应用数学和力学，第5卷第4期（1984年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

单色弹性波谱的分裂*

沈　惠　川

（中国科学技术大学，1983年2月24日收到）

摘　要

本文根据量子电动力学的类比，导出了弹性波-声子的Dirac方程，并研究了单色弹性波谱在外场作用下的分裂.

单色弹性波的行为，等同于声子的行为，它在经典理论中，常用d'Alembert方程来描述．这个方程的解早已为人们所熟知，并在任何一本关于力学或波动的教科书中都可找到．现在的问题是，当存在外场作用时，单色弹性波的波谱会不会出现类似于“反常Zeeman效应”那样的多重分裂？再则，经典波动方程是关于$\partial/\partial t$的二阶偏微分方程，它的解虽然已被人们所发现，但是这样的解是否也存在着“简併”？声子作为一种“拟粒子”，是否也象电子一样具有“自旋”？所有这些问题，一下子很难予以回答，但却是引人入胜的．人们以往已经较多地谈论过连续介质中各种波的耦合．现在是否能换个题目来谈谈波谱的分裂？我们提出这样的问题并非一点基础也没有．近代物理关于这类问题的处理方法已为我们开创了先例．本文试图在给出单色弹性波-声子的Dirac方程的基础上，通过两个实例，从理论上回答上面提出的问题．至于实验上的验证是否能达到量子电动力学那样高的精度，则是理论对实验力学工作者和实验物理学家所提出的任务．如果认为物质波与一般波动不应有太大的区别，则由量子电动力学类比得到的理论应该是没有问题的．

本文虽然以单色弹性波作为研究对象，但是其原则同样适用于其他同类波动问题．

一、单色弹性波-声子的Dirac方程

当外场力为矢量力的时候，弹性介质中的位移场u_i应满足Lamé方程[1-3]

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_k}\right)+\mu\frac{\partial^2}{\partial x_k\partial x_k}u_i+\rho f_i$$

式中ρ为介质密度，λ，μ为Lamé常数．由矢量的整体分解（Stokes分解），对上述方程分别左乘算子$\frac{\partial}{\partial x_i}$或$e_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}$，最后可导致弹性波方程

* 钱伟长推荐.

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)\psi=0 \tag{1.1}$$

式中ψ表示位移u_i的标势或矢势，c为波速[4]：

$$c=\begin{cases} c_l=\sqrt{\dfrac{\lambda+2\mu}{\rho}} \\ c_t=\sqrt{\dfrac{\mu}{\rho}} \end{cases} \tag{1.2}$$

而外场力f_i的标势或矢势U，则为方程

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_k}\right)u=\frac{U}{c^2}$$

的一个特解。

弹性波方程还可以进行缩写，为此，可引入符号

$$K_r=-i\frac{\partial}{\partial x_r}\quad (r=1,2,3);\qquad K_4=iK_0=\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \tag{1.3}$$

式中$x_0=ct$。由此，弹性波方程可缩写成

$$\left[\sum_1^4 (K_\alpha)^2\right]\psi=0 \tag{1.4}$$

重复的指标按 Einstein 约定求和。K_α可以解释为算符，其意义在下面给出。

波动方程(1.4)式是不能令人十分满意的。虽然方程(1.4)式具有准相对论不变性的形式，因而可以作为波动力学的一般理论，但根据 P. A. M. Dirac 的相当普遍的推理[5-6]，波动方程必须是算符$\partial/\partial t$或K_4的线性式。另外一个考虑，是要使我们的新的波动方程必须在准Lorentz变换中以简单的方式变换，以使方程具有普遍意义。(在这里，我们不考虑高速运动)由于这两方面的考虑，新的波动方程应为$K_r(r=1,2,3)$的有理式和线性式，也应为K_4的有理式和线性式。

