泛对称与不动泛系定理*

高隆颖　　王书基

（武汉数字工程研究所，1983年12月1日收到）

摘　要

在本文中，我们继续文[1]中的不动泛系定理的研究，讨论不动子集的存在性、结构与个数.

一、引　言

不动泛系定理是一类关于相对稳定性的定理．这种相对稳定性是一种典型的泛对称．泛系方法论做了大量的关于泛对称的工作．文[1]研究了这样一类涉及不动子集的不动泛系定理．不动子集是与它和某个二元关系的复合有局整关系的子集，它是著名的Kakutani不动点的推广．

除了运用新的观点发展了传统的不动点理论外，不动泛系定理还研究了一些相关的学科，如突变论、协同学、耗散结构理论等．

吴学谋给出了定理："设 $\delta\in E_s[G]$，$G=\bigcup G_i(d\delta)$，$g\subset G^2$，$\delta_1(g)\subset\delta$，那么 $G_i\circ g$，$g\circ G_i\subset G_i$．若 $\delta_1(g)\subset\delta$，$I(G_i)\subset g\circ g^{-1}$，则$g\circ G_i=G_i$．若$\delta_1(g)\subset\delta$，$I(G_i)\subset g^{-1}\circ g$，则$G_i\circ g=G_i$．"在这个基础上，本文主要讨论了 g 的含于 G_i $(G_i\subset G(d\delta_1(g)))$ 中的不动子集．我们证明了如果一个二元关系的传递包与幺关系的交不空，那么它就有不动子集．这样我们就得到了一个判断一个二元关系是否有不动子集的简明的方法．本文证明了一个二元关系的不动子集可以表示成一些分别含于某些等价类中的不动子集的并，这些等价类是由包含该二元关系的最小的等价关系所诱导的．当集合是有限的时候，本文估计了不动子集的个数．

二、关于不动子集的一些结论

与文[1]所研究的不动子集不尽相同，本文讨论一类更为特殊的不动子集．下面，我们给出本文研究的不动子集的定义．

定义1　设G是一给定的集合，$f\subset G^2$．若存在子集$G'\subset G$，$G'\neq\varnothing$且满足$G'\circ f=G'$，称f有不动子集，G'是f的不动子集．

首先，我们举例说明并非所有的二元关系都有不动子集．取$G=\{x_1, x_2, x_3\}$，$f=\{(x_1, x_2), (x_2, x_3)\}$．显然，对任意的$G'\subset G$，$G'\neq\varnothing$，都有$G'\circ f\neq G'$．

* 吴学谋推荐．

为了以后的叙述方便，引入实变函数论中的两个概念。$\{A_n\}$是一集合序列，若$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}A_n=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}A_n=A$，则称$\{A_n\}$收敛，记$A=\lim A_n$。若$A_n\subset A_{n+1}$，或$A_n\supset A_{n+1}$，$n=1,2,\cdots$，则称$\{A_n\}$单调升或单调降。

定理 1 若$f\subset G^2$，$\{f^{(n)}\}$收敛，$f^{(\infty)}=\lim f^{(n)}$，则$f^{(\infty)}\circ f\subset f^{(\infty)}$，其中$f^{(n)}=f^{(n-1)}\circ f=\{(x,\ y)\mid(x\circ f^{(n-1)})\cap(f\circ y)\not\equiv\varnothing\}$。

证明 对任意的$(x,\ y)\in f^{(\infty)}\circ f=\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}f^{(n)}\right)\circ f$，就有$z\in G$使得$(x,\ z)\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}f^{(n)}$，$(z,\ y)\in f$。从而对任意的$k\in N$，存在$n\geqslant k$，$(x,\ z)\in f^{(n)}$，$(z,\ y)\in f$，即是$(x,\ y)\in f^{(n+1)}$。所以对任意的$k\in N$，有$(x,\ y)\in\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}f^{(n)}$，故$(x,\ y)\in\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}f^{(n)}=f^{(\infty)}$。所以$f^{(\infty)}\circ f\subset f^{(\infty)}$。

定理 2 若$G'\subset G$，$\{G'\circ f^{(n)}\}$单调，则$\{G'\circ f^{(n)}\}$收敛。记$G''=\lim G'\circ f^{(n)}$，那么$G''\circ f=G''$。

