

# 存在周围粘弹组织约束时 动脉管内的脉动流\*

柳 兆 荣

(复旦大学, 1983年9月2日收到)

## 摘 要

由于在动脉管外侧牢牢地粘附着结缔组织, 而且这些结缔组织是一种粘弹体。为了分析周围粘弹组织对动脉中脉动流的影响, 本文将周围结缔组织考虑为Voigt粘弹体, 由动脉管内血液流动方程(Navier-Stokes方程)与管壁运动方程(Lamb方程)导出动脉管中脉搏波波速的一般表达式与管内脉动流的速度表达式。Womersley关于不存在周围组织约束的结果<sup>[4]</sup>与仅考虑周围组织是纯弹性体的结果<sup>[6]</sup>都做为本文结果的特例而包含在本文的结果之中。

## 一、前 言

我们知道, 心脏是周期性收缩与舒张的。当心脏收缩, 主动脉开启, 血液从左心室射出时, 动脉中的血液压力将上升; 而在舒张期, 心脏停止射血时, 动脉中血液压力将重新下降。由于动脉管壁是弹性的, 动脉中血液压力的上升必然导致血管壁的向外扩张; 而当动脉中血液压力下降时, 血管壁将重新回弹。这个过程对于每一个心动周期将重复一次。因此, 对于动脉管壁的每一微元, 都可以看成是在做周期等于心动周期的周期振动。同时, 伴随着动脉中血液压力的脉动, 动脉中的血液也将以脉动的形式在流动。这就是说, 由于心脏节律性的间歇射血, 动脉中血液流动的参量——压力、速度、血管半径等将是一些随时间做周期性变化的脉动量。

对于这种动脉管内血液流动与血管壁运动高度耦合的动脉中的脉动流, 人们往往把血液认为是牛顿流体, 将动脉管壁考虑为弹性薄壁圆管。不少人曾先后对这个问题做了许多有意义的工作<sup>[1,2]</sup>, 特别是本世纪五十年代, Womersley<sup>[3,4]</sup>更详细讨论了动脉中脉动流的波速与速度分布随频率参数 $\alpha$ 的变化情况。

由于在动脉外侧牢牢地粘附着结缔组织, 在分析动脉中的脉动流时, 实际上还必须考虑周围组织对动脉管壁运动的影响。正如McDonald<sup>[5]</sup>所指出的, 动脉的外部约束本质上是防止动脉管壁的任何轴向运动, 因此应该认为存在着动脉管壁的纵向约束。1957年Womersley<sup>[6]</sup>

\* 欧阳岑推荐。

引进了一个与纵向位移  $\zeta$  成正比的弹性恢复力来表示周围组织对动脉管壁的约束作用, 从而导出相应的脉搏波波速与脉动流速度的表达式。

考虑到动脉管周围结缔组织并非是严格的弹性体, 而是一种粘弹体, 本文将周围结缔组织考虑为符合 Voigt 模型的粘弹体, 在计及这种粘弹体的影响情况下, 导出动脉管中相应的脉搏波波速的表达式与脉动流的轴向与径向速度的表达式。Womersley 关于不存在周围组织约束的结果<sup>[4]</sup>与仅考虑周围组织是纯弹性体的结果<sup>[6]</sup>都做为本文的特例而包含在本文的结果之中。

## 二、基本方程

动脉中的血液流与血管壁的运动是完全耦合在一起的。因此, 在分析动脉中的脉动流时, 必须同时考虑动脉中的血液流动与动脉管壁的运动情况。

由于在生理条件下, 血液是不可压缩的, 若进一步假定动脉管中血液的流动是轴对称的层流流动, 而且可认为血液是牛顿流体, 则描述血液运动的 Navier-Stokes 方程为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right\} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left\{ \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{v}{r^2} \right\} \quad (2.2)$$

连续性方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial vr}{\partial r} = 0 \quad (2.3)$$

式中  $u$  与  $v$  分别表示流动速度在  $x$  (管轴向) 与  $r$  (管径向) 轴上的分量 (见图1),  $p$  为压力,  $\rho$  为血液密度,  $\nu = \eta/\rho$  为血液的运动粘度,  $\eta$  为血液的动力粘度,  $R$  为动脉管的内半径。