现在让我们来回忆一下量子力学中由 Klein-Gordon 方程

$$\left[\sum_1^4 (p_\alpha)^2+m^2c^2\right]\psi=0 \tag{1.5}$$

向 Flügge 标准形式[7]的 Dirac 方程

$$\left[i\sum_1^4 \gamma^\alpha p_\alpha+mc\right]\psi=0 \tag{1.6}$$

的过渡。当忽略被禁锢在粒子内部的静止能量mc^2(这里c为光速)的时候，方程(1.5)式与方程(1.4)式只相差一个常数因子$\hbar^2$(这里$\hbar$为 Planck 常数)。当然方程(1.5)式中的ψ与方程(1.4)式中的ψ的含义是各不相同的。量子力学中的$|\psi|^2$代表几率[8-10]，而弹性力学中的ψ表示位移势(也可以是位移本身)。众所周知，动量p_r与波矢k_r的关系为

$$k_r=p_r/\hbar\qquad (r=1,2,3) \tag{1.7}$$

而

$$p_\alpha=-i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\qquad (\alpha=0,1,2,3);\quad p_4=ip_0 \tag{1.8}$$

因此(1.3)式和(1.4)式中的 K_a 表示波矢算符，也可以称为声子算符．因为声子用波矢表示[11-13]．

由于方程(1.4)式与方程(1.5)式对应，因而 Dirac 方程(1.6)式对应的应是弹性波-声子方程

$$\left[\sum_1^4 \gamma^a K_a\right]\psi=0 \tag{1.9}$$

其中 γ^a 为 Flügge 标准矩阵 ($a=1,2,3,4$)：

$$\left.\begin{aligned}
\gamma^1&=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\gamma^3&=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^4=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

$$\gamma^1=\sigma_2\otimes\sigma_1,\quad \gamma^2=\sigma_2\otimes\sigma_2,\quad \gamma^3=\sigma_2\otimes\sigma_3,\quad \gamma^4=\sigma_3\otimes\sigma_4 \tag{1.11}$$

符号⊗表示直积：若

$$a=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\quad b=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

则

$$a\otimes b=\begin{pmatrix} a_{11}b & a_{12}b \\ a_{21}b & a_{22}b \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

σ_k ($k=1,2,3$)为 Pauli 矩阵，σ_4为 2×2 单位矩阵：

$$\sigma_1=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ \sigma_4=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

另外，Flügge 标准矩阵 $\gamma^a=\gamma_a$ 有下列性质：

$$\gamma^a\gamma_\beta+\gamma_\beta\gamma^a=2\delta^a_\beta \tag{1.14}$$

从方程(1.9)式可以看出，γ^a 不可能用两行两列的矩阵来表示，因为若要保持两行两列的矩阵，就不可能得到超过三个的反对易量的表象．研究表明，由于声子算符 K_a 有四个分量，相应的 γ^a 矩阵就必须是四行四列，而 γ^a 矩阵的四行四列，又要求势函数 ψ 必可取四个值，才能使矩阵可以用来乘它．因此，作为波方程降阶（由二阶降为一阶）的代价，是方程数目的增加和势函数取值数目的增加．当然，势函数取值数目的增加不是毫无物理意义的，有许多新的东西，需要加以探讨．

由方程(1.4)式变为方程(1.9)式，有时称作方程(1.4)式的“开方”运算，反之，则称为“平方”运算．

将方程(1.9)式展开，令 $\psi(=|\psi\rangle)$为

$$\psi=(\psi_1\ \psi_2\ \psi_3\ \psi_4)^T \tag{1.15}$$

可以写出：

$$
\left.\begin{array}{l}
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi_1}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi_4}{\partial x_1}+i\dfrac{\partial\psi_4}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_3}=0,\quad \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi_2}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_1}-i\dfrac{\partial\psi_3}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\psi_4}{\partial x_3}=0\\
\dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi_3}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_1}+i\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_2}-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_3}=0,\quad \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\psi_4}{\partial t}-\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_1}-i\dfrac{\partial\psi_1}{\partial x_2}+\dfrac{\partial\psi_2}{\partial x_3}=0
\end{array}\right\}\tag{1.16}
$$

