

文章编号: 1000-0887(2004)11-1157-06

混凝土断裂力学虚拟裂缝模型的 半解析有限元法*

王承强, 郑长良

(大连理工大学 工程力学系, 大连 116023)

(钟万勰推荐)

摘要: 利用平面扇形域哈密顿体系的方程, 通过分离变量法及共轭辛本征函数向量展开法, 以解析的方法推导出基于混凝土断裂力学中虚拟裂缝模型的平面裂纹解析元列式。将该解析元与有限元相结合, 构成半解析的有限元法, 可求解任意几何形状和荷载混凝土平面裂纹的虚拟裂缝模型计算问题。数值计算结果表明方法对该类问题的求解是十分有效的, 并有较高的精度。

关键词: 哈密顿体系; 虚拟裂缝模型; 半解析有限元法

中图分类号: O346.1 **文献标识码:** A

引 言

对于象混凝土这样准脆性材料的断裂问题, 已经提出许多模型, 如 Hillerborg 等提出的虚拟裂缝模型^[1], Bazant 和 Oh 的裂纹带断裂模型^[2], Jenq 和 Shah 的双参数断裂模型^[3], Karihaloo 和 Nallathambi 的等效裂缝模型^[4] 以及徐世⁵ 等提出的双 K 断裂准则^[5,6] 等等。其中 Hillerborg 等提出的虚拟裂缝模型最适合于有限元作 I 型断裂分析, 但是用普通有限元法做数值计算时, 要求裂缝尖端处的单元网格划分得十分细密, 即使这样裂缝尖端应力场的计算精度依然难以得到保证。

本文针对混凝土断裂力学中的虚拟裂缝模型提出了一种半解析有限元法。在裂缝尖端构造了一个解析的超级单元, 根据钟万勰院士提出的弹性力学哈密顿理论^[7], 推导出该超级单元的列式, 将该超级单元与普通有限单元相结合可求解混凝土断裂问题。数值结果表明该方法是准确而有效的。

1 虚拟裂缝模型及其半解析有限元法

考虑如图 1 所示的混凝土紧凑拉伸试件, 图中 P 为荷载, Δa 为裂缝的稳定扩展长度, a_0

* 收稿日期: 2003_03_20; 修订日期: 2004_08_20

基金项目: 国家教育部博士点专项基金资助项目(20010141024); 教育部留学回国人员科研启动基金资助项目(教外司留[2001]498); 辽宁省博士启动基金资助项目(2001102093); 2001 年国家高技术研究发展计划资助项目(2001AA412220)

作者简介: 王承强(1975—), 男, 汉族, 黑龙江清河人, 博士(Tel: + 86_25_85829618; E_mail: wangchengqiang@sina.com);

郑长良(联系人, Tel: + 86_411_84707950; E_mail: zhengcha@dlut.edu.cn)。

为裂缝的初始长度, a 为有效裂缝长度, $\sigma(x)$ 为粘聚分布闭合力, 可由虚拟裂缝模型的软化曲线来确定。根据虚拟裂缝模型, 混凝土裂缝稳定塑性扩展可由 $\sigma(x)$ 和 Δa 来描述, 材料性质的变化不再考虑, 混凝土裂缝的稳定扩展问题可处理成在裂缝稳定扩展长度上 Δa 作用有粘聚分布闭合力 $\sigma(x)$ 的弹性裂缝稳定扩展问题。

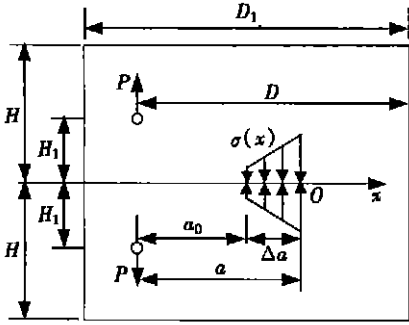


图 1 紧凑拉伸试件和虚拟裂缝模型

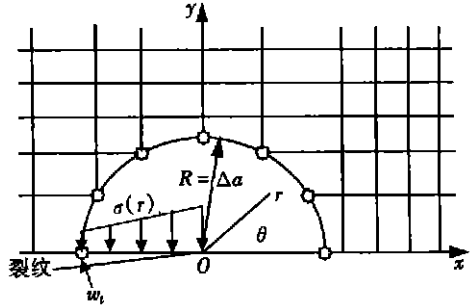


图 2 半解析有限元法计算模型

这里, 我们提出一个半解析有限元模型来解决混凝土虚拟裂缝模型这一问题, 如图 2 所示。试件被离散为裂缝尖端附近的一个圆形超级单元(以下简称为基于虚拟裂缝模型的裂纹解析元)和其周围的普通有限单元。该超级单元的圆心为图 1 中的 O 点, 半径为裂缝稳定扩展长度 Δa 。

