应用数学和力学，第5卷第6期（1984年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

不动泛系定理中结构与数量的特征描述*

李贵华

（武汉数字工程研究所，1984年1月16日收到）

摘　要

泛对称是物理等学科中对称性、稳定性等概念的轴象概括．不动泛系定理刻划了系统结构的一种典型的泛对称性．本文补充并推广了[1]～[3]中有关不动泛系定理的工作，对有限的情形给出了不动子集的结构特征，最小不动子集的存在准则，以及不动子集与极小不动子集的计数公式．

不动泛系定理描述了系统结构的一种典型的相对不变性．在物理学中，这种结构不变性表现为和黑洞、稳定与振荡、突变与渐变等现象有关的周期性、稳定性、吸收性、封闭性、守恒性等一些特化的泛对称．因此，有关不动泛系定理的更深入的探讨是有实际意义的．

采用泛系关系和泛系算子来研究不动子集可提供一大类不动泛系定理．[1]～[3]在这方面做了许多工作，对有限的情形给出了一类不动子集的存在准则，以及一个特殊转化下的不动子集的数量公式．本文对此作了补充与推广，在一般情况下给出了不动子集的结构与数量特征，建立了在计算机理论等学科中有重要意义的最小不动子集的存在准则．

设G是一个给定的集；$f\subseteq G^2$．我们知道，如果$|G|<\infty$，那么f有不动子集的充要条件是

$$f^t\cap f^{(0)}\neq\phi^{[3]}$$

在本文中，若无另外的说明，均假定$|G|<\infty$．

作集合

$$X\triangleq\{x|(x\in G)\wedge(x\in x\circ f^t)\}$$

对$G'\subseteq G$，G'的指标集$X_{G'}$定义为

$$X_{G'}\triangleq X\cap G'$$

定理1　$X_{G_{i_0}}=X_{G_i}$，其中$G_i\in G/\delta_1(f)$，$G_{i_0}=\bigcap\limits_{n\geq1}G_i\circ f^{(n)}$．

证明　很明显，由$G_{i_0}\subseteq G_i$而有$X_{G_{i_0}}\subseteq X_{G_i}$．取$X_{G_i}$中一个任意的元素$x$．因$(x,x)\in f^t$，$x\in G_i$，所以有某个自然数$n$使得$(x,x)\in f^{(n)}$．于是对任意的$m(\in N)$，存在$n$，使$m\leqslant n$且$x\in G_i\circ f^{(n)}$．$\{G_i\circ f^{(n)}\}$是单调降的，所以$x\in\bigcap\limits_{n\geq1}G_i\circ f^{(n)}=G_{i_0}$．这实际上是说$X_{G_i}\subseteq X_{G_{i_0}}$．

* 吴学谋推荐．

如果$X_{G_i}=\phi$，那么$X_{G_{i_0}}$也是ϕ；而当$X_{G_{i_0}}=\phi$时，若有$x\in X_{G_i}$，则必有$x\in X_{G_{i_0}}$。因此，两个集中的任一个为空集时，它们总是相等的。

定理 2 若$X_{G_1}=X_{G_2}$，且G_1，$G_2\in P_f$，那么$G_1=G_2$。

这表明，两个不动子集相同的充要条件是它们的指标集相等。

定理 3

(1) 如果$G'\in P_f$，那么 $G'^2\cap f^t\cap f^{(t)}\neq\phi$；

(2) $\{x\circ f^t|x\in X\}\subseteq P_f$。

对于$G'(\in P_f)$，它可以写成如下形式

$$G'=\bigcup y\circ f^t \qquad (y\in G')$$

注意$y\circ f^t$不一定在P_f中（即使$y\circ f^t\neq\phi$）。然而，至少存在一个$x(\in X_{G'})$使得$x\circ f^t\in P_f$。

对于不动子集，上式给出了它的一个近似结构。下面我们给出一个更精确的描述，也表明我们为何称$X_{G'}$为G'的指标集。

定理 4 任何一个不动子集G'均可表为

$$G'=\bigcup x\circ f^t \qquad (x\in X_{G'})$$

即

$$G'=X_{G'}\circ f^t$$

证明 取$y\in G'$。作序列

$$\{y_i|i\in N\}$$

其中$y_0=y$，$y_i\in f\circ y_{i-1}$。则一定存在i,j $(i>j)$使$y_i=y_j$。显然$y_i\in X_{G'}$，$(y_i, y)\in f^{(t)}\subseteq f^t$。所以$G'\subseteq\bigcup x\circ f^t(x\in X_{G'})$。再由前面的表达式即知命题成立。

