应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

粘性流体力学的变分原理和广义变分原理

钱伟长

（上海工业大学，1983年11月13日收到）

摘　要

本文建立了不可压缩和可压缩粘性流体力学问题的变分原理，即最大功率消耗原理和它们的广义变分原理.

一、引　言

由于有限元法的发展，人们开始研究流体力学问题的有关变分原理．其中著名者有林家翘和 Rubinov (1948)[1]，Skobelkin (1957)[2]，Guderley (1972)[3]，Morice (1977)[4]，Manwall (1980)[5]，Hafez和Lovell (1983)[6]．但大多数都是研究非粘性流动，重点放在物体外场的流动，而且多数是从伯努利方程出发的，有不少是根据流函数的表达式建立泛函.

本文重点是研究粘性流动；不论是可压缩的，或是不可压缩的，其泛函都是直接从 Navier-Stokes 方程出发建立的．最后把物态方程、连续方程和有关边界条件等变分条件用拉氏乘子法解除掉，成为无条件的广义变分原理.

二、可压缩性粘性流体力学方程

如果我们取欧拉坐标x_i，各点的流速为$u_i(x_1,\ x_2,\ x_3,\ t)$，密度为$\rho(x_1,x_2,x_3,t)$，压强为$p(x_1,x_2,x_3,t)$．设流体中各点的应力为σ_{ij}，粘度为μ，则

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}-\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{2.1}$$

其中

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{2.2}$$

$$u_{i,j}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \tag{2.3}$$

流体在各点的运动方程（Navier-Stokes 方程）为

$$\rho\frac{Du_i}{Dt}=\rho F_i+\sigma_{ij,j} \tag{2.4}$$

其中$\bar{F}_i$为每单位重量所受体积力，ρ为密度，$\frac{D(\ )}{Dt}$为

$$\frac{D(\ )}{Dt}=\frac{\partial(\ )}{\partial t}+u_k(\ )_{,k} \tag{2.5}$$

所以，有

$$\frac{Du_i}{Dt}=\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k} \tag{2.6a}$$

$$\frac{D\rho}{Dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_k\rho_{,k} \tag{2.6b}$$

还有连续方程

$$\frac{D\rho}{Dt}=-\rho u_{k,k} \tag{2.7}$$

也可以写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\rho u_{k,k}-u_k\rho_{,k}=-(\rho u_k)_{,k} \tag{2.8}$$

最后，ρ和p之间有物态方程．对气体而言

$$\frac{p}{p_0}=\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\gamma} \tag{2.9}$$

对液体而言，有

$$p=\kappa\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right) \tag{2.10}$$

其中γ为气体的热容比，κ为液体的体积压缩系数．

我们有(2.1)，(2.4)，(2.7)，(2.9)[或(2.8)和(2.10)]诸式求解u_i，σ_{ij}，ρ和p．

边界条件如下：

(1) 在受力边界 Γ_σ 上

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{f}_i \qquad (在\Gamma_\sigma上) \tag{2.11}$$

(2) 在固体边界Γ_s上，有粘性，所以无滑动．

$$u_i=0 \qquad (在\Gamma_s上) \tag{2.12a}$$

对于无粘性的流体而言，应该是

$$u_i n_i=0 \qquad (在\Gamma_s上) \tag{2.12b}$$

(3) 在洪水口的边界(Γ_u)上，流速已知

$$u_i=\bar{u}_i \qquad (在\Gamma_u上) \tag{2.13}$$

设流动域τ的表面为Γ，而（见图1）

$$\Gamma=\Gamma_\sigma+\Gamma_s+\Gamma_u \tag{2.14}$$

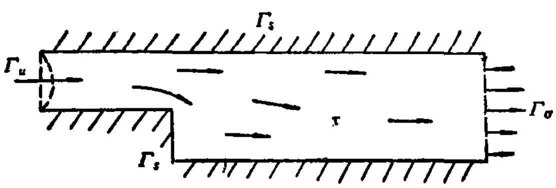

图1 流动域边界示意图

本文不讨论有自由表面的流动问题.

本文的一般问题是：求u_i，σ_{ij}，p，ρ在边界条件(2.11)，(2.12a或b)，(2.13)下的解.

本文的方法，也可以用来处理外场流动问题．当然在这类问题中，我们应该从流速u_i中减去无穷远处的流速$u_{\infty i}$后得的差值作为待定变量，才能得到可用的泛函.