这里我们采用双线性软化曲线模型, 如图 3 所示。在裂缝稳定扩展阶段, 即 $0 \leq w \leq w_1$, 有

$$\sigma(w) = f_t - (f_t - s_1) \frac{w}{w_1} \quad (0 \leq w \leq w_1), \tag{1}$$

其中: $s_1 = f_t/3$, $w_1 = w_{1c} \cdot f_t$ 为混凝土的抗拉强度, w_{1c} 为临界裂纹张开位移, w_t 为裂纹张开位移。在极坐标下, 如图 2 所示, w 与 r 的关系为:

$$w = \frac{r}{R} w_1, \tag{2}$$

其中 $R = \Delta a$ 。

对于临界裂缝, $P = P_{\max}$, $\Delta a = \Delta a_c$, $a = a_c = a_0 + \Delta a_c$, $w_t = w_{1c}$, 其中 P_{\max} 为最大荷载, Δa_c 为临界裂缝稳定扩展长度。此时有

$$\sigma(r) = k_1 r + k_2, \tag{3}$$

其中 $k_1 = - (f_t - s_1)/R$, $k_2 = f_t$, $R = \Delta a_c$ 。 $\tag{4}$

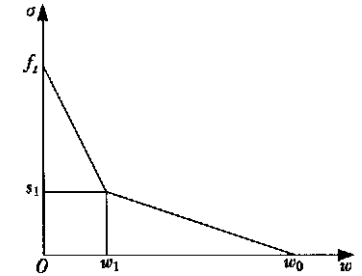


图 3 双线性应变软化曲线

2 哈密顿体系下平面弹性扇形域的基本方程和变分原理^[7~9]

弹性力学哈密顿体系理论自钟万勰^[7]提出以来, 已经得到越来越多的应用。下面我们利用哈密顿理论构造一个分析虚拟裂缝模型问题的超级单元。

如图 4 所示的环形扇形域, 在哈密顿体系下有如下形式的变分原理

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\ln R_1}^{\ln R_2} [p^T \dot{q} - H(q, p)] d\xi d\theta = 0, \tag{5}$$

其中

$$-H(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \mathcal{V}_r \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + S_{r\theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right] + \frac{E}{2} \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]^2 - \frac{1}{2E} [(1-\nu^2)S_r^2 + 2(1+\nu)S_{r\theta}^2], \quad (6)$$

$$\xi = \ln r, \quad S_r = r\sigma_r, \quad S_{r\theta} = r\tau_{r\theta}, \quad (7)$$

u, v 分别为径向与周向位移, $\mathbf{q} = \{u, v\}^T$ 为位移向量, $\mathbf{p} = \{S_r, S_{r\theta}\}^T$ 为相应的对偶向量, 一点(\cdot)代表对于 ξ 的微商.

展开变分方程(5)可得到对偶方程组

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathbf{F}\mathbf{q} - \mathbf{G}\mathbf{p}, \quad \dot{\mathbf{p}} = -\mathbf{Q}\mathbf{q} - \mathbf{F}^T\mathbf{p} \quad (8)$$

$\theta = 0$ 处的对称或反对称条件(本文只考虑对称变形情况)

$$v = 0, \quad S_{r\theta} = 0 \quad (\text{当 } \theta = 0 \text{ 时}), \quad (9)$$

和 $\theta = \ominus$ 处的自由边界条件

$$S_{r\theta} = 0, \quad E \left[u + \frac{dv}{d\theta} \right] + \mathcal{V}_r = 0 \quad (\text{当 } \theta = \ominus \text{ 时}). \quad (10)$$

当 $\ominus = \pi$ 并且 $R_1 \rightarrow 0$ 时, 扇形域问题就变成裂纹问题. 裂缝尖端的扇形域可处理为整体结构中的一个超级单元(以下简称弹性裂纹解析元), 该超级单元的解析式已经在文献[7~9]中给出.