其次, 若假定动脉管壁是各向同性的弹性薄壁圆管, 对动脉管的纵向运动起约束作用的周围结缔组织假定是 Voigt 粘弹体 (图2), 其单位管壁面积的阻尼系数与弹簧刚度分别为  $\mu$  与  $K$ , 若动脉管壁厚度为  $h$ , 管壁密度为  $\rho_w$ 。为了估计周围组织的影响, 如同 Morgan<sup>[2]</sup> 一样, 引进管壁的有效厚度

$$H = h \left( 1 + \frac{h_1 \rho_1 R_1}{h \rho_w R} \right) \quad (2.4)$$

式中  $h_1, \rho_1$  与  $R_1$  分别表示周围组织的厚度、密度与半径。这样, 当考虑到作为 Voigt 粘弹体的

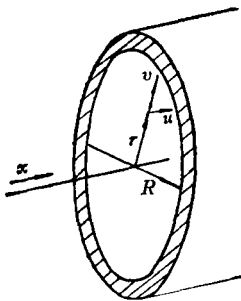


图1 柱坐标下的速度分量

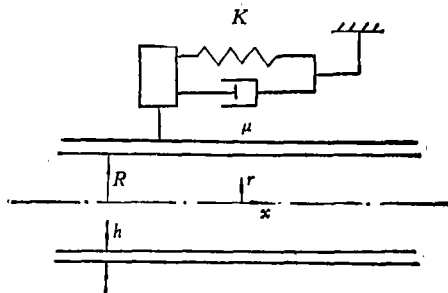


图2 周围组织的Voigt模型

周围组织的影响时, 描述管壁运动的Lamb方程可写为

$$\rho_w H \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \xi}{\partial t} + K \xi \right) = \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \eta \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{r=R} \quad (2.5)$$

$$\rho_w H \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = p - p_2 - \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left( \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\xi}{R^2} \right) - 2\eta \left( \frac{\partial v}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (2.6)$$

式中 $E$ 与 $\sigma$ 分别为动脉管壁的杨氏弹性模量与泊松比,  $\xi$ 与 $\zeta$ 分别为管壁运动的径向与轴向位移,  $p_2$ 为血管壁外侧的压力。

在血管壁( $r=R$ )上, 必须满足边界的耦合条件

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = u(x, R, t) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = v(x, R, t) \quad (2.8)$$

在动脉中, 假设脉动是以波速 $c$ 及圆频率为 $\omega$ 的波传播, 即可设

$$\left. \begin{aligned} p - p_2 &= p_0(r) \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right], \quad u = u_0(r) \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \\ v &= v_0(r) \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

以及

$$\xi = \xi_0 \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right], \quad \zeta = \zeta_0 \exp\left[j\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right] \quad (2.10)$$

式中  $j = \sqrt{-1}$ 。

将(2.9)式代入连续性方程(2.3), 知

$$v_0 = O\left(\frac{\omega R}{c} u_0\right)$$

以及将(2.9)式与(2.10)式代入边界耦合条件(2.7)与(2.8)式, 有

$$\zeta_0 = O\left(\frac{u_0}{\omega}\right), \quad \xi_0 = O\left(\frac{R}{c} u_0\right)$$

考虑到在动脉系统中血液的流动通常有

$$\frac{c}{u_0} \gg 1, \quad \frac{\omega^2 R^2}{c^2} \ll 1 \quad (2.11)$$

这样, Navier-Stokes方程(2.1)和(2.2)可线性化为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (2.13)$$

同时, 管壁运动方程(2.5)与(2.6)可简化为

$$\rho_w H \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \mu \frac{\partial \xi}{\partial t} + K \xi \right) = \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left( \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) - \eta \left( \frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=R} \quad (2.14)$$

$$p - p_2 - \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left( \frac{\sigma}{R} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\xi}{R^2} \right) = 0 \quad (2.15)$$

分析动脉中的脉动流就是在管壁耦合条件(2.7)与(2.8)的基础上, 联立求解方程(2.12)~(2.15).