方程(1.9)式还可以化成球坐标系下的形式和柱坐标系下的形式。在如下球坐标系中：

$$x_1=r\sin\theta\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\theta\sin\varphi,\quad x_3=r\cos\theta\tag{1.17}$$

求得

$$
\begin{aligned}
\gamma^1\frac{\partial}{\partial x_1}+\gamma^2\frac{\partial}{\partial x_2}+\gamma^3\frac{\partial}{\partial x_3}&=(\sin\theta\cos\varphi\,\gamma^1+\sin\theta\sin\varphi\,\gamma^2+\cos\theta\,\gamma^3)\frac{\partial}{\partial r}\\
&\quad+(\cos\theta\cos\varphi\gamma^1+\cos\theta\sin\varphi\gamma^2-\sin\theta\,\gamma^3)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\\
&\quad+(-\sin\varphi\,\gamma^1+\cos\varphi\gamma^2)\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
&=\gamma^r\frac{\partial}{\partial r}+\gamma^\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}+\gamma^\varphi\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned}\tag{1.18}
$$

其中

$$
\left.\begin{array}{l}
\gamma^r=\begin{pmatrix}0&0&-i\cos\theta&-ie^{-i\varphi}\sin\theta\\0&0&-ie^{i\varphi}\sin\theta&i\cos\theta\\i\cos\theta&ie^{-i\varphi}\sin\theta&0&0\\ie^{i\varphi}\sin\theta&-i\cos\theta&0&0\end{pmatrix}\\
\gamma^\theta=\begin{pmatrix}0&0&i\sin\theta&-ie^{-i\varphi}\cos\theta\\0&0&-ie^{i\varphi}\cos\theta&-i\sin\theta\\-i\sin\theta&ie^{-i\varphi}\cos\theta&0&0\\e^{i\varphi}\cos\theta&i\sin\theta&0&0\end{pmatrix}\\
\gamma^\varphi=\begin{pmatrix}0&0&0&-e^{-i\varphi}\\0&0&e^{i\varphi}&0\\0&e^{-i\varphi}&0&0\\-e^{i\varphi}&0&0&0\end{pmatrix}
\end{array}\right\}\tag{1.19}
$$

在如下柱坐标系中：

$$x_1=r\cos\varphi,\quad x_2=r\sin\varphi,\quad x_3=x_3\tag{1.20}$$

可求得

$$
\begin{aligned}
\gamma^1\frac{\partial}{\partial x_1}+\gamma^2\frac{\partial}{\partial x_2}&=(\cos\varphi\gamma^1+\sin\varphi\gamma^2)\frac{\partial}{\partial r}+(-\sin\varphi\gamma^1+\cos\varphi\gamma^2)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\\
&=\gamma^r\frac{\partial}{\partial r}+\gamma^\varphi\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}
\end{aligned}\tag{1.21}
$$

其中

$$
\gamma^r=\begin{pmatrix}0&0&0&-ie^{-i\varphi}\\0&0&-ie^{i\varphi}&0\\0&ie^{-i\varphi}&0&0\\ie^{i\varphi}&0&0&0\end{pmatrix},\quad
\gamma^\varphi=\begin{pmatrix}0&0&0&-e^{-i\varphi}\\0&0&e^{i\varphi}&0\\0&e^{-i\varphi}&0&0\\-e^{i\varphi}&0&0&0\end{pmatrix}\tag{1.22}
$$

在球坐标系中当ψ与θ, φ无关；在柱坐标系中当ψ与φ无关时，γ^r中的θ, φ或φ可取任意值．在球坐标系中取$\theta=\frac{\pi}{2}$, $\varphi=0$；在柱坐标系中取$\varphi=0$，此时，γ^r可写成

$$\gamma^r=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\gamma^1=\sigma_2\otimes\sigma_1 \tag{1.23}$$