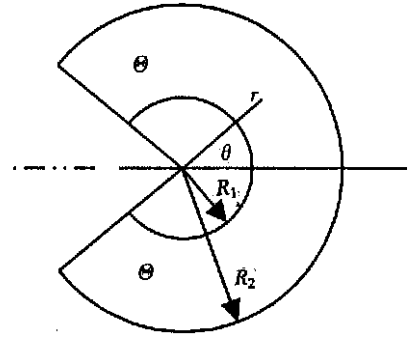


图4 环形扇形域示意图

3 基于虚拟裂缝模型的裂纹解析元列式

不同于弹性裂纹解析元^[7~9], 基于虚拟裂缝模型的裂纹解析元的裂缝表面作用有作用力 $\sigma(r)$, 见公式(3), 此时沿裂纹表面的边界条件变为非齐次边界条件:

$$S_{r\theta} = 0, \quad E \left[u + \frac{dv}{d\theta} \right] + \mathcal{V}_r = k_1 \exp(2\xi) + k_2 \exp(\xi) \quad (\text{当 } \theta = \pi \text{ 时}), \quad (11)$$

变分方程为

$$\left\{ \int_{\ominus}^{\ominus} \int_{-\infty}^{\ln R} \left\{ S_r \frac{\partial u}{\partial \xi} + S_{r\theta} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \mathcal{V}_r \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right] + S_{r\theta} \left[\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \right] + \frac{E}{2} \left[u + \frac{\partial v}{\partial \theta} \right]^2 - \frac{1}{2E} [(1-\nu^2)S_r^2 + 2(1+\nu)S_{r\theta}^2] \right\} d\xi d\theta - \int_{-\infty}^{\ln R} [(k_1 \exp(2\xi) + k_2 \exp(\xi)) \cdot v]_{\theta=\pi} d\xi \right\} = 0 \quad (12)$$

由于对称的原因, 只需考虑一半区域 $0 \leq \theta \leq \ominus = \pi$. 设超级单元有 n_r 个节点, 对于平面问题每个节点有两个未知变量 u, v , 但 $\theta = 0$ 处的节点只有 u , 故该超级单元有 $2n_r - 1$ 个自由度. 用 μ_i 表示本征值, $\Psi_i = \{q_i, p_i\}^T$ 表示本征函数向量, 则全状态函数向量展开式为

$$\mathbf{w}(\xi, \theta) = \{ \mathbf{q}, \mathbf{p} \}^T = \Psi_0 a_1 + \sum_{i=1}^{2n_r-1} a_{i+1} \Psi_i \exp(\mu_i \xi) + \tilde{\mathbf{w}}(\xi, \theta), \quad (13)$$

其中 $a_i (i = 1, 2, \dots, 2n_r - 1)$ 为待定广义常数, $\tilde{\mathbf{w}}(\xi, \theta)$ 为一特解:

$$\tilde{\mathbf{w}}(\xi, \theta) = \{ \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{S}_r, \tilde{S}_{r\theta} \}^T = k_2 \exp(\xi) \left\{ \frac{1-\nu}{E}, 1, 1, 0 \right\}^T -$$

$$k \exp(2\xi) \left\{ \frac{1-3\nu}{6E} \cos \theta, \frac{5+\nu}{6E} \sin \theta, \frac{1}{3} \cos \theta, \frac{1}{3} \sin \theta \right\}^T \quad (14)$$

将节点坐标代入(13)式,可得到广义常数向量 $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_{2n_r-1}\}^T$ 和节点位移向量 $\mathbf{d} = \{u_1, u_2, v_2, \dots, u_{n_r}, v_{n_r}\}^T$ 之间的转换关系:

$$\mathbf{a} = \mathbf{T} \cdot (\mathbf{d} - \tilde{\mathbf{d}}), \quad (15)$$

其中 $\tilde{\mathbf{d}} = \{\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{u}_{n_r}, \tilde{v}_{n_r}\}^T$ 为节点位移特解部分的确定值向量, \mathbf{T} 阵的逆阵 \mathbf{T}^{-1} 中元素的计算公式为

