循环矩阵的求逆*

王　颖　坚

（北京大学力学系，1983年8月9日收到）

摘　要

本文给出了循环矩阵的求逆方法，给出了循环矩阵的逆矩阵的表达式.

一、引　　言

在周期性边界条件下，$N+1$个点：$x_0<x_1<x_2<\cdots<x_N$上的三次Spline插值问题，导致线性代数方程组[1]

$$\begin{bmatrix} 2 & \mu_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & \lambda_1 \\ \lambda_2 & 2 & \mu_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_3 & 2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \ddots & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & \mu_{N-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \lambda_{N-1} & 2 & \mu_{N-1} \\ \mu_N & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & \lambda_N & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N-2}' \\ y_{N-1}' \\ y_N' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ q_{N-2} \\ q_{N-1} \\ q_N \end{Bmatrix} \tag{1.1}$$

式中y_1'，y_2'，…，y_N'是N个插值结点上的一阶导数，

$$\lambda_k=\frac{h_{k+1}}{h_k+h_{k+1}},\quad \mu_k=1-\lambda_k \qquad (k=1,2,\cdots,N-1)$$

$$\lambda_N=\frac{h_1}{h_N+h_1},\quad \mu_N=1-\lambda_N,\quad h_k=x_k-x_{k-1} \qquad (k=1,2,\cdots,N)$$

方程组(1.1)右端的

$$q_k=3\lambda_k\frac{y_k-y_{k-1}}{h_k}+3\mu_k\frac{y_{k+1}-y_k}{h_{k+1}} \qquad (k=1,2,\cdots,N)$$

其中

$y_k\,(k=1,2,\cdots,N)$，$y_{N+1}=y_1$. 是插值结点上的函数值. 方程组(1.1)可以采用类似于"追赶法"的方法求解[1].

然而，对于等距结点的三次Spline插值，在周期性边界条件下，导致求解线性代数方程组

---

* 郭仲衡推荐.

$$
\begin{bmatrix}
4 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 1 \\
1 & 4 & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & & \ddots & & & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & \ddots & & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & & & \ddots & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 4 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 1 & 4 & 1 \\
1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 & 1 & 4
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{N-2}' \\ y_{N-1}' \\ y_N' \end{Bmatrix}
=
\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ p_{N-2} \\ p_{N-1} \\ p_N \end{Bmatrix}
\tag{1.2}
$$

或写成

$$A\{X\}=\{P\}$$

其中$\{X\}=(y_1', y_2', \cdots, y_N')^T$，$\{P\}=(p_1, p_2, \cdots, p_N)^T$，矩阵$A$是循环矩阵。

本文讨论了循环矩阵的求逆方法，给出了循环矩阵的逆矩阵的表达式。利用本文的结果，可以立即得到(1.2)中矩阵A的逆矩阵A^{-1}，从而简化了方程组(1.2)的求解过程。

循环矩阵在结构计算中有着重要的应用。本文给出的循环矩阵的求逆方法，有助于循环矩阵在结构计算中的运用。

本文是在文[2]的基础上，进一步做的工作。

二、循环矩阵的一个重要性质

一个m阶($m\geqslant 3$)分块矩阵可表示为

$$A=(A_{uv}) \qquad (u,\ v=0,1,\cdots,\ m-1)$$

其中子矩阵A_{uv}是$n\times n$的方阵。所以，A是一个$(m\times n)\times(m\times n)$的方阵。

若

$$
A=\begin{bmatrix}
A_0 & A_1 & A_2 & \cdots & A_{m-1} \\
A_{m-1} & A_0 & A_1 & \cdots & A_{m-2} \\
\cdot & \cdot & \ddots & & \cdot \\
\cdot & \cdot & & \ddots & \cdot \\
\cdot & \cdot & & & \cdot \\
A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_0
\end{bmatrix}
\tag{2.1}
$$