因对任意的$x\in X_{G'}$，都有$x\circ f^t\in P_f$，所以定理是说任何一个不动子集均可分解成形如$x\circ f^t$的不动子集之并，这里x是G'的指标。这暗示着P_f与X存在某种结构与形式关系。后面我们将定性与定量地描述这种关系。

从[3]我们知道，G'可写为

$$\bigcup(G'\cap G_i)$$

这里$G'\cap G_i$也是一个不动子集（如果$G'\cap G_i\neq\phi$）。一般地，即使$x\circ f^t\subseteq G_i$，我们也不一定有$G'\cap G_i=x\circ f^t$；但存在X'_i，$\phi\neq X'_i\subseteq X_{G'}$，使得

$$G'\cap G_i=\bigcup x\circ f^t \qquad (x\in X'_i)$$

实际上X'_i可取为$X\cap G'\cap G_i$（即$X_{G'\cap G_i}$）。

因此我们有

推论 如果$G'\in P_f$，那么对$G_i\in G/\delta_1(f)$

$$G'\cap G_i=\bigcup x\circ f^t \qquad (x\in X_{G'\cap G_i})$$

所以"G_{i_0}中的不动子集是最基本的"[3]说法是不严格的。形如$x\circ f^t$的不动子集才是最原始的。

我们称

$$\{x\circ f^t|x\in X\}$$

为P_f的基。

[3]讨论了不动子集与极小不动子集的个数，所给的结果要求很强的条件。下面我们在一般的条件下给出这些不动子集的数目。

记X^*为X的满足下列条件的非空子集X'的全体：

$$X'\circ f^t\cap X\subseteq X'$$

则我们有

定理 5 $|P_f|=|X^*|$.

证明 设$G'\in P_f$。相应地我们有$X_{G'}$. 作

$$X'=\{x\mid(x\in X_{G'})\wedge(\neg y\in X_{G'}(x\circ f^t\subsetneq y\circ f^t))\}$$

即X'由$X_{G'}$中使$x\circ f^t$极大的x组成。我们要证明，$X'\in X^*$。

实际上，取$y\in X'\circ f^t\cap X$. 则存在$x\in X'$，使$(x,y)\in f^t$. 可以证明当$x,y\in X$时，$y\circ f^t\subseteq x\circ f^t$的充要条件是$(x,y)\in f^t$. 所以$y\circ f^t\subseteq x\circ f^t$；由$X'$的定义，$y\circ f^t=x\circ f^t$. 而$y\in X_{G'}$. 所以最终有$y\in X'$.

X'一定不是空集. 事实上，任取$x\in X_{G'}$，并设存在$x_1\in X_{G'}$，使$x\circ f^t\subset x_1\circ f^t$. 显然，$x_1\circ f^t\subseteq G'$. 对$x_1$再设有$x_2\in X_{G'}$，使$x_1\circ f^t\subset x_2\circ f^t$. 于是当$X'=\phi$时存在序列$\{x_n\}$，

$$x\circ f^t\subset x_1\circ f^t\subset\cdots\subset x_n\circ f^t\subset\cdots$$

而每一个又是有界的

$$x_n\circ f^t\subseteq G'$$

这是不可能的。所以$X'\neq\phi$.

作映射

$$\varphi: P_f\to X^*$$
$$\varphi(G')=X'$$

这是一个双射. 实际上，我们可以写

$$G'=\bigcup x\circ f^t\qquad(x\in X')$$

所以对G'，G''，当$X'=X''$时$G'=G''$，即φ是单射；而对任意的$X_i'\in X^*$，不动子集

$$G'=\bigcup x\circ f^t\qquad(x\in X_i')$$

所对应的X'恰好为X_i'. 关系式$X_i'\subseteq X'$是明显的. 取$y\in X'$，存在$x\in X_i'$使$(x,y)\in f^t$. 由X_i'的定义易有$y\in X_i'$. 所以有等式$X'=X_i'$. 这就是说，φ是映上的. 因而φ是一个双射.