### 三、血液流动方程的解

当将(2.9)式代入血液运动方程(2.12)与(2.13)时, 得

$$\frac{d^2 u_0}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{du_0}{dy} + j^3 \alpha^2 u_0 = -j \frac{\omega}{c} \frac{R^2}{\eta} p_0 \quad (3.1)$$

$$\frac{d^2 v_0}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{dv_0}{dy} + (j^3 \alpha^2 - \frac{1}{y^2}) v_0 = \frac{R}{\eta} \frac{dp_0}{dy} \quad (3.2)$$

式中  $y = \frac{r}{R}$ ,  $\alpha = R \sqrt{\frac{\omega}{\nu}}$  为频率参数. 显然, 方程(3.1)与(3.2)分别是零阶与一阶贝塞尔方程. 为了求解这些方程, 假定

$$p_0(y) = A J_0(ky) \quad (3.3)$$

式中  $A$ ,  $k$  为待定系数,  $J_0(ky)$  为第一类零阶贝塞尔函数. 这样, 由方程(3.1)与(3.2)可分别求得基本解为

$$u_0(y) = C_1' \frac{J_0(j^{3/2} \alpha y)}{J_0(j^{3/2} \alpha)} - j \frac{\omega}{c} \frac{R^2}{\eta} \frac{A}{j^3 \alpha^2 - k^2} J_0(ky) \quad (3.4)$$

$$v_0(y) = C_2' \frac{J_1(j^{3/2} \alpha y)}{J_0(j^{3/2} \alpha)} - \frac{R}{\eta} \frac{A k}{j^3 \alpha^2 - k^2} J_1(ky) \quad (3.5)$$

式中  $J_1(ky)$  为一阶贝塞尔函数,  $C_1'$  与  $C_2'$  为待定系数. 为了定出待定系数  $k$ , 首先将(2.9)式代入连续性方程(2.3), 有

$$\frac{1}{y} \frac{dv_0 y}{dy} = j \frac{\omega R}{c} u_0 \quad (3.6)$$

并进一步将(3.4)式与(3.5)式代入(3.6)式, 可得

$$k = j \frac{\omega R}{c}$$

以及

$$\frac{C_2'}{C_1'} = \frac{k}{j^{3/2} \alpha}$$

考虑到在生理条件下,  $k$  值很小, 即有

$$J_0(ky) \approx 1, \quad J_1(ky) \approx \frac{ky}{2}$$

这样, 可得速度表达式为

$$u_0(y) = C_1' \frac{J_0(j^{3/2} \alpha y)}{J_0(j^{3/2} \alpha)} + \frac{A}{\rho c} \quad (3.7)$$

$$v_0(y) = j \frac{\omega R}{2c} \left\{ C_1' \frac{2J_1(j^{3/2} \alpha y)}{j^{3/2} J_0(j^{3/2} \alpha)} + \frac{Ay}{\rho c} \right\} \quad (3.8)$$

## 四、脉搏波波速的表达式

首先, 将(2.9)式代入边界耦合条件(2.7)与(2.8), 可得

$$u_0(R) = j\omega\xi_0 \quad v_0(R) = j\omega\xi_0$$

当进一步将速度表达式(3.7)与(3.8)代入上式, 可得

$$C_1' + \frac{A}{\rho c} - j\omega\xi_0 = 0 \quad (4.1)$$

$$\frac{j\omega R}{2c} F_{10} C_1' + \frac{j\omega R}{2\rho c^2} A - j\omega\xi_0 = 0 \quad (4.2)$$

式中

$$F_{10} = \frac{2J_1(j^{3/2}a)}{aj^{3/2}J_0(j^{3/2}a)}$$

其次, 将(2.10)式代入管壁运动方程(2.14)与(2.15), 并注意到速度表达式(3.7), 则得

$$A - \frac{Bh}{R^2} \xi_0 + \frac{j\omega Bh\sigma}{Rc} \xi_0 = 0 \quad (4.3)$$

与

$$\frac{j^3\omega R\rho F_{10}}{2} C_1' - \frac{Bh\sigma}{R} \frac{j\omega}{c} \xi_0 + \left(\rho_w H\Omega - \frac{Bh\omega^2}{c^2}\right) \xi_0 = 0 \quad (4.4)$$