证明 由定义知，当$\{G'\circ f^{(n)}\}$单调时，$\{G'\circ f^{(n)}\}$是收敛的。下证$G''=G''\circ f$。

1° 若$\{G'\circ f^{(n)}\}$单调降，则$G''=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G'\circ f^{(n)}$。对任意的$x\in G''\circ f$，存在$y$使得$y\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G'\circ f^{(n)}$，$(y,\ x)\in f$。则对任意的$n\in N$，有$y\in G'\circ f^{(n)}$，$(y,\ x)\in f$，即是$x\in G'\circ f^{(n+1)}$。所以$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G'\circ f^{(n+1)}=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G'\circ f^{(n)}=G''$，故有$G''\circ f\subset G''$。反之，对$x\in G''=\bigcap\limits_{n=2}^{\infty}G'\circ f^{(n)}$，有$x\in G'\circ f^{(n)}$，$n\geqslant 2$。那么对$n\geqslant 2$，存在$y\in G'\circ f^{(n-1)}$使得$x\in y\circ f$。又$\{G'\circ f^{(n)}\}$单调降，所以对任意的$n\geqslant 2$，存在$y\in\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}G'\circ f^{(k)}$使得$x\in y\circ f$。从而对任意的$n$，$x\in\left(\bigcap\limits_{k=1}^{n-1}G'\circ f^{(k)}\right)\circ f$。下证$x\in\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G'\circ f^{(k)}\right)\circ f$。若不然，对任意的$y\in f\circ x$，有$y\bar{\in}\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G'\circ f^{(k)}$。那么存在$n_0\in N$，$y\bar{\in}\bigcap\limits_{k=1}^{n_0}G'\circ f^{(k)}$，矛盾。所以$x\in\left(\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}G'\circ f^{(k)}\right)\circ f=G''\circ f$。则$G''\subset G''\circ f$，故$G''=G''\circ f$。

2° 若$\{G'\circ f^{(n)}\}$单调升，则$G''=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G'\circ f^{(n)}$。对$x\in G''=\bigcup\limits_{n=2}^{\infty}G'\circ f^{(n)}$，存在$n\geqslant 2$使得$x\in G'\circ f^{(n)}$。从而存在$y\in G'\circ f^{(n-1)}$，$(y,\ x)\in f$。则有$y\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}G'\circ f^{(n)}$使得$(y,\ x)\in f$。故$x\in G''\circ f$，即有$G''\subset G''\circ f$。反过来，可得$G''\circ f\subset G''$。所以$G''=G''\circ f$。

定理 3 若$\{f^{(n)}\}$收敛且$f^{(\infty)}\neq\varnothing$，则$f$有不动子集。

证明 因为$G\circ f\subset G$，所以$\{G\circ f^{(n)}\}$单调。令$G'=\lim G\circ f^{(n)}$，则$G'=G'\circ f$。下证$G'\neq\varnothing$。因为$f^{(\infty)}\neq\varnothing$，有$G\circ f^{(\infty)}\neq\varnothing$，我们只须证明$G'\supset G\circ f^{(\infty)}$。对$x\in G\circ f^{(\infty)}=G\circ\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}f^{(n)}\right)$，存在$k\in N$对任意的$n\geqslant k$都有$x\in G\circ f^{(n)}$。从而有$x\in\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}G\circ f^{(n)}=G'$，所以$G\circ f^{(\infty)}\subset G'$。则$G'$是$f$的不变子集。

但是，对有不动子集的二元关系f，$\{f^{(n)}\}$不一定收敛．例如，取$G=\{x_1, x_2, x_3\}$，$f=\{(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_2)\}$，则$\{x_2, x_3\}$是$f$的不动子集，但是$\{f^{(n)}\}$不收敛．下面，我们讨论当$G$有限时，$f\subset G\times G$导出的序列$\{f^{(n)}\}$收敛的问题．