所以当$P_f\neq\phi$时，$|P_f|=|X^*|$.

如果$P_f=\phi$，即f无不动子集，这时$X=\phi$. 自然也有$X^*=\phi$. 这样，无论f有否不动子集，上述势的关系式总是成立的.

现在我们来给出极小不动子集数目的计算公式. 为此我们引进下面的几个符号

$$f^*\triangleq X^2\cap f^t\cap f^{-t}$$

$$Y\triangleq\{X_i\mid(X_i\in X/\delta_1(f^*))\wedge((f^t-f^{-t})\cap(X_i\times X)\neq\phi)\}$$

定理 6 $|P_{mf}|=\|\delta_1(f^*)\|-|Y|$.

证明 如果$P_{mf}=\phi$，而$P_f\neq\phi$，则有不动子集序列$\{G_i'\}$，其中

$$G_i'\subsetneq G_{i-1}'$$

这与"G是有限的"假设矛盾. 所以只能有$P_f=\phi$. 从而$X=\phi$. 最后导致$\|\delta_1(f^*)\|=0$，$|Y|=0$.

现在假定$P_{mf}\neq\phi$. 设$G'\in P_{mf}$，则$(x,y)\in X^2_{G'}$的充要条件是

(1) $(x,y)\in X^2$；

(2) $G'=x\circ f^t=y\circ f^t$.

我们来证明

(1) $X_{G'}\circ f^*=X_{G'}$，即每一个$X_{G'}$是f^*的不动子集；

(2) $X_{G'}\bar{\in}Y$。

首先，若$(x,y)\in X_{G'}$，则有$(x,y)\in f^t\cap f^{-t}$。所以$X^2_{G'}\subseteq f^*$，$X_{G'}\subseteq X_{G'}\circ f^*$。对任意的$x\in X_{G'}$，$y\in x\circ f^*$，有$x\circ f^t=y\circ f^t$。因$G'\in P_{mf}$，所以$G'=x\circ f^t=y\circ f^t$。由此即得$y\in X_{G'}$。于是(1)中的等式成立。

(1) 实际上是说

$$X_{G'}\in X/\delta_1(f^*)$$

这里要注意的是

$$\delta_1(f^*)=f^*\cup f^{(0)}$$

(我们也用$f^{(0)}$表示X^2中的恒等关系)。

为证明$X_{G'}$不在Y中，我们取$(x,y)\in X_{G'}\times X$。$x\neq y$。令$(x,y)\in f^t$，则有

$$x\circ f^t=y\circ f^t(=G')$$

所以$(y,x)\in f^t$，即有

$$(x,y)\in X^2\cap f^{-t}\cap f^{-t}=f^*$$

所以$X_{G'}\bar{\in}Y$.

有了以上的准备后，我们来证明

$$|P_{mf}|=|X/\delta_1(f^*)|-|Y|$$

作

$$\theta: P_{mf}\to X/\delta_1(f^*)-Y$$

$$\theta(G')=X_{G'}$$

因$G'\neq G''$时$X_{G'}\neq X_{G''}$，所以θ是一个单射。对任意的$X_j\in X/\delta_1(f^*)-Y$，设

$$G'=\bigcup x\circ f^t \qquad (x\in X_j)$$

显然$G'\in P_f$。我们要证明，对任意的$x\in X_j$,

$$G'=x\circ f^t$$

从而$G'\in P_{mf}$。

首先对$x,y\in X_j$，$x\neq y$，有$(x,y)\in f^*$。所以$x\circ f^t=y\circ f^t$。即G'可写为$x\circ f^t$的形式。再取$G''\subseteq G'$，并令$G''\in P_{mf}$(注意，任何一个不动子集必含有一个极小不动子集)。这时存在$z\in X_{G''}$使

$$G''=z\circ f^t$$

因$z\in y\circ f^t$，而$X_j\bar{\in}Y$，所以$(y,z)\in f^*$。这就是说，$z\in X_j$。因而$G''=G'$，即$G'\in P_{mf}$。

为要说明θ是满射，我们还要证明

$$X_{G'}=X_j$$

很明显，$X_j\subseteq X_{G'}$。取$z\in X_{G'}$，则有$G'=z\circ f^t$。由类似于前面的过程最终可得$z\in X_j$，即$X_{G'}\subseteq X_j$。因而θ是一个满射。