这个结果与Dirac在文献[5]中所导出的ϵ相符．

当有外场存在时，推广的方程可由方程(1.9)式加上一些包含场量的附加项得到，在量子电动力学中，代替方程(1.6)式中的p_a，用经典规则，以

$$D_a=p_a+\frac{e}{c}A_a \qquad (a=0,\ 1,\ 2,\ 3); \qquad D_4=iD_0 \tag{1.24}$$

代入，得

$$\left[i\sum_1^4\gamma^a D_a+mc\right]\psi=0 \qquad (c\text{为光速}) \tag{1.25}$$

对应于方程(1.25)式，有外场存在时的单色弹性波-声子方程应为

$$\left[\gamma^a\left(\frac{\partial}{\partial x_a}-iB_a\right)\right]\psi=0 \tag{1.26}$$

其中重复的上、下指标表示求和，B_a为外场的波矢算符，具有波矢的量纲．

设有外场存在时的单色弹性波-声子方程(1.9)式，等效于经典波动方程(1.4)式，当有外场存在时这种等效性便不复存在．但是我们还是有理由认为方程(1.26)式是正确的方程，更具有优越性，因为它不但数学上优美，对于准Lorentz变换协变，而且它更符合一般原则，并能给出更多的物理内容．

方程(1.26)式是从量子电动力学中的Dirac方程类比过来的，因此在处理问题时，可以彼此借用对方的理论和方法．当然，正如我们所一再强调的，它们的物理意义十分不同．

从方程(1.9)式和方程(1.26)式中，还可以得出另外一条结论：声子的静止能量为零．

二、单色弹性波谱的分裂

由于在方程(1.26)式中，ψ的取值有四个，因此在一般情况下，可以预见到弹性波谱的分裂．作者在研究这个问题的前后，见到了李高、王仁川等人的文章[14]，该文给出了带有均匀电场的Dirac方程的严格解(简称L-W解)．这个严格解及其所使用的方法可以搬用到单色弹性波-声子的Dirac方程(1.26)式中，并且可以进一步发挥．严格解的存在，便于分析其物理结果．

我们研究的是单色弹性波．单色弹性波的行为相当于一个声子的行为．在求解方程(1.26)式之前，先给出下列几个关系式：

$$(\sigma_2\otimes\sigma_3)(\sigma_3\otimes\sigma_4)=i\sigma_1\otimes\sigma_3 \tag{2.1}$$

$$(\sigma_2\otimes\sigma_3)(\sigma_4\otimes\sigma_3)=i\sigma_2\otimes\sigma_4 \tag{2.2}$$

$$(\sigma_2\otimes\sigma_3)(\sigma_2\otimes\sigma_1)=-\sigma_4\otimes\sigma_2 \tag{2.3}$$

$$(\sigma_2\otimes\sigma_1)(\sigma_3\otimes\sigma_4)=i\sigma_1\otimes\sigma_1 \tag{2.4}$$

以及诸如此类。另外，若

$$\beta_1=[\sigma_4\otimes\sigma_4-i\sigma_2\otimes\sigma_4]$$

则

$$\beta_1^{-1}=\frac{1}{2}[\sigma_4\otimes\sigma_4+i\sigma_2\otimes\sigma_4] \tag{2.5}$$

因为

$$\beta^{-1}\beta=\frac{1}{2}[\sigma_4\otimes\sigma_4+i\sigma_2\otimes\sigma_4][\sigma_4\otimes\sigma_4-i\sigma_2\otimes\sigma_4]$$

$$=\frac{1}{2}[(\sigma_4\otimes\sigma_4)^2+(\sigma_2\otimes\sigma_4)^2]=(\sigma_4\otimes\sigma_4)^2$$

由(2.5)式可得

$$\beta_1^{-1}\sigma_1\otimes\sigma_3\beta_1=\sigma_3\otimes\sigma_3 \tag{2.6}$$

同样，若 $\beta_2=[\sigma_4\otimes\sigma_4+i\sigma_1\otimes\sigma_4]$

则 $$\beta_2^{-1}\sigma_2\otimes\sigma_4\beta_2=\sigma_3\otimes\sigma_4 \tag{2.7}$$