则称A为循环矩阵。

A为循环矩阵的充要条件是[2]：当

$$
k=\begin{cases} v-u & (v\geqslant u) \\ v-u+m & (v<u) \end{cases}
\tag{2.2}
$$

时，$A_k=A_{uv}$。其中子矩阵$A_k=A_{uv}$ ($u,\ v=0,1,\cdots,\ m-1$; $k=0,\ 1,\ \cdots,m-1$) 是$n\times n$的方阵，m是分块矩阵A的阶数。

为讨论循环矩阵的性质，考虑

$$\omega=\exp\left[\frac{2\pi}{m}\sqrt{-1}\right]=\exp\left[\frac{2\pi}{m}i\right]$$

它是m次单位根。令

$$\Omega_0^{lj}=\omega^{lj}E_n/\sqrt{m}$$

$$=\exp\left[\frac{2\pi lj}{m}i\right]E_n/\sqrt{m} \qquad (l,j=0,1,\cdots,m-1)$$

其中E_n为n阶单位矩阵.显然，Ω_0^{lj}是一个n阶矩阵.

以Ω_0^{lj}为子矩阵，可构成一个m阶分块矩阵

$$\Omega=(\Omega_0^{lj})$$

记Ω^*为Ω的共轭矩阵，即

$$\Omega^*=\overline{(\Omega_0^{lj})}=(\Omega_0^{-lj}) \tag{2.3}$$

这是因为

$$\overline{\Omega_0^{lj}}=\overline{\omega^{lj}}E_n/\sqrt{m}=\exp\left[\frac{-2\pi lj}{m}i\right]E_n/\sqrt{m}$$

$$=\omega^{-lj}E_n/\sqrt{m}=\Omega_0^{-lj}$$

下面，证明描述循环矩阵性质的一个定理[2].

定理 对于循环矩阵A，恒有

$$\Omega^*A\Omega=C \tag{2.4}$$

这里，C是准对角阵

$$C=\begin{bmatrix} C_0 & & & & \\ & C_1 & & & \\ & & C_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & C_{m-1}\end{bmatrix}$$

$C_l(l=0,1,2,\cdots,m-1)$为n阶方阵，而且

$$C_l=\sqrt{m}\sum_{k=0}^{m-1}\Omega_0^{lk}A_k$$

其中A_k是m阶分块矩阵A的子矩阵.

证明 记m阶分块矩阵$\Omega^*A\Omega$的每一个$n\times n$的子矩阵为$C_{lj}(l,j=0,1,2,\cdots,m-1)$，那么

$$C_{lj}=\sum_{u=0}^{m-1}\sum_{v=0}^{m-1}\overline{\Omega_0^{lu}}A_{uv}\Omega_0^{vj}=\sum_{u=0}^{m-1}\sum_{v=0}^{m-1}\Omega_0^{-lu}A_{uv}\Omega_0^{vj}$$

A是循环矩阵.由A是循环矩阵的充要条件可知

$$v=\begin{cases}k+u & (v\geqslant u)\\ k+u-m & (v<u)\end{cases}$$

且 $$A_{uv}=A_k \qquad (u,v=0,1,\cdots,m-1;\ k=0,1,\cdots,m-1)$$

于是

$$C_{lj}=\left(\sum_{u=0}^{m-1}\Omega_0^{(j-l)u}\right)\left(\sum_{k=0}^{m-1}\Omega_0^{kj}A_k\right) \tag{2.5}$$

(2.5)中的第一个因子

$$\sum_{u=0}^{m-1} \Omega_0^{(j-l)u}=\frac{E_n}{\sqrt{m}}\sum_{u=0}^{m-1} \omega^{(j-l)u}$$

$$=\frac{E_n}{\sqrt{m}}\left(1+\omega^{j-l}+\omega^{2(j-l)}+\cdots+\omega^{(m-1)(j-l)}\right)$$

$$=\begin{cases}\sqrt{m}E_n & \text{当 } j-l=0 \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } 0<j-l\leqslant m-1\text{时}\end{cases}$$