式中

$$\Omega = \omega^2 - \mu j\omega - K, \quad B = \frac{E}{1 - \sigma^2}$$

在方程(4.1)~(4.4)中, 含有4个待定系数  $C_1', A, \xi_0$  与  $\xi_0$ , 由于上述方程组是齐次的, 为了得到非零解, 其系数行列式必须为零, 即有

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{\rho c} & 0 & -j\omega \\ \frac{j\omega R F_{10}}{2c} & \frac{j\omega R}{2\rho c^2} & -j\omega & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{Bh}{R^2} & \frac{Bh\sigma j\omega}{Rc} \\ \frac{j^3\omega R\rho F_{10}}{2} & 0 & -\frac{Bh\sigma j\omega}{Rc} & \rho_w H\Omega - \frac{Bh\omega^2}{c^2} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.5)$$

显然, 这个4阶行列式可以进一步化为如下的三阶行列式:

$$\begin{vmatrix} \frac{j\omega R(1 - F_{10})}{2\rho c^2} & -j\omega & \frac{j^2\omega^2 R F_{10}}{2c} \\ 1 & -\frac{Bh}{R^2} & \frac{Bh\sigma j\omega}{Rc} \\ -\frac{j^3\omega R F_{10}}{2c} & -\frac{Bh\sigma j\omega}{Rc} & \rho_w H\Omega - \frac{Bh}{c^2} + \frac{\omega^2 \rho R F_{10}}{2} \end{vmatrix} = 0 \quad (4.6)$$

展开这个行列式, 并经整理后, 可得关于 $c^2$ 的二次方程将为

$$\left(\frac{Bh}{\rho Rc^2}\right)^2 (1-F_{10})(1-\sigma^2) - \left(\frac{Bh}{\rho Rc^2}\right) \left\{ \left(\frac{1}{2} - 2\sigma\right) F_{10} + 2 + \Omega^* (1-F_{10}) \right\} + 2\Omega^* + F_{10} = 0 \quad (4.7)$$

由此, 可得

$$\left(\frac{c_0}{c}\right)^2 = G \pm \sqrt{G^2 - N} \quad (4.8)$$

式中

$$c_0^2 = \frac{Bh}{\rho R} = \frac{Eh}{\rho R(1-\sigma^2)}, \quad G = \frac{\left(\frac{1}{2} - 2\sigma\right) F_{10} + 2 + \Omega^* (1-F_{10})}{2(1-F_{10})(1-\sigma^2)}$$

$$N = \frac{2\Omega^* + F_{10}}{(1-F_{10})(1-\sigma^2)}, \quad \Omega^* = \frac{\rho_w H}{\rho R} \left( 1 - \frac{\mu j}{\omega} - \frac{K}{\omega^2} \right)$$

显然, 如关系式(4.8)所示, 波速 $c$ 是一个复数, 一般可写为

$$\frac{c_0}{c} = X(a) - jY(a) \quad (4.9)$$

式中

$$X(a) = \operatorname{Re}\{(G \pm \sqrt{G^2 - N})^{\frac{1}{2}}\}, \quad Y(a) = \operatorname{Im}\{(G \pm \sqrt{G^2 - N})^{\frac{1}{2}}\} \quad (4.10)$$

现在由(2.9)式知, 压力表达式为

$$p - p_2 = p_0(r) \exp \left[ j\omega \left( t - \frac{x}{c} \right) \right]$$

将复波速 $c$ 的表达式(4.9)代入上式, 得

$$p - p_2 = p_0(r) \exp \left[ -\omega \frac{xY(a)}{c_0} \right] \exp \left[ j\omega \left( t - \frac{xX(a)}{c_0} \right) \right] \quad (4.11)$$

这说明,  $Y(a)$ 的存在将导致压力波的振幅按指数规律衰减, 而压力波的相速度将为 $\frac{c_0}{X(a)}$ , 因此, 只要由(4.10)式算出 $X(a)$ 与 $Y(a)$ , 即可求得动脉中压力波的相速度以及了解压力波的衰减情况。