或若 $\beta_3=(\sigma_4\otimes\sigma_4+i\sigma_1\otimes\sigma_2)$，$\beta_3^{-1}=\frac{1}{2}[\sigma_4\otimes\sigma_4-i\sigma_1\otimes\sigma_2]$

则 $$\beta_3^{-1}\sigma_1\otimes\sigma_1\beta_3=-\sigma_4\otimes\sigma_3 \tag{2.8}$$

以及诸如此类。

采用 2×2 矩阵的直积来表示 4×4 矩阵可以使书写简洁。因为 σ_α 与 σ_β（α，$\beta=1$，2，3，4)的直积有十六种可能。Dirac 矩阵和 Flügge 矩阵在十六种可能中并非全部。

下面我们研究弹性波谱的分裂，也即求解方程(1.26)式。我们通过两个例子来说明这个问题。

（一） 轴对称解。外场平行于轴线。

若外场是均匀的，可设

$$B_\alpha=-ax_3\delta_{\alpha 4} \tag{2.9}$$

其中 a 为场常数。假设垂直于轴线的 r 方向可以取平面波形式的解，k_r 为r方向的波矢分量，

$$k^2=k_r^2+k_3^2=\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \tag{2.10}$$

ω 为圆频率，因此

$$\psi=\phi(x_3)\exp[i(\omega t-k_r r)] \tag{2.11}$$

将(2.9)式及(2.11)式代入方程(1.26)式，消去$\exp[i(\omega t-k_r r)]$因子，得

$$\left[\gamma^3\frac{d}{dx_3}-\left(\frac{\omega}{c}+ax_3\right)\gamma^4-ik_r\gamma^r\right]\phi=0 \tag{2.12}$$

两端左乘 $\gamma^3=\sigma_2\otimes\sigma_3$，得

$$\left[\frac{d}{dx_3}-i\left(\frac{\omega}{c}+ax_3\right)\sigma_1\otimes\sigma_3\right]\phi=-k_r\sigma_4\otimes\sigma_2\phi \tag{2.13}$$

两端再作用算子$\frac{d}{dx_3}$，得

$$\frac{d^2}{dx_3^2}\phi=\left[\, ia\sigma_1\otimes\sigma_3+k_r^2-\left(\frac{\omega}{c}+ax_3\right)^2\right]\phi \tag{2.14}$$

方程(2.14)式是矩阵方程，还不能分成分量方程。办法是令右矢ϕ（应写作$|\phi\rangle$）为

$$\phi=\beta_1 f \tag{2.15}$$

式中β_1及β_1^{-1}如(2.5)式所示。然后在方程(2.14)式两端左乘β_1^{-1}，便可得

$$\frac{d^2}{dx_3^2}f=\left[ia\sigma_3\otimes\sigma_3+k_r^2-\left(\frac{\omega}{c}+ax_3\right)^2\right]f \tag{2.16}$$

联立方程组(2.16)式中的函数f_α（$\alpha=1, 2, 3, 4$)现在被分离成分量方程了。其中f_1，f_4满足方程

$$u''+\left[\left(\frac{\omega}{c}+ax_3\right)^2-k_r^2-ia\right]u=0 \tag{2.17}$$

而f_2，f_3满足(2.17)式的共轭方程。引入新的自变量ξ和新参数b：

$$\xi=a^{\frac{1}{2}}\left(x_3+\frac{\omega}{ac}\right),\quad b=a^{-\frac{1}{2}}k_r \tag{2.18}$$

使方程(2.17)式无量纲化为

$$\left[\frac{d^2}{d\xi^2}+(\xi^2-b^2-i)\right]u=0 \tag{2.19}$$

其解为

$$u_1=\exp\left[\frac{i}{2}\xi^2\right]M\left(\frac{b^2}{4}i,\ \frac{1}{2},\ -i\xi^2\right)$$

$$u_2=\xi\exp\left[\frac{i}{2}\xi^2\right]M\left(\frac{1}{2}+\frac{b^2}{4}i,\ \frac{3}{2},\ -i\xi^2\right)$$