三、不可压缩的粘性流问题的变分原理

在不可压缩的流动中，ρ 保持不变，而且有不可压缩条件

$$u_{k,k}=0 \tag{3.1}$$

于是(2.1)式简化为

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{3.2}$$

而 Navier-Stokes 运动方程可以写成

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\sigma_{ij,j}=0 \tag{3.3}$$

边界条件为

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{f}_i \qquad (\text{在}\Gamma_\sigma\text{上}) \tag{3.4a}$$

$$u_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_s\text{上}) \tag{3.4b}$$

$$u_i=\bar{u}_i \qquad (\text{在}\Gamma_u\text{上}) \tag{3.4c}$$

(3.1)～(3.3)是u_i，σ_{ij}，p三类变量的三种微分方程．这三类变量共有10个，微分方程也有10个．(3.4a,b,c)是求解这些待定变量的边界条件．这里的ρ是一个已给的常数.

现在让我们建立不可压缩粘性流动问题的变分原理.

上述问题可以看作是：在u_i,σ_{ij},p满足(3.1)，(3.2)，(3.4b, c)的条件下，求(3.3)，(3.4a)的解．让我们采用权余法，设G_i，H_i为权函数

$$\delta\Pi_{iv}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\sigma_{ij,j}\right\}G_i d\tau+\iint_{\Gamma_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{f}_i)H_i dS=0 \tag{3.5}$$

其中G_i，H_i是任意选用的．设取

$$G_i=\delta u_i \qquad (\text{在}\tau\text{中}) \tag{3.6}$$

于是(3.5)可以写成

$$\delta\Pi_{iv}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i+\rho u_k u_{i,k}\delta u_i-\rho\bar{F}_i\delta u_i-\sigma_{ij,j}\delta u_i\right\}d\tau+\iint_{\Gamma_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{f}_i)H_i dS=0 \tag{3.7}$$

其中有一个积分可以用格林定理简化，即

$$-\iiint_\tau\sigma_{ij,j}\delta u_i d\tau=\iiint_\tau\sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\tau-\iint_\Gamma\sigma_{ij}n_j\delta u_i dS \tag{3.8}$$

但在Γ_u，Γ_s上，u_i都是已给的，所以$\delta u_i=0$，(3.8)可以化为

$$-\iiint_\tau\sigma_{ij,j}\delta u_i d\tau=\frac{1}{2}\iiint_\tau\sigma_{ij}\delta(u_{i,j}+u_{j,i})d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\sigma_{ij}n_j\delta u_i dS \tag{3.9}$$

其中，我们根据$\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$，所以有$\sigma_{ij}\delta u_{i,j}=\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})$．把(3.9)代入(3.7)式，得

$$\delta\Pi_{iv}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i+\rho u_k u_{i,k}\delta u_i-\rho\bar{F}_i\delta u_i+\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\right\}d\tau$$

$$+\iint_{\Gamma_\sigma} n_j\sigma_{ij}(H_i-\delta u_i)dS-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{F}_i H_i dS \tag{3.10}$$

如果我们识别权函数 H_i，使

$$H_i=\delta u_i \qquad (\text{在}\Gamma_\sigma\text{上}) \tag{3.11}$$

这样做并不损害 H_i 的一般性，于是(3.10) 式可以写成

$$\delta\Pi_{iv}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}\delta u_i+\rho u_k u_{i,k}\delta u_i\right\}d\tau$$

$$-\iiint_\tau\left\{\rho\bar{F}_i\delta u_i-\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\right\}d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{F}_i\delta u_i dS=0 \tag{3.12}$$

从 (3.2) 式，我们有

$$\delta(u_{i,j}+u_{j,i})=\frac{1}{\mu}\delta p\delta_{ij}+\frac{1}{\mu}\delta\sigma_{ij} \tag{3.13}$$

(3.12)中有一个积分可以化简如下：

$$-\iiint_\tau\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})d\tau=-\iiint_\tau\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}d\tau-\iiint_\tau\frac{1}{2\mu}\sigma_{ii}\delta p d\tau \tag{3.14}$$

但是，从(3.2)式，我们取 $i=j$，得

$$\sigma_{ii}=-3p+2\mu u_{i,i}=-3p \tag{3.15}$$

于是

$$-\iiint_\tau\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})d\tau=-\iiint_\tau\frac{1}{4\mu}\delta(\sigma_{kl}\sigma_{kl})\,d\tau+\iiint_\tau\frac{3}{4\mu}\delta p^2 d\tau \tag{3.16}$$

代入(3.12)式，得

$$\delta\Pi_{iv}=\iiint_\tau\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right)\delta u_i d\tau-\iiint_\tau\left\{\rho\bar{F}_i\delta u_i-\frac{1}{4\mu}\delta(\sigma_{kl}\sigma_{kl})+\frac{3}{4\mu}\delta p^2\right\}d\tau$$

$$-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{F}_i\delta u_i dS=0 \tag{3.17}$$