上式最后一个等式成立，是因为当$0<j-l\leqslant m-1$时

$$\omega^{j-l}=\exp\left[\frac{2\pi(j-l)}{m}i\right]\neq 1$$

$$\omega^{(j-l)m}=\exp[2\pi(j-l)i]=1$$

故有

$$\frac{E_n}{\sqrt{m}}(1+\omega^{j-l}+\omega^{2(j-l)}+\cdots+\omega^{(m-1)(j-l)})=\frac{E_n}{\sqrt{m}}\ \frac{(1-\omega^{(j-l)m})}{(1-\omega^{j-l})}=0$$

于是，由(2.5)式立即得到

$$C_{lj}=\sqrt{m}\ E_n\,\delta_{jl}\sum_{k=0}^{m-1}\Omega_0^{kj}A_k$$

其中

$$\delta_{jl}=\begin{cases}1 & \text{当 } j=l\\ 0 & \text{当 } j\neq l\end{cases}$$

总之，我们得到

$$C_l=\sqrt{m}\ E_n\sum_{k=0}^{m-1}\Omega_0^{kl}A_k \qquad (l=0,1,\cdots,\ m-1) \tag{2.6}$$

（定理证毕）

该定理表明，将m阶循环矩阵A左乘以Ω^*，右乘以Ω，就可以化成准对角阵$C=\Omega^*A\Omega$。C中的每个子矩阵C_l（$l=0,1,\cdots,\ m-1$）都是n阶方阵。

我们将利用循环矩阵的这一性质，导出循环矩阵的逆矩阵。

三、循环矩阵的求逆

为求循环矩阵A的逆矩阵，我们考察以A为系数矩阵的线性代数方程组：

$$A\{X\}=\{P\} \tag{3.1}$$

这里，A是m阶循环矩阵，$\{X\}$是未知向量，$\{P\}$是已知向量。当然，假定A是可以求逆的。

为了运用刚刚证明的定理，我们将代数方程组做如下变形：令

$$\{X\}=\Omega\{Y\}$$

$\{Y\}$为新的未知向量，$\Omega=(\Omega^{lj})$是前面给出的m阶分块矩阵。将代数方程组(3.1)的两端左乘以Ω^*，则

$$\Omega^*A\Omega\{Y\}=\Omega^*\{P\}$$

由定理可知，此式左端的系数矩阵是一个准对角矩阵C，于是

$$C\{Y\}=\Omega^*\{P\}$$

显然，C是可逆的，故

$$\{Y\}=C^{-1}\Omega^*\{P\}$$

从而

$$\{X\}=\Omega C^{-1}\Omega^*\{P\}$$

这就表明，循环矩阵A的逆

$$A^{-1}=\Omega C^{-1}\Omega^* \tag{3.2}$$

为了方便，记$B=\Omega C^{-1}\Omega^*$，显然，B仍是m阶分块矩阵，记作

$$B=(B_{lj}) \qquad (l,j=0,1,\cdots,m-1)$$

按分块矩阵的乘法，由(3.2)式可知

$$B_{lj}=\sum_{u=0}^{m-1}\sum_{v=0}^{m-1}\Omega_0^{lu}\,C_{uv}^{-1}\,\Omega_0^{-vj}=\sum_{u=0}^{m-1}\Omega_0^{lu}\,C_u^{-1}\,\Omega_0^{-uj}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{u=0}^{m-1}\omega^{lu}\,\omega^{-uj}\,C_u^{-1}=\frac{1}{m}\sum_{u=0}^{m-1}\exp\left[\frac{2\pi(l-j)u}{m}i\right]C_u^{-1}$$

由此式可知，若令

$$r=\begin{cases} j-l & (j\geqslant l)\\ j-l+m & (j<l)\end{cases} \qquad (l,j=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)$$