最后, 作为复波速一般表达式(4.7)的特例, 若动脉管周围组织的轴向约束仅是简单的弹性约束, 即 $\mu=0$ , 这时

$$\Omega^* = \frac{\rho_w H}{\rho R} \left( 1 - \frac{K}{\omega^2} \right)$$

从而, (4.7)式可退化为与Womersley<sup>[6]</sup>完全相同的波速方程; 若进一步假定 $\mu=0, K=0$ , 即

$$\Omega^* = \frac{\rho_w h}{\rho R}$$

这样, 关系式(4.7)可进一步退化为无周围约束时所对应的著名Womersley的结果<sup>[4]</sup>。

## 五、脉动流的速度表达式

由关系式(3.7)与(3.8)知, 动脉管内脉动流的轴向与径向的速度表达式为

$$u_0(y) = \frac{A}{\rho c} \left\{ 1 + \frac{C'_1}{A} \cdot \frac{J_0(j^{3/2}\alpha y)}{J_0(j^{3/2}\alpha)} \right\} \quad (5.1)$$

$$v_0(y) = j \frac{\omega R A}{2\rho c^2} \left\{ \frac{C'_1}{A} \frac{2J_1(j^{3/2}\alpha y)}{\alpha j^{3/2} J_0(j^{3/2}\alpha)} + y \right\} \quad (5.2)$$

为了求得待定系数  $\frac{C'_1}{A}$ ，首先由方程(4.3)与(4.4)消去  $\xi_0$  后得

$$\frac{A}{\rho c} \left( 1 + \frac{\rho R c^2}{B h \sigma} \right) + C'_1 - \frac{c}{R \sigma} \xi_0 = 0 \quad (5.3)$$

现在进一步由方程(4.2)与(5.3)消去  $\xi_0$ ，可得待定系数为

$$\frac{C'_1}{A} = - \frac{1 - \frac{1}{2\sigma} + \left( \frac{c}{c_0} \right)^2 \frac{1}{\sigma}}{1 - \frac{F_{10}}{2\sigma}} \quad (5.4)$$

将上式先代入关系式(5.1)与(5.2)，而后再代入(2.9)式，则可得脉动流的轴向与径向速度分量的表达式。

#### 参 考 文 献

- [1] Karreman, G., Some contributions to the mathematical biology of blood circulation, Reflections of pressure waves in the artery system, *Bull. Math. Biophys.*, 14 (1952), 327—350.
- [2] Morgan, G. W. and J. P. Kiely, Wave propagation in a viscous liquid contained in a flexible tube, *J. Acoust. Soc. Amer.*, 26 (1954), 323—328.
- [3] Womersley, J. R., Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube, I. The linear approximation for long waves, *Phil. Mag.*, 46 (1955), 199—221.
- [4] Womersley, J. R., Method for the calculation of velocity, rate of flow and viscous drag in arteries when the pressure gradient is known, *J. Physiol.*, 127 (1955), 553—563.
- [5] McDonald, D. A., *Blood Flow in Arteries*, Edward Arnold (Publishers) Ltd, (1974). 中译本, 《动脉中的血液流》. 柳兆荣等译, 科学出版社, (1982).
- [6] Womersley, J. R., Oscillatory flow in arteries: The constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission, *Phys. in Med. Biol.*, 2 (1957), 178—187.

## Pulsatile Flow in Arteries with External Restraint of Visco-Elastic Tissue

Liu Zhao-rong

*(Fudan University, Shanghai)*

### Abstract

The presence of a longitudinal constraint must be conceived physiologically as due largely to the connective tissue attachments on the outside of the artery. Living tissues are visco-elastic bodies. In order to analyse the effect of external visco-elastic tissue to pulsatile flow in arteries, in this paper the external connective tissue of artery will be considered as a Voigt visco-elastic body, and the expressions of pulse wave velocity and the velocity of pulsatile flow will be found by the blood motion equations (Lamb equation). The results of free elastic tube<sup>(4)</sup> and with external elastic restraint<sup>(6)</sup> by Womersley can be considered as a particular case and can be covered in this paper.