$$\begin{cases} (T^{-1})_{ji} = \exp(\mu_i \xi) \phi_i(1)(\xi, \theta) \Big|_{\theta=\theta_k}^{\xi=\ln R} \\ \quad (j=1, i=1, 2, \dots, 2n_r-1), \\ (T^{-1})_{ji} = \exp(\mu_i \xi) \phi_i(1)(\xi, \theta) \Big|_{\theta=\theta_k}^{\xi=\ln R} \\ \quad (j=2k-2, k=2, 3, \dots, n_r, i=1, 2, \dots, 2n_r-1), \\ (T^{-1})_{ji} = \exp(\mu_i \xi) \phi_i(2)(\xi, \theta) \Big|_{\theta=\theta_k}^{\xi=\ln R} \\ \quad (j=2k-1, k=2, 3, \dots, n_r, i=1, 2, \dots, 2n_r-1), \end{cases} \quad (16)$$

其中 $\theta_k (k=1, 2, \dots, n_r)$ 为各节点 θ 方向的坐标值.

将式(13)代入式(12),分部积分之后就得到超级单元的刚度阵 \mathbf{R}_e 和 \mathbf{F}_e 载荷向量

$$\mathbf{R}_e = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{T}, \quad (17)$$

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{T}^T \cdot (\mathbf{F}_a + \mathbf{R}_a \cdot \mathbf{T} \cdot \tilde{\mathbf{d}}), \quad (18)$$

其中 \mathbf{R}_a 和 \mathbf{F}_a 中元素的计算公式分别为

$$(R_a)_{ji} = \int_0^{\ln R} [S_{ii}(\xi, \theta) u_j(\xi, \theta) + S_{ri}(\xi, \theta) v_j(\xi, \theta)] \xi = \ln R d\theta, \quad (19)$$

$$(F_a)_j = - \int_0^{\ln R} [\tilde{S}_r u_j + \tilde{S}_r v_j] \xi = \ln R d\theta \quad (i=1, 2, \dots, 2n_r-1, j=1, 2, \dots, 2n_r-1). \quad (20)$$

4 数值计算

如图1所示含单边裂纹的混凝土紧凑拉伸试件,图中 $H = 0.5D$, $H_1 = 0.25D$, $D_1 = 1.20D$, 弹性模量 $E = 32.4 \text{ GPa}$, 泊松比 $\nu = 0.197$, 平板厚度 $B = 0.2 \text{ m}$, 材料抗拉强度 $f_t = 2.79 \text{ Mpa}$. 文献[6]和[10]都对这一混凝土试件的断裂问题进行了详细分析.

文献[11]在裂缝尖端附近采用了八节点等参单元 Q8, 在外围采用四节点等参单元及五节点过渡单元, 裂缝尖端附近的单元节点间距在 3.75 cm 到 1.25 cm 之间^[11]. 本文中, 基于虚拟裂缝模型的裂纹解析元的节点数取为 $n_r = 10$, 其外围均取三角形单元 T3, 裂缝尖端附近的单元节点最小间距为 6.67 cm.

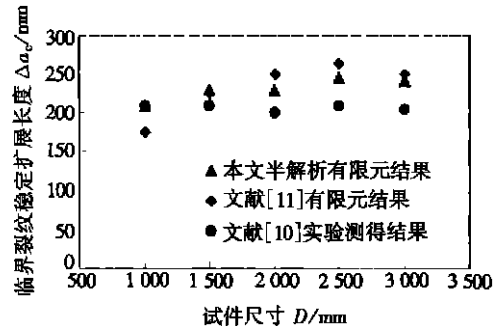


图5 不同尺寸紧凑拉伸试件的临界裂缝稳定扩展长度

对于不同尺寸的试件及其相应的不同 P_{\max} 值, 临界裂缝稳定扩展长度的本文计算结果、文献[11]的有限元计算结果和文献[10]的试验结果, 以及裂缝起裂断裂韧度的本文计算结果和文献[6]的计算结果都列在表1里, 不同试件尺寸的临界裂缝稳定扩展长度如图5所示。

从结果可以看到, 裂缝起裂断裂韧度的本文计算结果与文献[6]的计算结果很接近, 临界裂缝稳定扩展长度的本文计算结果与文献[10]的试验测得结果也基本一致, 并且明显好于文献[11]的计算结果。