则，$r=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1$，而且子矩阵$B_r=B_{lj}$是一个n阶方阵：

$$B_r=\frac{1}{m}\sum_{u=0}^{m-1}\exp\left[\frac{-2\pi ru}{m}i\right]C_u^{-1} \qquad (r=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1) \tag{3.3}$$

总之

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_{m-1}\\ B_{m-1} & B_0 & B_1 & \cdots & B_{m-2}\\ B_{m-2} & B_{m-1} & B_0 & \cdots & B_{m-3}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_0 \end{bmatrix} \tag{3.4}$$

这是循环矩阵A的逆矩阵的一般形式.

以上的讨论对于$n\geqslant 1$的情况都适用.

特别当$n=1$时，我们有简单而且便于应用的结果. 若$n=1$，则循环矩阵A是一个m阶方阵

$$A=\begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{m-1}\\ a_{m-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{m-2}\\ a_{m-2} & a_{m-1} & a_0 & \cdots & a_{m-3}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \ddots & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_0 \end{bmatrix} \tag{3.5}$$

此时，(2.6)式简化为

$$C_l=\sqrt{m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{m}}\exp\left[\frac{2\pi kl}{m}i\right]a_k=\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\frac{2\pi kl}{m}i\right]a_k$$

$$(l=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1) \qquad (3.6)$$

(3.3)式简化为

$$B_r=\frac{1}{m}\sum_{u=0}^{m-1}\frac{\exp\left[\frac{-2\pi ru}{m}i\right]}{\left(\sum_{k=0}^{m-1}\exp\left[\frac{2\pi uk}{m}i\right]a_k\right)} \qquad (3.7)$$

这样，我们得到了循环矩阵A的逆$A^{-1}=B$的显式表达式．由此可知，$n=1$时，若m阶循环矩阵A的元素，a_0，a_1，a_2，…，a_{m-1}均为实数，则A^{-1}一般是复值矩阵．

四、一个重要的例子

利用上述结论，我们可以立即求得下列循环矩阵A的逆．

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 1\\ 1 & 4 & 1 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 1 & 4 & 1\ \cdots & 0 & 0\\ \cdot & & \ddots & \ddots & \ddots & \cdot\\ \cdot & & & & & \cdot\\ \cdot & & & & & \cdot\\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 4 & 1\\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}_{m\times m} \qquad (4.1)$$

这个m阶循环矩阵，是一个对称矩阵．它是一个常见的矩阵[3]．在周期性条件下，用三次Spline做插值时，就得到这个矩阵．通常，用类似"追赶法"的方法求解以(4.1)为系数矩阵的代数方程组[1][3]．然而，根据本文的结果，可以立即写出(4.1)的逆矩阵，从而简化了问题的求解过程．

下面我们给出矩阵(4.1)的逆．

以 $a_0=4$，$a_1=1$，$a_{m-1}=1$，$a_k=0$ $(k=2,\ 3,\ m-2)$代入(3.7)式，我们有

$$B_r=\frac{1}{m}\sum_{u=0}^{m-1}\frac{\exp\left[-\frac{2\pi ru}{m}i\right]}{4+\exp\left[\frac{2\pi u}{m}i\right]+\exp\left[\frac{2\pi u(m-1)}{m}i\right]}$$

$$=\frac{1}{2m}\sum_{u=0}^{m-1}\frac{\cos\frac{2\pi ur}{m}-i\sin\frac{2\pi ur}{m}}{2+\cos\frac{2\pi u}{m}}$$

$$=\frac{1}{2m}\sum_{u=0}^{m-1}\frac{\cos\frac{2\pi ur}{m}}{2+\cos\frac{2\pi u}{m}}-i\,\frac{1}{2m}\sum_{u=0}^{m-1}\frac{\sin\frac{2\pi ur}{m}}{2+\cos\frac{2\pi u}{m}}$$

