty$ 时 $T \rightarrow T_0$ 。

作为点热源式 (3.2) 之解答是 (D. Rosenthal, 1946)

$$T - T_0 = \bar{Q} \frac{v}{2\pi k} \exp\left(-\frac{v\gamma}{2\lambda} \cos\varphi\right) k_0\left(\frac{v\gamma}{2\lambda}\right) \quad (3.4)$$

其中, \bar{Q} 为点热源强度; k_0 为第二类修正 (变形) 零阶 Bessel 函数, 即

$$k_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \left[\sum_{n=1}^m \frac{1}{n} - c - \ln \frac{z}{2} \right] \quad (z > 0)$$

而欧拉常数 $c = 0.57721566490 \dots$

于是由裂缝尖点处点热源 Q_{p_3} 产生的温升在任意点 z 处是

$$\begin{aligned} \Delta T_{p_3} &= Q_{p_3} \frac{v}{2\pi k} \exp\left[-\frac{v}{2\lambda} (R \cos\alpha - \rho \cos 180^\circ)\right] \\ &\quad \cdot k_0\left[\frac{v}{2\lambda} (R^2 + \rho^2 - 2R\rho \cos(180^\circ - \alpha))\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{vQ_{p_3}}{k} \frac{1}{2\pi} \exp\left[-\frac{v\rho}{2\lambda} \left(\frac{R}{\rho} \cos\alpha + 1\right)\right] k_0\left[\frac{v\rho}{2\lambda} \left(\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 + 1 + 2\frac{R}{\rho} \cos\alpha\right)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{vQ_{p_3}}{k} H\left(\frac{R}{\rho}, \alpha, \frac{v\rho}{2\lambda}\right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

至于塑性圆内热源产生的温升, 如下可得. z 为要求之任意点, 有

$$\gamma^2 = R^2 + s^2 - 2Rscos(\psi - \alpha), \quad \gamma \cos\varphi = R \cos\alpha - s \cos\psi \quad (3.6)$$

据式(2.6), (3.4) 和 (3.6) 塑性圆内点热源 (P 点处) 所引起的温升是

$$\begin{aligned} dT_{p_2} &= \frac{Q_{p_2} v}{2\pi^2 k \rho} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{\rho}\right) \exp\left[-\frac{v}{2\lambda} (R \cos\alpha - s \cos\psi)\right] \\ &\quad \cdot k_0\left[\frac{v}{2\lambda} (R^2 + s^2 - 2Rs \cos(\psi - \alpha))\right]^{\frac{1}{2}} s d\psi ds \end{aligned} \quad (3.7)$$

对式(3.7)在塑性圆上积分可得 z 点处温升

$$\Delta T_{p_2} = \frac{vQ_{p_2}}{k} I\left(\frac{R}{\rho}, \alpha, \frac{v\rho}{2\lambda}\right) \quad (3.8)$$

其中

$$\begin{aligned} I\left(\frac{R}{\rho}, \alpha, \frac{v\rho}{2\lambda}\right) &= \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left\{ (1 - \sigma) \exp\left[-\frac{v\rho}{2\lambda} \left(\frac{R}{\rho} \cos\alpha - \sigma \cos\psi\right)\right] \right. \\ &\quad \left. \cdot k_0\left[\frac{v\rho}{2\lambda} \left(\left(\frac{R}{\rho}\right)^2 + \sigma^2 - 2\frac{R}{\rho} \sigma \cos(\psi - \alpha)\right)\right]^{\frac{1}{2}} \right\} d\psi d\sigma \end{aligned} \quad (3.9)$$

此处

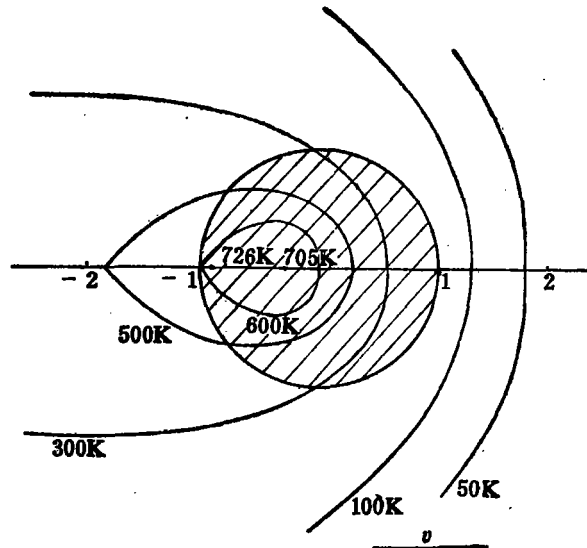
$$\sigma = \frac{s}{\rho}$$

由式(3.5)和(3.8)可求得 z 点处总的温度升高

$$\begin{aligned} \Delta T &= \Delta T_{p_2} + \Delta T_{p_3} \\ &= \frac{vQ_{p_2}}{k} I\left(\frac{R}{\rho}, \alpha, \frac{v\rho}{2\lambda}\right) + \frac{vQ_{p_3}}{k} H\left(\frac{R}{\rho}, \alpha, \frac{v\rho}{2\lambda}\right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