它的共轭解为

$$\left.\begin{aligned}u_1^*&=\exp\left[-\frac{i}{2}\xi^2\right]M\left(-\frac{b^2}{4}i,\ \frac{1}{2},\ i\xi^2\right)\\ u_2^*&=\xi\exp\left[-\frac{i}{2}\xi^2\right]M\left(\frac{1}{2}-\frac{b^2}{4}i,\ \frac{3}{2},\ i\xi^2\right)\end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

式中M为Kummer函数[15]。

文献[14]用的是直角坐标系形式，好处是可以方便地确定未知常数之间的关系。在代入方程(1.26)式之后，设

$$\phi=ZC \tag{2.21}$$

其中

$$Z=\begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} & z_{13} & z_{14}\\ z_{21} & z_{22} & z_{23} & z_{24}\\ z_{31} & z_{32} & z_{33} & z_{34}\\ z_{41} & z_{42} & z_{43} & z_{44}\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix} c_1\\ c_2\\ c_3\\ c_4\end{pmatrix} \tag{2.22}$$

$z_{\alpha\beta}$(α, $\beta=1, 2, 3, 4$)为x_3的待定函数，c_α为待定常数。由此可将方程拆成下列两组：

$$\left[\gamma^3\frac{d}{dx_3}-\left(\frac{\omega}{c}+ax_3\right)\gamma^4\right]\phi=N\phi \tag{2.23a}$$

$$[N-i(k_1\gamma^1+k_2\gamma^2)]ZC=0 \tag{2.23b}$$

式中 k_1，k_2 分别为 x_1，x_2 方向的波矢．考虑到 4×4 常数矩阵 N 一方面必须使方程(2.23a)式相容，另一方面必须满足 $\mathrm{Det}[N-i(k_1\gamma^1+k_2\gamma^2)]=0$，因而 N 只可能是 $\lambda\sigma_4\otimes\sigma_3$．矩阵 Z 的适当选取必须使

$$\gamma^a Z=Z\gamma^a \quad (a=1,\ 2);\qquad NZ=ZN \tag{2.24}$$

简单的运算可算出

$$Z=\begin{pmatrix} F_1 & 0 & -F_3 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 & -F_4 \\ F_4 & 0 & F_2 & 0 \\ 0 & F_3 & 0 & F_1 \end{pmatrix} \tag{2.25}$$

另一方面，由于有(2.24)式，就有

$$[N-i(k_1\gamma^1+k_2\gamma^2)]C=0 \tag{2.26}$$

由 $$\mathrm{Det}[\lambda\sigma_4\otimes\sigma_3-i(k_1\sigma_2\otimes\sigma_1+k_2\sigma_2\otimes\sigma_2)]=0$$

得 $$\lambda=\lambda_0,\qquad \lambda_0=(k_1^2+k_2^2)^{1/2}=k_r \tag{2.27}$$

并且方程(2.26)式的解为

$$c_4=\left(\frac{k_1+ik_2}{k_1-ik_2}\right)^{1/2}c_1,\quad c_3=\left(\frac{k_1-ik_2}{k_1+ik_2}\right)^{1/2}c_2 \tag{2.28}$$

及有关系式

$$c_3c_4=-c_1c_2 \tag{2.29}$$

将(2.25)式与(2.21)式结合起来，可算出 Z 矩阵的各个分量．

最后的解可写为

$$\left.\begin{aligned} &\psi=\exp[i(\omega t-k_r r)]ZC,\ Z=\begin{pmatrix} f & 0 & -g & 0 \\ 0 & g & 0 & -f \\ f & 0 & g & 0 \\ 0 & g & 0 & f \end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} \\ &f=u_1+abu_2,\qquad g=u_1^*+\frac{1}{a}bu_2^*,\qquad b=a^{-1/2}k_r,\ a=-i\frac{c_3}{c_1} \\ &c_4=\left(\frac{k_1+ik_2}{k_1-ik_2}\right)^{1/2}c_1,\quad c_3=\left(\frac{k_1-ik_2}{k_1+ik_2}\right)^{1/2}c_2 \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