表1 含单边裂纹紧凑拉伸试件的临界裂缝稳定扩展长度和起裂断裂韧度

| 试件编号 | 试件尺寸 (D/mm)/($2H/\text{mm}$) | a_0/D | 最大载荷 P_{\max}/kN | 临界裂纹稳定扩展长度 | | | 起裂断裂韧度 | |
|------|--|---------|------------------------------|------------------------|--------|--------|--|-------|
| | | | | $\Delta a_j/\text{mm}$ | | | $K_{Ic}^{ini}/(\text{MPa}\cdot\text{m}^{1/2})$ | |
| (1) | (2) | (3) | (4) | (5) | | | (6) | |
| | | | | 本文 | 文献[11] | 文献[10] | 本文 | 文献[6] |
| CT-6 | 3000×3000 | 0.4 | 88.94 | 240 | 250 | 205 | 1.169 | 1.052 |
| CT-5 | 2500×2500 | 0.4 | 83.43 | 245 | 264 | 210 | 1.315 | 1.380 |
| CT-4 | 2000×2000 | 0.4 | 72.18 | 230 | 250 | 200 | 0.987 | 0.924 |
| CT-3 | 1500×1500 | 0.4 | 54.52 | 230 | 225 | 210 | 1.005 | 1.089 |
| CT-2 | 1000×1000 | 0.4 | 34.99 | 210 | 175 | 210 | | |

5 结 语

本文针对虚拟裂缝模型提出了一种新的半解析有限元法, 根据钟万勰提出的弹性力学哈密顿理论构造了一个新的超级单元, 典型问题的数值结果表明该新方法对于混凝土裂缝稳定扩展问题是准确而有效的。

[参 考 文 献]

- [1] Hillerborg A, Modeer M, Petersson P E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements[J]. Cement and Concrete Research, 1976, 6(6): 773—782.
- [2] Bazant Z P, Oh B H. Crack band theory for fracture of concrete[J]. RILEM, Materials and Structures, 1983, 16(93): 155—177.
- [3] Jenq Y S, Shah S P. Two parameters fracture model for concrete[J]. Journal of Engineering Mechanics, ASCE, 1985, 111(10): 1227—1241.
- [4] Karihaloo B L, Nallathambi P. Effective cracks model for the determination of fracture toughness (K_{Ic}^*) of concrete[J]. Engineering Fracture Mechanics, 1990, 35(4/5): 637—645.
- [5] 徐世 , 赵国藩. 混凝土结构裂缝扩展的与双K断裂准则[J]. 土木工程学报, 1992, 25(2): 32—38.
- [6] XU Shi_lang, Reinhardt H W. Determination of double_K criterion for crack propagation in quasi brittle fracture—Part III: Compact tension specimens and wedge splitting specimens[J]. International Journal of Fracture, 1999, 98(2): 179—193.
- [7] 钟万勰. 弹性力学求解新体系[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1995.
- [8] 钟万勰. 弹性平面扇形问题及哈密顿体系[J]. 应用数学和力学, 1994, 15(12): 1057—1066.
- [9] 钟万勰, 张洪武. 平面断裂解析元的列式[J]. 机械强度, 1995, 17(3): 1—6.
- [10] 徐世 , 赵国藩. 混凝土断裂力学研究[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 1991.

- [11] 袁建伟. 混凝土 I 型裂缝非线性断裂分析 [D]. 硕士学位论文, 大连: 大连理工大学, 1988, 85—164.

Semi_Analytical Finite Element Method for Fictitious Crack Model in Fracture Mechanics of Concrete

WANG Cheng_qiang, ZHENG Chang_liang

(Department of Engineering Mechanics, Dalian University of Technology,
Dalian 116023, P. R. China)

Abstract: Based on the Hamiltonian governing equations of plane elasticity for sectorial domain, the variable separation and eigenfunction expansion techniques were employed to develop a novel analytical finite element for the fictitious crack model in fracture mechanics of concrete. The new analytical element can be implemented into FEM program systems to solve fictitious crack propagation problems for concrete cracked plates with arbitrary shapes and loads. Numerical results indicate that the method is more efficient and accurate than ordinary finite element method.

Key words: Hamiltonian system; fictitious crack model; semi_analytical finite element method