定理 4 若G有限，$f\subset G^2$，则存在i，$k\in N$，对任意的$n\in N$都有$f^{(i)}=f^{(i+nk)}$．

证明 设$|G|=m$，则$|P(G^2)|=2^{m^2}=h$．因为$f^{(j)}\in P(G^2)$，所以有$i<l\leqslant h+1$，使得$f^{(i)}=f^{(l)}$．取$k=l-i$，则$f^{(i)}=f^{(i+k)}=f^{(i+nk)}$．

定理 5 若G有限，$f\subset G\times G$，则$\{f^{(n)}\}$收敛的充分必要条件是存在$i\in N$，$i\leqslant 2^{|G|^2}$，使得$f^{(i)}=f^{(i+1)}$．

证明 充分性显然成立，下证必要性．由定理 4 知，存在$i\leqslant 2^{|G|^2}$及$k\in N$使得$f^{(i)}=f^{(i+k)}$．若$f^{(i)}\neq f^{(i+1)}$，则$\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}f^{(n)}\subset f^{(i)}\cap f^{(i+1)}$，$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\bigcup\limits_{n=k}^{\infty}f^{(n)}\supset f^{(i)}\cup f^{(i+1)}$．导致$\{f^{(n)}\}$不收敛，与条件不符，故$f^{(i)}=f^{(i+1)}$．

由定理可得：

推论 1 若G有限，f是G上的双射，则$\{f^{(n)}\}$收敛的充分必要条件是$f=f^{(0)}$．

下面，我们又对一般的集合进行讨论．

定理 6 若$G'\subset G$，$\{G'\circ f^{(n)}\}$收敛，$G''=\lim G'\circ f^{(n)}$，则$\{G''\circ f^{(n)}\}$是一单调降的序列．

证明 $G''\circ f=\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}G'\circ f^{(n)}\right)\circ f=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\left(\left(\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}G'\circ f^{(n)}\right)\circ f\right)\subset\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\bigcap\limits_{n=k}^{\infty}G'\circ f^{(n+1)}=G''$，所以$\{G''\circ f^{(n)}\}$单调降．

由定理2，我们可以证明：

推论 2 若$G_i\subset G(d\delta_1(f))$，则$\{G_i\circ f^{(n)}\}$收敛，且$G_{i_0}\circ f=G_{i_0}$，$G_{i_0}=\lim G_i\circ f^{(n)}$．

以后如无特殊说明，我们总以G_{i_0}记$\lim G_i\circ f^{(n)}$，其中$G_i\subset G(d\delta_1(f))$．

定理 7 若G'是f的不动子集，则G'可表成一些分别含于某些G_{i_0}中的不动子集的并。

证明 记$G_i\subset G(d\delta_1(f))$，$G'_i=G'\cap G_i$．显然，$G'=\bigcup G'_i$．下证$G'_i\circ f=G'_i$且$G'_i\subset G_{i_0}$．由$G_i\cap G_j=\varnothing$知$G'_i\cap G'_j=\varnothing$，$i\neq j$．若$G'_i\circ f\neq G'_i$，则$G'\circ f=\bigcup G'_i\circ f\neq\bigcup G'_i=G'$，矛盾．所以$G'_i\circ f=G'_i$．因为$G'_i\subset G_i$，所以$G'_i\circ f\subset G_i\circ f$，即$G'_i\subset G_i\circ f$，故$G'_i\subset G_{i_0}$．

由定理可知，含于G_{i_0}中的不动子集是最基本的不动子集，其它的不动子集都可表成它们的并．在以后我们着重考察含于G_{i_0}中的不动子集．现在我们举例说明有G_{i_0}并不是最小的不动子集，但它又不能分解成一些不动子集的并．令$G=\{x_1, x_2\}$，$f=\{(x_1, x_1), (x_2, x_1), (x_2, x_2)\}$，则$G=G\circ f$，$x_1\circ f=\{x_1\}$，但是$x_2\circ f\neq\{x_2\}$．

定理 8 若$G_{i_0}\neq\varnothing$，$f_i=G_i^2\cap f$是赋形，则不存在$G'\subset G_{i_0}$，$G'\neq G_{i_0}$，$G'\neq\varnothing$满足$G'\circ f=G'$．