待定的常数只有 c_1，c_2 两个．当 k_1，$k_2=0$ 时，方程(1.26)式的解可由(2.30)式取极限得到．在要求(2.24)式成立时，必须有 $\mathrm{Det}\,Z\neq0$，现在得到的 f 和 g，根据 Kummer 函数的性质，可知 $\mathrm{Det}\,Z=4f^2g^2\neq0$，符合上述要求．

（二）球对称解．外场为矮力场．这个解与 L-W 解不同．

设矮力场为

$$B_a=-\frac{a}{r}\delta_{a4} \tag{2.31}$$

其中 a 也为场常数．令

$$\psi=e^{i\omega t}R(r) \tag{2.32}$$

代入方程(1.26)式，消去 $e^{i\omega t}$ 因子后，得

$$\left[\gamma^r \frac{d}{dr} - \left(\frac{\omega}{c} + \frac{a}{r}\right)\gamma^4\right]R = 0 \tag{2.33a}$$

即

$$\left[\sigma_2 \otimes \sigma_1 \frac{d}{dr} - \left(\frac{\omega}{c} + \frac{a}{r}\right)\sigma_3 \otimes \sigma_4\right]R = 0 \tag{2.33b}$$

将(2.33b)式左乘 $\gamma^1 = \sigma_2 \otimes \sigma_1$，得

$$\left[\frac{d}{dr} - i\left(\frac{\omega}{c} + \frac{a}{r}\right)\sigma_1 \otimes \sigma_1\right]R = 0 \tag{2.34}$$

然后作用算符 $\frac{d}{dr}$，有

$$\frac{d^2}{dr^2}R = \left[-i\frac{a}{r^2}\sigma_1 \otimes \sigma_1 - \left(\frac{\omega}{c} + \frac{a}{r}\right)^2\right]R \tag{2.35}$$

将矩阵方程分离成分量方程，令 $R = \beta_3 f$，其中 β_3 如(2.8)式所示。然后在方程(2.35)式两端左乘 β_3^{-1}，得

$$\frac{d^2}{dr^2}f = \left(i\frac{a}{r^2}\sigma_4 \otimes \sigma_3 - \left(\frac{\omega}{c} + \frac{a}{r}\right)^2\right]f \tag{2.36}$$

其中 f_1，f_4 满足方程

$$v'' + \left[\left(\frac{\omega}{c} + \frac{a}{r}\right)^2 - i\frac{a}{r^2}\right]v = 0 \tag{2.37a}$$

而 f_2，f_3 满足其共轭方程．(2.37a)式展开后为

$$v'' + \left[\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + 2\left(\frac{\omega}{c}\right)\frac{a}{r} + \frac{a(a-i)}{r^2}\right]v = 0 \tag{2.37b}$$

作变换，令

$$r = \frac{i}{2\left(\frac{\omega}{c}\right)}z \tag{2.38}$$

$$\kappa = ia, \qquad \mu = \left(a^2 - ia + \frac{1}{4}\right)^{1/2} \tag{2.39}$$

则(2.37b)式可化为标准的合流超几何微分方程——Whittaker 方程[18]

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \left(-\frac{1}{4} + \frac{\kappa}{z} - \frac{\frac{1}{4} - \mu^2}{z^2}\right)v = 0 \tag{2.40}$$

其解为

$$v_1 = z^{c/2}e^{-z/2}M(a,\ c,\ z), \quad v_2 = z^{1-c/2}e^{-z/2}M(a-c+1,\ 2-c,\ z) \tag{2.41}$$

