

三维J积分的能量原理

陈 至 达

(中国矿业学院, 1983年10月18日收到)

摘 要

目前三维J积分存在着一些不同观点的表达式. 本文利用普遍的势能原理和Green定理导出三维J积分的表达式. 文中并简要说明它的物理意义和工程应用方法; 结果对于微小变形和大变形均适用.

一、引 言

二维不变积分式首先是 Eshelby^[1](1956) 提出的. 以后 Rice^[2](1968) 和 Черепанов^[3](1967) 分别用于断裂力学研究; 如积分路径是绕裂纹顶端取的, 积分值就等于裂纹扩张的势能释放率. 近年来对三维J积分的推导不断有一些研究, 例如参见[4]、[5]、[6]及其他等. J积分实质上是能量积分, 本文将用一般的势能变分原理(参见[7]、[8]、[9])来推导三维J积分. 因为能量原理是普适的, 不论对于微小变形或大变形、弹性或塑性都适用; 但能量密度函数计算基础有所不同. 所以采用能量原理来建立三维J积分, 将使得这个非常有用而重要的断裂力学公式放在可靠的数学基础上.

再之, 所谓裂纹顶端的奇异性是数学处理方法上的限制所形成. 从物理本质言, 裂纹顶端的应力是有限度的, 应变能密度也不可能无穷大. (实验观察裂纹顶端的弹塑性大变形方法可参见[10]). 因此, 实际能量积分途径可以包含顶端特区, 无需将它当作极点处理.

二、二维J积分的意义

我们在平面P, 定义单位厚度的总势能泛函Π为

$$\Pi = \iint_A W(x, y) dx dy - \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} ds \quad (2.1)$$

上式中Γ是从裂纹下表面到上表面的任一围线, A是Γ曲线包围的区域. W(x, y)是形变能密度函数. T是Γ外部作用在Γ上之力, u是Γ上的位移矢量.

设Γ沿着x轴方向平行移位至Γ', 则有Π对x之变化率:

$$\frac{\delta \Pi}{\delta x} = \iint_A \frac{\partial W}{\partial x} dx dy - \int_{\Gamma} \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds = \int_{\Gamma} \left[W(x, y) dy - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} ds \right] \equiv J \quad (2.2)$$

上式的力学意义相当于当裂纹长度(沿x轴方向)缩减δx时, 总势能的变化率. 但(2.2)式右边就是J积分的定义, 令裂纹长度l为自变量, 按(2.2)式有

$$J = -\frac{\partial \Pi}{\partial l} \quad (2.3)$$

所以 J 的物理意义相当于裂纹单位长度扩展的能量释放率。这个含意，在 Rice 文中已有说明。

三、三维 J 积分

在三维的普遍情况，裂纹是一段空间曲线，我们称裂纹顶端为裂纹前沿。裂纹前沿的位移方向用裂纹前沿单位法线矢量 \mathbf{b} ($|\mathbf{b}|=1$) 表现。如果是一条直线前沿平行向前扩展，单一 \mathbf{b} 矢量即足指明其扩展方向。对于任意曲线前沿，总可以确定一个最优发展方向，以 \mathbf{b} 矢量表征之。

今在三维空间定义一个总势能泛函 Φ 如下：

$$\Phi = \iiint_{\Omega} W(x, y, z) d\Omega - \iint_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{u} da \quad (3.1)$$

$W(x, y, z)$ ——形变能密度函数， \mathbf{T} ——曲面外力， \mathbf{u} ——位移。 S 是包围一段裂纹的封闭曲面， Ω 是 S 内的体积， da 是 S 面积元， $d\Omega$ 是 Ω 体积元。

考虑 Φ 函数沿裂纹矢量 \mathbf{b} 方向的空间变化率，令

$$\delta r_b = \mathbf{b} \delta r_b \quad (3.2)$$

r_b 是沿前沿扩展方向的坐标变量。假设 \mathbf{T} 不变

$$\frac{\delta \Phi}{\delta r_b} = \iiint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial r_b} d\Omega - \iint_S \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_b} da \quad (3.3)$$

因有

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial r_b} d\Omega = \iiint_{\Omega} \nabla w \cdot \mathbf{b} d\Omega \quad (3.4)$$