然而，上式中后一个求和号所包含的各项之和等于零。这是因为：A是对称矩阵，其逆矩阵B也是对称矩阵，于是有

$$B_r=B_{m-r}\qquad (r=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$$

但由于

$$\cos\frac{2\pi u(m-r)}{m}=\cos\frac{2\pi ur}{m}$$

$$\sin\frac{2\pi u(m-r)}{m}=-\sin\frac{2\pi ur}{m}$$

可知，必须有

$$\sum_{u=0}^{m-1}\frac{\sin\dfrac{2\pi r}{m}}{2+\cos\dfrac{2\pi u}{m}}=0$$

故

$$B_r=\frac{1}{2m}\sum_{u=0}^{m-1}\frac{\cos\dfrac{2\pi ur}{m}}{2+\cos\dfrac{2\pi u}{m}}\qquad (r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)\tag{4.2}$$

于是我们得到循环矩阵(4.1)的逆

$$A^{-1}=B=\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_{m-1}\\ B_{m-1} & B_0 & B_1 & \cdots & B_{m-2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_0\end{bmatrix}\tag{4.3}$$

其中的元素B_r $(r=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ m-1)$由(4.2)式给出。

最后附带说明一点。为了验证本文所得结果，不妨考虑

$$AB=\begin{bmatrix} 4 & 1 & & & & 1\\ 1 & 4 & 1 & & & \\ & 1 & 4 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 4 & 1\\ 1 & & & & 1 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_0 & B_1 & B_2 & \cdots & B_{m-2} & B_{m-1}\\ B_{m-1} & B_0 & B_1 & \cdots & B_{m-3} & B_{m-2}\\ B_{m-2} & B_{m-1} & B_0 & \cdots & B_{m-4} & B_{m-3}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots\\ B_2 & B_3 & B_4 & \cdots & B_0 & B_1\\ B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_{m-1} & B_0\end{bmatrix}$$

乘积矩阵AB的任一元素均可表示为

$$4a_k+a_{k+1}+a_{k-1}\qquad (k=0,\ 1,\ \cdots,\ m-1)\tag{4.4}$$

$k=0$对应于AB的对角元；$k=1,\ 2,\ \cdots,\ m-1$ 对应于 AB 的全部非对角元。当 $k=0$ 时，$a_{k-1}=a_{m-1}$。因为

$$4a_k+a_{k-1}+a_{k+1}=\frac{1}{2m}\sum_{u=0}^{m-1}\frac{4\cos\frac{2\pi ku}{m}+\cos\frac{2\pi(k-1)u}{m}+\cos\frac{2\pi(k+1)u}{m}}{2+\cos\frac{2\pi u}{m}}$$

$$=\frac{1}{2m}\sum_{u=0}^{m-1}\frac{4\cos\frac{2\pi ku}{m}+2\cos\frac{2\pi ku}{m}\cos\frac{2\pi u}{m}}{2+\cos\frac{2\pi u}{m}}$$

$$=\frac{1}{m}\sum_{u=0}^{m-1}\cos\frac{2\pi ku}{m}$$

$$=\begin{cases}1 & \text{当} k=0\\ 0 & \text{当} k=1,2,\cdots,\ m-1\end{cases}$$

所以

$$AB=E_m$$

即，由(4.3)式给出的矩阵B确实是(4.1)式的矩阵A的逆矩阵。

参 考 文 献

[1] Ahlberg, J. H., E. N. Nilson and J. L. Walsh, *The Theory of Splines and Their Application*, Academic Press (1967).

[2] 武际可、邵秀民，循环矩阵及其在结构计算中的应用，计算数学，1，2(1979).

[3] 冯康等，《数值计算方法》，国防工业出版社(1978).

The Inversion of Circulant Matrix

Wang Ying-jian

(*Peking University, Beijing*)

Abstract

The method of inverting the circulant matrix and the expression of inversion of the circulant matrix are obtained in this paper.