其共轭解可由(2.41)式求得．式中

$$a = \frac{1}{2} - \kappa + \mu, \qquad c = 1 + 2\mu \tag{2.42}$$

$M(a,\ c,\ z)$ 为 Kummer 函数．

后面的计算与第一个例子相似．

从以上两个例子可以看出，波矢 k_3（在柱坐标下）或 k_r（在球坐标下）与圆频率ω的关系在一般情形中是很复杂的，并且由于外场的影响，波矢和频率都不是单值的。

我们在第一节中曾经说过，当有外场存在时，方程（1.26）式并不等效于经典的波动方程。上述计算作为例子，从事实上证明了这一点。经典波动方程的解不象（2.30）式这么复杂，说明它忽略了一些物理效应，从而是近似正确的。

另一方面，我们可以将方程(1.26)式“平方”，然后与经典波动方程比较，可以发现，“平方”后的方程要比经典波动方程多出两项。这多出的两项，就是经典波动方程所忽略的物理效应。但是它们不是实量，也就不能很直接地予以物理解释。在量子电动力学中，有类似的情况，它们被解释成电子的自旋影响。在我们这里，是否能对应于单色弹性波谱的分裂呢？我们现在还不能武断地作出肯定的回答。要回答这个问题，还需要实验的帮助。原则上说来，理论的正确性是毋容置疑的。

如果理论和实验之间存在分歧，原因要从我们工作中隐藏着的假设里去寻找。这一点，P. A. M. Dirac 早就指出过了。

附注：单色弹性波谱的分裂，在地球自转和扁率造成的自由振荡中早就被观测到[17]。

参考文献

[1] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，(1956).

[2] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц，《连续介质力学》，彭兆麟译，人民教育出版社，(1958).

[3] 湯川秀樹，《古典物理学》(Ⅰ，Ⅱ)，岩波講座，《現代物理学の基礎》(第1版)，1，2，岩波書店，(1975).

[4] 王竹溪，《统计物理导论》，人民教育出版社，(1956).

[5] Dirac, P. A. M.，《量子力学原理》，陈咸亨译，科学出版社，(1965).

[6] Dirac, P. A. M.，《物理学的方向》，张宜宗、郭应焕译，科学出版社，(1981).

[7] Van der Waerden, B. L.，《群论与量子力学》，赵展岳等译，上海科学技术出版社，(1980).

[8] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц，《量子力学》，严肃译，人民教育出版社，(1980).

[9] 湯川秀樹、豊田利幸，《量子力学》，(Ⅰ，Ⅱ)，岩波講座，《現代物理学の基礎》(第2版)，3，4，岩波書店，(1978).

[10] 朝永振一郎，《量子力学》(Ⅰ，Ⅱ)，みすず書房，(1978).

[11] Ландау Л. Д. и Е. М. Лифшиц，《统計物理学》，杨训恺译，人民教育出版社，(1964).

[12] 户田盛和，久保亮五，《统計物理学》，岩波講座，《現代物理学の基礎》(第2版)，5，岩波書店，(1978).

[13] Kittel, C.，《固体物理导论》，杨顺华等译，科学出版社，(1979).

[14] 李高、王仁川等，均匀电场中自旋为1/2的带电粒子（带有均匀电场的 Dirac 方程的严格解），中国科学技术大学学报，13，(1983)，2.

[15] 小谷正雄、橋本英典，《特殊函数》，现代应用数学丛書之一，钱端壮译，上海科学技术出版社，(1962).

[16] Erdélyi, A.，《高级超越函数》，张致中译，科学技术出版社，(1957).

[17] Stacey, F. D., *Physics of the Earth*, John Wiley & Sons. Inc, (1977).

The Fission of Spectrum Line of Monochoromatic Elastic Wave

Shen Hui-chuan

(University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

On the basis of the anology with quantum electrodynamics, Dirac equation of elastic wave-phonon is developed and the fission of spectrum line of monochoromatic elastic wave under the action of an external field is studied in this paper.