四、数值结果

对PMMA材料, 据式(3.10)进行温升数值计算, k 和 λ 值取自文献[13], 其余数据取自文献[3]和[14]. 计算出的结果绘制成等温线, 见图4. 最高温升与其它理论和实验结果(取自文献[14])的比较见表1. 其中实验值系温升平均值(决非算术平均), 但很接近最大值. 因此真实的最高温升略大于表中所列实验值. 由于测量系统误差, K. N. G. Fuller(1972)证明将不会超过 100°K .



$v=200\text{m/s}$, $\rho=30\text{\AA}$, $Q_{p1}=4\times 10^3\text{erg/cm}^2$, $Q_{p2}=16\times 10^3\text{erg/cm}^2$. 阴影区为塑性区

图 4

表1

最高温升 (单位: K)

v	ΔT_{max}	文献[11]	文献[3]	文献[14]	本文	实验
200m/s		210	910	1200左右	726*	535
640m/s		-	-	-	508**	465

* 若 $Q_{p1}=0$, $Q_{p2}=2\times 10^4\text{erg/cm}^2$, $\rho=30\text{\AA}$, 则为 807°K ;

** $v=640\text{m/s}$, $\rho=115\text{\AA}$.

参 考 文 献

- [1] Andersson, H., A finite-element representation of stable crack-growth, *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 5 (1973), 337-356.
- [2] Andersson, H., Finite element treatment of a uniformly moving elastic-plastic crack tip, *J. Mech. Phys. Solids*, 22, 4 (1974), 285-308.
- [3] Weichert, R., On the temperature rise at the tip of a fast running crack, *J. Mech. Phys. Solids*, 22, 2 (1974), 127-133.
- [4] Bergkuit, Hans., The motion of a brittle crack, *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 4

- (1973), 229—239.
- [5] Rice, J. R., Limitations to the small scale yielding approximation for crack tip plasticity, *J. Mech. Phys. Solids*, 22, 1 (1974), 17—26.
- [6] Ritchie, R. O., J. F. Knott and J. R. Rice, On the relationship between critical tensile stress and fracture toughness in mild steel, *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 8 (1973), 395—410.
- [7] Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford (1950).
- [8] Lasson, S. G. and A. J. Carlsson, Influence of non-singular stress terms and specimen geometry on small-scale yielding at crack tips in elastic-plastic materials, *J. Mech. Phys. Solids*, 21, 4 (1973), 263—277.
- [9] Vetvebkee, B. M., V. V. Bencuk and A. J. Jaremei, 裂纹尖端周围的变形和破坏准则, 力学译丛, 2, 3(1974).
- [10] Watson, G. N., *A Treatise on the Theory of Bessel Function*, (Second Edition) Cambridge University Press, London (1944).
- [11] Kambour, R. P. and R. E. Barker, Mechanism of fracture in glassy polymers, IV Temperature rise at the tip of propagating crack in poly (Methyl Methacrylate), *J. Polymer Sci.*, A-2, 4, 3(1966), 359—363.
- [12] Levy, N. and J. R. Rice, In *Physics of Strength and Plasticity* (Ed. A. S. Argon), Cambridge, Mass, M. I. T. Press (1969), 277.
- [13] Touloukian, Y. S., *Thermophysical Properties of High Temperature Solids Material*, 4 (1967).
- [14] Fuller, K. N. G., G. Fox and J. E. Field, The temperature rise at the tip of fast-moving cracks in glassy polymers, *Proceeding of the Royal Society A341*, 1672 (1975), 537—557.
- [15] Rosenthal, D., The theory of moving sources of heat and its application to metal treatments, *Trans. A. S. M. E.*, 68, 8 (1946), 849—866.

The Temperature Fields Around the Tip of a Fast Running Crack

Wang Mao-hua

(Beijing Institute of Aeronautical Engineering, Beijing)

Abstract

When a crack is running, the temperature rise is a quite important actual problem, which not only depends on some material constants, but also on the propagation velocity and the distribution of the heat resource density. In this paper, on the shape of plastic zone around the crack tip and the density of heat resource have been discussed and the model of the temperature fields has been proposed. The numerical results with PMMA have been given and compared with other theories and experimental results.