根据 Green 定理：

设 ϕ_1 和 ϕ_2 是在 Ω 区内的连续函数， \mathbf{n} 是 Ω 区表面 S 上的单位法线矢量，我们有下列结果：

$$\iiint_{\Omega} [\phi_1 \nabla^2 \phi_2 + (\nabla \phi_1) \cdot (\nabla \phi_2)] d\Omega = \iint_S \mathbf{n} \cdot \phi_1 \nabla \phi_2 da \quad (3.5)$$

今设我们取

$$\nabla \phi_2 = \mathbf{b} = \text{const}, \quad \phi_1 = W(x, y, z)$$

则应用公式(3.5)有

$$\iiint_{\Omega} \nabla W \cdot \mathbf{b} d\Omega = \iint_S W(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) da \quad (3.6)$$

于是(3.3)式成为

$$\frac{\delta \Phi}{\delta r_b} = \iint_S [W(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_b}] da \quad (3.7)$$

另一方面，根据最小势能原理：相对于所有运动条件允许的可能位移场而言，真实的位移场使得总势能泛函取极值。 Φ 的变分沿任意方向取，上述论断均系正确。现取 $\delta \Phi$ 沿 r_b 方向，故得

$$0 = \delta\Phi = \delta r_b \left\{ \iiint_{\Omega} \frac{\partial W}{\partial r_b} d\Omega - \oint_S \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_b} da \right\} \quad (3.8)$$

在图1中, S 是包含裂缝的封闭曲面, (3.8)积分可以分为几部份:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_S \left[W(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_b} \right] da \\ &= \iint_{acd} + \iint_{de} + \iint_{\Gamma_s \text{顶端}} \\ &\quad + \iint_{ga} \left[W \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_b} \right] da \end{aligned} \quad (3.9)$$

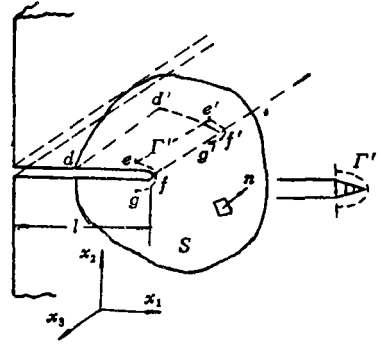


图 1

在裂缝下、上表面上: $\mathbf{T}=0$, $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{b})=0$, 所以这二个 de , ga 面积分为零. acd 系指由裂缝下表面到上表面的包围曲面, 以 Γ_s 表之, 因此有

$$\begin{aligned} &\iint_{\Gamma_s} \left[W(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_b} \right] da \\ &= - \iint_{\Gamma_s'} \left[W(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_b} \right] da \\ &= -\mathcal{W}_{\text{顶}} \end{aligned} \quad (3.10)$$

$\mathcal{W}_{\text{顶}}$ ——裂缝顶端的表面能和分子引力势能之和.

定义三维J积分, 记为 \bar{J} :

$$\bar{J} \equiv \iint_{\Gamma_s} \left[W(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_b} \right] da \quad (3.11)$$

\bar{J} 之值与 Γ_s 曲面形式无关, 因

$$\Gamma_{s1} = \Gamma_{s2} = -\mathcal{W}_{\text{顶}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial l} \quad (3.12)$$

l 为裂纹长度, $-\partial \Pi / \partial l$ 之含意同(2.3)式. \bar{J} 表示 Γ_s 曲面包围裂缝段落往前扩展单位长度释放之能量.

对于二维情形, 包围曲面 Γ_s 成为一个柱面, 柱面母线垂直于裂纹法线矢量 \mathbf{b} , 于是

$$\begin{aligned} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) \cdot ds &= dy \\ da &= 1 \times ds \end{aligned}$$

取单位厚度计算 $W(x, y)$, 则 \bar{J} 化为平面的J积分:

$$\bar{J} \equiv J \equiv \int_{\Gamma} \left[W(x, y) dy - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial r_b} ds \right] \quad (3.11)$$

四、有限变形条件

对于有限塑性变形而言, 因为构件中所储能量与形变路径有关, 并且边界条件随时间一般有变化. 所以合理的能量原理应采用功率形式表达. 功率型的 \bar{J} 积分改写为 (参见 [9])

$$\bar{J} \equiv \iint_{\Gamma_s} \left[\dot{W}(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) - \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial r_b} \right] da = -\frac{\partial \dot{\Pi}}{\partial l} \quad (4.1)$$