于是

$$|P_{mf}|=|X/\delta_1(f^*)|-|Y|$$

或简单地写为

$$|P_{mf}|=\|\delta_1(f^*)\|-|Y|$$

要注意的是，$\delta_1(f^*)$是X上的二元关系。

由上述的证明过程我们总结出如下结论：

1．任何一个极小不动子集可以写成如下形式

$$x\circ f^{t};$$

2．极小不动子集所对应的指标集是等价关系 $\delta_1(f^*)$ 所诱导出的商系统中的一个元，并且不在Y中；

3．对任意的$G'\in P_{mf}$，有$X_{G'}\in P_{f^*}$，亦即极小不动子集的指标集是f^*的一个不动子集；

4．$X/\delta_1(f^*)-Y$中的任意元必是某个极小不动子集的指标集；

5．$X/\delta_1(f^*)-Y\subseteq X^*$.

最后一点需要另外证明，因为它并非可由前面明显地看出．我们取 $X_j\in X/\delta_1(f^*)-Y$．显然X_j非空．设 $y\in X_j\circ f^t\cap X$，则存在$x\in X_j$使$(x,y)\in f^t$．因$X_j\bar{\in}Y$，所以$(x,y)\in f^{-t}$．于是有$(x,y)\in f^*$，即$y\in X_j$．上式得证．

我们猜测，一般地，

$$X^*\neq X/\delta_1(f^*)$$

这是由于对$X'\in X^*$，$(x,y)\in X'$，我们一般没有$(x,y)\in f^*$.

[3]在f为赋形的条件下给出了不动子集与极小不动子集数目的计算公式．在这个条件下我们将看到它们与定理 7 是一致的．

定理 7 设 f 为赋形．则映射

$$\psi:\ P_f\to P(G/\delta_1(f))-\{\phi\}$$
$$\psi(G')=\{G_i\,|\,(G_i\in G/\delta_1(f))\wedge(G_i\cap G'\neq\phi)\}$$

是双射．因此

$$|P_f|=2^{\|\delta_1(f)\|}-1,\quad |P_{mf}|=\|\delta_1(f)\|^{[3]}$$

定理的证明需要下列引理[3]．

引理 当 f 是赋形时，$G_{i_0}\in P_{mf}$．所以 $G'\cap G_i=G_{i_0}$（对所有 i）．

当 $G'\neq G''$ 时，若 $\psi(G')=\psi(G'')$，则

$$G'=\bigcup(G'\cap G_i)=\bigcup(G''\cap G_i)=G''$$

因此 ψ 是单射．对$H\subseteq G/\delta_1(f)$，$H\neq\phi$，作

$$G'=\bigcup G_{i_0}\qquad(G_i\in H)$$

那么 $G'\in P_f$，而且 $\psi(G')=H$ $(G'\cap G_i=G_{i_0})$．所以 ψ 又是映上的．定理证毕．

我们看到：

1．$|P(G/\delta_1(f))|=|P(\{G_{i_0}|G_i\in G/\delta_1(f)\})|$;

2．$P_{mf}=\{G_{i_0}\}$;

实际上，对 $G'\in P_{mf}$，$|\psi(G')|=1$．所以有 G_i 使

$$G'=G'\cap G_i=G_{i_0}$$

3．$|X^*|=2^{\|\delta_1(f)\|}-1$.

在许多时候，我们需要考虑最小不动子集的存在性及其结构[4]~[6]．如果G'是最小不动子集，则对任意的$x\in X_{G'}$，我们可以把G'写成$x\circ f^t$．因此下面主要讨论最小不动子集的存在准则．