或可写成

$$\delta\Pi_{iv}=\iiint_\tau\rho\left(\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right)\delta u_i d\tau-\delta\iiint_\tau\left\{\rho\bar{F}_i u_i-\frac{1}{4\mu}\sigma_{kl}\sigma_{kl}+\frac{3}{4\mu}p^2\right\}d\tau$$

$$-\delta\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{F}_i u_i dS=0 \tag{3.18}$$

于是，我们最后得

$$\delta\Pi_{iv}=0 \tag{3.19a}$$

$$\Pi_{iv}=\Pi_0-\iiint_\tau\left\{\rho\bar{F}_i u_i-\frac{1}{4\mu}\sigma_{kl}\sigma_{kl}+\frac{3}{4\mu}p^2\right\}d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{F}_i u_i dS \tag{3.19b}$$

其中

$$\delta\Pi_0=\iiint_\tau\rho\left\{\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right\}\delta u_i d\tau \tag{3.20}$$

这些项的物理意义分别为

(1) Π_0=单位时间内，流体积贮的总动能 (3.21a)

(2) $\iiint_\tau \frac{1}{4\mu}(\sigma_{kl}\sigma_{kl}-3p^2)d\tau=$单位时间内，流体消耗于粘性的能量 (3.21b)

(3) $\iiint_\tau \rho \bar{F}_i u_i d\tau=$单位时间内，体积力对流体流动所做的功 (3.21c)

(4) $\iint_{\Gamma_\sigma} \bar{f}_i u_i dS=$单位时间内，外力对流体流动所做的功 (3.21d)

所以，Π_{iv} 是流动流体的功率消耗.

于是，我们有不可压缩粘性流体流动问题的**最大功率消耗原理**(Principle of Maximum Power Losses)

在满足 (1) 不可压缩条件 $u_{i,i}=0$，(2) 在固体表面 (Γ_s) 上，$u_i=0$，(3) 在来流断面 (Γ_u)上，$u_i=\bar{u}_i$，(4) 应力和流速关系 $\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})$的所有 u_i，σ_{ij}，p 中，其使流动功率消耗Π_{iv}最大者，为不可压缩粘性流体流动问题的正确解. Π_{iv} 见 (3.19b).

证明 设 u_i，σ_{ij}，p 为其解，则

$$\Pi_{iv}[u_i+\delta u_i,\ \sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij},\ p+\delta p]=\Pi_{iv}(u_i,\ \sigma_{ij},\ p)+\delta\Pi_{iv}+\delta^2\Pi_{iv}+\delta^3\Pi_{iv} \tag{3.22}$$

其中，当 Π_{iv} 为极值时

$$\delta\Pi_{iv}=\delta\Pi_0-\iiint_\tau\left\{\rho\bar{F}_i\delta u_i-\frac{1}{2\mu}\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl}+\frac{3}{2\mu}p\delta p\right\}d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i dS=0 \tag{3.23}$$

其它各级变分为

$$\delta^2\Pi_{iv}=\iiint_\tau\rho\delta u_i\delta\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right]d\tau+\iiint_\tau\left(\frac{1}{4\mu}\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl}-\frac{3}{4\mu}\delta p\delta p\right)d\tau \tag{3.24a}$$

$$\delta^3\Pi_{iv}=\iiint_\tau\rho\delta u_i\delta u_k\delta u_{i,k}d\tau \tag{3.24b}$$

从 (3.2)，我们有

$$\delta\sigma_{ij}=-\delta p\delta_{ij}+\mu(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}) \tag{3.25}$$

于是

$$\iiint_\tau\left\{\frac{1}{2\mu}\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl}-\frac{3}{2\mu}p\delta p\right\}d\tau=\iiint_\tau\left\{-\frac{1}{2\mu}\sigma_{kl}\delta p\delta_{kl}+\sigma_{ij}\delta u_{i,j}-\frac{3}{2\mu}p\delta p\right\}d\tau \tag{3.26}$$

从 (3.2)，我们还可化得

$$\sigma_{kk}=-3p+2\mu u_{k,k}=-3p \tag{3.27}$$

所以，(3.27)可以简化为

$$\iiint_\tau\left\{\frac{1}{2\mu}\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl}-\frac{3}{2\mu}p\delta p\right\}d\tau=\iiint_\tau\sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\tau=\iint_{\Gamma_\sigma+\Gamma_u+\Gamma_s}\sigma_{ij}\delta u_i n_j dS$$
$$-\iiint_\tau\sigma_{ij,j}\delta u_i d\tau \tag{3.28}$$

于是，(3.23)可以写成（利用了 Γ_u，Γ_s 上 u_i 已给的条件）

$$\delta\Pi_{iv}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\sigma_{ij,j}\right\}\delta u_i d\tau+\iint_{\Gamma_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{f}_i)\delta u_i dS=0 \tag{3.29}$$