证明 若有定理所述的G'存在，那么$(G_{i_0}-G')\circ f=G_{i_0}-G'$．否则，$G'\circ f\cap(G_{i_0}-G')\circ f\neq\varnothing$．设$x\in G'\circ f\cap(G_{i_0}-G')\circ f$，从而存在$y\in G'$，$z\in G_{i_0}-G'$使得$(y,x)\in f$，$(z,x)\in f$，即是$(y,x)\in f_i$，$(z, x)\in f_i$．与$f_i$是赋形矛盾，所以$(G_{i_0}-G')\circ f=G_{i_0}-G'$．下证$(G'\times(G_{i_0}-G'))\cap\delta_1(f)=\varnothing$，这样就与$G'\subset G_{i_0}\subset G_i$矛盾，从而得到证明．若$(G'\times(G_{i_0}-G'))\cap\delta_1(f)\neq\varnothing$，则存在$x\in G'$，$y\in G_{i_0}-G'$使得$(x,y)\in\delta_1(f)$．那么存在$n$使得$(x, y)\in(f\vee f^{-1}\vee I)^{(n)}$，所以有$x_1=x$，$x_2$，…，$x_{n-1}$，$x_n=y\in G_i$满足$(x_1, x_2)$，…，$(x_{n-1}, x_n)\in f\vee f^{-1}$．由$G_{i_0}=G_{i_0}\circ f$与$f_i$是赋形可得$x_i\in G_{i_0}$，$i=1,2,\cdots$．由此可见，必有$j$存在，使得$(x_j, x_{j+1})\in f\vee f^{-1}$，$x_j\in G'_{i_0}$，$x_{j+1}\in G'$，其中$G'_{i_0}=G_{i_0}-G'$．这就与$G'$，$G'_{i_0}$是不动子集矛盾．所以

$(G'\times(G_{i_0}-G'))\cap\delta_1(f)=\varnothing$. 定理得证.

记$N(f)=|\{G'|G'\subset G,\ G'=G'\circ f\neq\varnothing\}|$, $N_s(f)=|\{G'|G'\subset G,\ G'=G'\circ f\neq\varnothing$, 且对任意的$G''\subset G'$, $G''\neq G'$, $G''\neq\varnothing$, 都有$G''\neq G''\circ f\}|$. 显然, $N(f)\geqslant 2^{N_s(f)}-1$. 由定理8可证明:

定理9　若f是赋形, 则$N_s(f)\leqslant\|\delta_1(f)\|$, $N(f)=2^{N_s(f)}-1\leqslant 2^{\|\delta_1(f)\|}-1$.

定理10　若$|G|<\infty$, $f\circ f^{-1}\in E_s[G)$, 则f有不动子集, 并且$N_s(f)\geqslant\|\delta_1(f)\|$, $N(f)\geqslant 2^{\|\delta_1(f)\|}-1$.

证明　只须证明对每个G_i, $G_{i_0}\neq\varnothing$.

由$f\circ f^{-1}\in E_s[G)$知对任意的$G'\subset G$, $G'\neq\varnothing$, 有$G'\circ f^{(n)}\neq\varnothing$, $n\in N$. 对每个$G_i\subset G(d\delta_1(f))$, 任取$x_n\in G_i\circ f^{(n)}$, 则得到$G_i$中的一个序列$\{x_n\}$. 又$G$有限, 故存在$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$满足$x_{n_k}=x_{n_{k+1}}$, 令$x=x_{n_1}=x_{n_2}=\cdots$. 可以证明对每个$n\in N$, $x\in G_i\circ f^{(n)}$. 所以$x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G_i\circ f^{(n)}=G_{i_0}$, 即$G_{i_0}\neq\varnothing$.

由定理可得:

推论3　设G是一给定集合, $f\circ f^{-1}\in E_s[G)$. 若有$G_i\subset G(d\delta_1(f))$, $|G_i|<\infty$, 则f有不动子集.

由定理9、定理10可得:

定理11　若G有限, f是赋形, 则f有不动子集, 并且$N_s(f)=\|\delta_1(f)\|$, $N(f)=2^{\|\delta_1(f)\|}-1$.

下面我们继续讨论不动子集的存在性. 先引入两个记号, 记$l(x,\ y)=\max\{n|n\in N,\ (x,y)\in f^{(n)}\}$, $l(y)=\max\{l(x,y)|x\in G\}$.