\dot{W} ——形变能量增率; \dot{u} ——位移速度; \mathbf{n}, \mathbf{b} ——均系瞬时之表面外法线矢量与裂纹矢量。

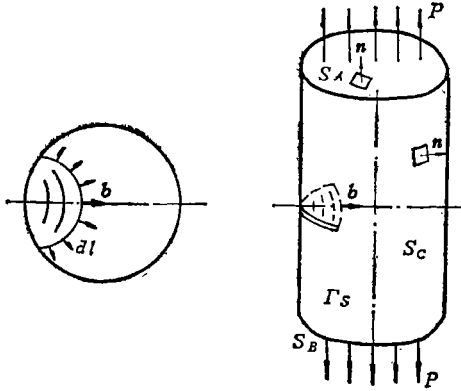


图 2

在 S_A 和 S_B 上: $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) = 0$

在 S_C 上: $\mathbf{T} = 0$

如 S_B 固定, 则应有 $(\partial \dot{u} / \partial r_b)_{S_B} = 0$. 在此条件下, (4.1) 式化为

$$-\iint_{S_A} \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \dot{u}}{\partial r_b} da + \iint_{S_C} \dot{W} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) da = -\frac{\partial \dot{I}}{\partial l} = -\dot{W}_{\text{顶}} \quad (4.3)$$

故有

$$\iint_{S_A} \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \dot{u}}{\partial r_b} da = \iint_{S_C} \dot{W} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{b}) da + \dot{W}_{\text{顶}} \quad (4.4)$$

上式的力学意义说明:

外力功率 = 表面形变能量增率 + 裂缝顶端吸收的形变功率
(相对于裂缝扩展)

实验证明, 对于金属材料, 裂缝顶端展开时吸收的形变功率往往比表面能量增率大好几百倍. 如在(4.4)式中略去等式右边第一项, 则得

$$\iint_{S_A} \mathbf{T} \cdot \frac{\partial \dot{u}}{\partial r_b} da \approx \dot{W}_{\text{顶}} \quad (4.5)$$

这个结果提供我们一个断裂判据: 当某一瞬时, 围绕裂缝上下表面的包围曲面上外力功率等于裂缝扩张的临界功率 \dot{J} , 裂缝将开始扩张. 此临界功率 \dot{J} 必需由实验确定.

五、结 语

三维 J 积分实质上是能量积分. 本文应用一般势能原理来建立三维 J 积分, 无论在数学形式上或是它的物理意义都比现有论述更为明确, 在工程中的重要应用将再进一步由实验校核. 本文系根据1982年底手稿修改而成, 对于提出宝贵意见的同志, 谨致谢意.

参 考 文 献

- [1] Eshelby, J. D., *Solid State Physics*, 3(1956).
- [2] Rice, J. R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and crack, *J. Appl. Mech.*, 35(1968), 379—386.
- [3] Черепанов Г. П., О распространении трещин в сплошной среде, *ПММ*, 31(1967), 476—488.
- [4] Miyamoto, Hiroshi Masanori, Kikuchi, Three-dimensional J integral, *Theo Appl. Mech.*, 28(1981), 195—204.
- [5] 陈应天, 由虚功原理推导 J 积分守恒, *应用数学和力学*, 4,3 (1983), 411—414.
- [6] 陆美子, 论三维非线性断裂动力学中的路径无关积分, *应用数学和力学*, 4,3 (1983), 361—368.
- [7] 钱伟长, 《变分法及有限元》, 科学出版社, (1980).
- [8] 胡海昌, 《弹性力学的变分原理及其应用》, 科学出版社, (1981).
- [9] 陈至达, 钱氏定理在有限变形极矩弹性力学广义变分原理的应用, *应用数学和力学*, 2,2(1981), 191—196.
- [10] 彭晓林, 平面裂纹顶部非线性问题及分析法, 硕士学位论文, 中国矿院, (1981).

Energy Principle of Three-Dimensional J Integral

Chen Zhi-da

(Graduate School, China Institute of Mining, Beijing)

Abstract

Various expressions of three-dimensional J integral are proposed. We derive here three-dimensional J integral by means of general potential energy principle and Green's theorem. Its physical meaning and application are shown in the paper, the results are true both for infinitesimal and finite deformation.