定理 8 设 $G'\subseteq G$．则 G' 是 f 的最小不动子集的充要条件是存在 $x\in G'$ 使

$$G'=x\circ f^t,\quad X\subseteq f^t\circ x$$

由此我们有

定理 9 （最小不动子集的存在准则） f 有最小不动子集的充要条件是存在 x 使得

$$x \in X \subseteq f^t \circ x$$

在[4]中，当 f 是一个可近似映射时，$(\Delta,\Delta) \in f$，而且对Δ总有

$$D \subseteq f \circ \Delta$$

所以 f 有最小不动子集，而且可写为$\Delta \circ f^t$．显然，“f 为可近似映射”这个条件是很苛刻的．

上面的结果可概括为（均假定$|G|<\infty$）：

1．任一不动子集G'可写为

$$\bigcup x \circ f^t (x \in X_{G'})$$

2．任一极小不动子集G'可写为

$$x \circ f^t (x \in X_{G'})$$

3．f 有最小不动子集的充要条件是存在 x 使

$$x \in X \subseteq f^t \circ x$$

4．$|P_f| = |X^*|$；

5．$|P_{mf}| = \|\delta_1(f^*)\| - |Y|$；

6．如果 f 为赋形，则

（1） $|P_f| = 2^{\|\delta_1(f)\|} - 1$；

（2） $|P_{mf}| = \|\delta_1(f)\|$[3]．

从上面的讨论可以看出，无论是不动子集的结构，还是不动子集的数目，最终归结为 f^t 的计算．如果 f 为映射，则不动子集的构造过程与形式和泛函分析中 Banach 不动点定理的证明中不动点的构造与形式几乎一样．实际上，不动点由序列$\{x_n\}$，

$$x_n = A^n x_0$$

的极限给出，即 $\lim A^n x_0$；而我们的不动子集为$x \circ f^t$（当 f 为映射时，它是一个单点集），或写成 $\lim x \circ f^{(n)}$．在我们的讨论中，不需要度量空间、压缩映照等假设．

f^t 描述了物理、化学或其它一些过程的稳定性，渐变性，封闭性，以及某些过程的循环特征．

f^t 的形成是一个用有限逼近无限的过程．如果我们把 f^t 看成递归方程

$$f^{(1)} = f, \quad f^{(n+1)} = f \circ f^{(n)}$$

的一个最小解（在类$T[G]$中），则f^t 的构造只是一般的区域（或论域）构造的特殊情形[6]．我们有时只生成f^t的足量的子集，因为在一个实际问题中我们往往难于全部给出 f^t 而只能讨论一个适当的子集．一个例子是程序设计语言的生成．这时 f 即是语法所规定的产生式集．几个可能产生的问题是：我们怎样预计所需要的子集的具体形式；一个给出的子集可以解决一类怎样的问题．在计算机语言的设计中，这两个相关的问题都是需要解决的，而且几乎全是围绕它们来展开的．又如，邻域理论是 Scott 建立的指称语义学的数学基础[4]．其中一个重要内容即是最小不动点的存在及构造．如果f是一个可近似映射，则$\{\Delta \circ f^{(n)} | n \in N\}$即$\Delta \circ f^t$为 f 的最小不动点．而满足$f = f^{(2)}$ 即 $f^t = f$ 的可近似映射也是邻域理论所要讨论的（f称为 retraction）．

综上所述，f^t（传递包）在计算机理论与应用及物理、化学等的研究中有着潜在的作用．有必要探讨它的更深刻的内容．

参 考 文 献

[1] Wu Xue-mou, Pansystems methodology: Concepts, theorems and applications (Ⅴ)～(Ⅶ), *Science Exploration*, 4 (1983), 1. 3 (1984).

[2] Wu Xue-mou, Fixed pansystems theorems and pansystems catastrophe analysis of pan-weighted network, *Research and Review of Mathematics*, 2 (1984).

[3] 高隆颖、王书基，泛对称与不动泛系定理，应用数学和力学，5，5 (1984).

[4] Scott, Dana, *Lectures on a Mathematical Theory of Computation*, Oxford University Press (1981).

[5] Stoy, Joseph E., *Denotational Semantics: The Scott-Strachey Theory*, MIT Press (1977).

[6] Tennent, R. D., *Principles of Programming Languages*, PHI Press (1981).

The Description of the Characteristics of the Structure and the Quantity in Fixed Pansystems Theorems

Li Gui-hua

(*Wuhan Digital Engineering Institute. Wuhan*)

Abstract

Pansymmetry is the abstract of symmetry, stability and other concepts in physics and so on. Fixed pansystems theorems portray a typical pansymmetry of systemic structure. The present paper complements and extends the work in [1]～[3] concerned in fixed pansystems theorems. It gives in finite case the structural character of fixed subsets, the criterion of existence of the least fixed subset, and the numbering formula of fixed subsets and minimal fixed subsets.