定理12　设$f\subset G^2$, $G=\bigcup G_i(d\delta_1(f))$, 则$G_{i_0}=\{x|x\in G_i,\ l(x)=\infty\}$.

证明

1°　当$l(x)<\infty$时, 不妨设$l(x)=n$. 那么$x\bar{\in}G\circ f^{(m)}$, 从而$x\bar{\in}G_i\circ f^{(m)}$, $m>n$. 而$G_{i_0}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{m=k}^{\infty}G_i\circ f^{(m)}$, 所以$x\bar{\in}G_{i_0}$.

2°　对$x\in G_i$, $l(x)=\infty$, 由$l(x)$的定义知对任意的$n\in N$, 存在$y\in G_i$使得$l(y,x)>n$. 从而存在$x_1=y$, $x_2,\cdots$, x_{m-1}, $x_m=x$, $m>n$使得$(x_1,\ x_2)$, $(x_2,\ x_3)$, $\cdots$, $(x_{m-1},\ x_m)\in f$. 所以$(x_{m-n},\ x_m)\in f^{(n)}$, 则$x\in G_i\circ f^{(n)}$. 故$x\in G_{i_0}$, 定理成立.

从定理容易得到:

推论4　若$G=\bigcup G_i(d\delta_1(f))$, $G_i'=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{x|x\in G_i,\ f^{(n)}\circ x=\varnothing\}$, 则$G_{i_0}=G_i-G_i'$.

定理13　若$f^t\cap f^{(0)}\neq\varnothing$, 则$f$有不动子集. 若$G$有限且$f$有不动子集, 则$f^t\cap f^{(0)}\neq\varnothing$.

证明

1°　若$f^t\cap f^{(0)}\neq\varnothing$, 则存在$x$及$n_0$使得$(x,x)\in f^{(n_0)}$, $n_0>0$, 就有$l(x)=\infty$. 故存在一个G_{i_0}, $x\in G_{i_0}$, 即G_{i_0}是f的不动子集.

2°　若f有不动子集, 由定理12知存在x满足$l(x)=\infty$. 设$|G|=n<\infty$, 对于n, 存在x_1, $x_2,\cdots$, x_n满足$(x_1,x_2)\in f,\cdots$, $(x_n,x)\in f$. 所以就有$1\leqslant i<j\leqslant n+1$, 使得$x_i=x_j$, 其中$x_{n+1}=x$. 故$f^t\cap f^{(0)}\neq\varnothing$.

定理13 给出了一个判断G上的二元关系是否有不动子集的简明的方法。

定理14 若$f\in S[G]$，$G=\bigcup G_i(d\delta_1(f))$，$|G_i|>1$，则$G_i=G_i\circ f$。

证明 只须证明$G_i\subset G_i\circ f$。

对任意的$x\in G_i$，存在$y\in G_i$，$y\neq x$。由$(y,x)\in\delta_1(f)$知存在$n\in N$使得$(y,x)\in(f\vee f^{(0)})^{(n)}$。从而存在$x_1=y,\cdots$，$x_{n-1}$，$x_n=x$满足$(x_1,x_2)\in f,\cdots$，$(x_{n-1},x_n)\in f$，所以$x\in x_{n-1}\circ f\subset G_i\circ f$。故$G_i\subset G_i\circ f$，定理成立。

参 考 文 献

[1] Wu Xue-mou, Pansystems methodology: concepts, theorems and applications (Ⅴ)—(Ⅵ), 科学探索,4(1983), 1(1984).

[2] 吴学谋，泛系识别理论与大系统运筹学的研究与应用(Ⅰ)，应用数学和力学，5，1(1984).

[3] Wang Shu-ji and Gao Long-ying, The pansystems clustering and König system, 科学探索，2(1984).

[4] Wu Xue-mou, Fixed pansystems theorems and pansystems catastrophe analysis of panweighted network, 数学研究与评论，2(1984).

Pansymmetry and Fixed Pansystems Theorems

Gao Long-ying Wang Shu-ji

(Wuhan Digital Engineering Institute, Wuhan)

Abstract

In this paper, we continue the research of fixed pansystems theorems in paper[1], and discuss the existence, the structure and the number of fixed subsets.