其变分的自然条件为

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho \bar{F}_i-\sigma_{ij,j}=0 \qquad (\text{在}\tau\text{内}) \tag{3.30a}$$

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{f}_i=0 \qquad (\text{在}\Gamma_\sigma\text{上}) \tag{3.30b}$$

它们就是 (3.3)，(3.4a)．这就证明了 Π_{iv} 的极值条件的确给出问题的解．这个极值究竟是极大还是极小，决定于 $\delta^2\Pi_{iv}$ 的正负．

现在研究(3.24a)．把 (3.25) 平方，得

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}&=\{\delta p\delta_{ij}-\mu(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\}\{\delta p\delta_{ij}-\mu(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\}\\&=3\delta p\delta p-2\mu\delta p\delta_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})+\mu^2(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\end{aligned} \tag{3.31}$$

但是

$$\delta_{ij}(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})=2\delta u_{k,k}=0 \tag{3.32}$$

所以

$$\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3\delta p\delta p=\mu^2(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i}) \tag{3.33}$$

再利用(3.25)式，上式可以进一步化为

$$\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3\delta p\delta p=\mu(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})(\delta\sigma_{ij}+\delta p\delta_{ij})=2\mu\delta\sigma_{ij}\delta u_{i,j} \tag{3.34}$$

同时，(3.30a) 的变分为

$$\rho\delta\left[\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right]-\delta\sigma_{ij,j}=0 \tag{3.35}$$

所以，(3.24a) 的 $\delta^2\Pi_{iv}$ 可以写成

$$\delta^2\Pi_{iv}=\iiint_\tau\left\{\delta u_i\delta\sigma_{ij,j}+\frac{1}{4\mu}(\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl}-3\delta p\delta p)\right\}d\tau \tag{3.36a}$$

也可以改写为

$$\delta^2\Pi_{iv}=\iiint_\tau\left\{\delta u_i\delta\sigma_{ij,j}+\frac{1}{2\mu}(\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl}-3\delta p\delta p)-\frac{1}{4\mu}(\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl}-3\delta p\delta p)\right\}d\tau \tag{3.36b}$$

这里有两项都有因子$(\delta\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl}-3\delta p\delta p)$，让我们用(3.34) 式代表其第一项，用 (3.33) 式代表其第二项，于是 (3.36b) 可以写为

$$\delta^2\Pi_{iv}=\iiint_\tau\left\{\delta u_i\delta\sigma_{ij,j}+\delta\sigma_{ij}\delta u_{i,j}\right\}d\tau-\iiint_\tau\frac{1}{4}\mu(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})d\tau \tag{3.37}$$

但是，利用格林定理，我们有

$$\iiint_\tau\left\{\delta u_i\delta\sigma_{ij,j}+\delta\sigma_{ij}\delta u_{i,j}\right\}d\tau=\iiint_\tau(\delta u_i\delta\sigma_{ij})_{,j}d\tau=\iint_{\Gamma_\sigma+\Gamma_s+\Gamma_u}\delta u_i\delta\sigma_{ij}n_j dS=0 \tag{3.38}$$

这是因为我们从边界条件 (3.4a,b,c)，有

$$\delta\sigma_{ij}n_j=0 \qquad (\text{在 }\Gamma_\sigma\text{ 上}) \tag{3.39a}$$

$$\delta u_i=0 \qquad (\text{在 }\Gamma_s,\ \Gamma_u\text{ 上}) \tag{3.39b}$$

所以，我们最后从(3.37)式证明

$$\delta^2\Pi_{iv}=-\frac{1}{4}\mu\iiint_\tau(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})d\tau<0 \tag{3.40}$$

这就证明了，对于不等零的 δu_i，$\delta\sigma_{ij}$，δp 而言，

$$\Pi_{iv}(u_i+\delta u_i,\ \sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij},\ p+\delta p)-\Pi_{iv}(u_i,\ \sigma_{ij},\ p)<0 \tag{3.41}$$

或即是说：正确解是 Π_{iv} 的极大，这就全部证明了不可压缩粘性流体流动问题的最大功率消耗原理．

四、不可压缩粘性流问题的单变量的最大功率消耗原理

(3.19a，b) 是一个三类变量的泛函的变分原理，变分中必须事前满足下列四个变分条件

(1) $u_{i,i}=0$ （在 τ 内） (4.1a)

(2) $u_i=0$ （在 Γ_s 内） (4.1b)

(3) $u_i=\bar{u}_i$ （在 Γ_u 内） (4.1c)

(4) $\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})$ （在 τ 内） (4.1d)

如果我们利用应力流速关系，消去 σ_{ij}，而且在 $u_{k,k}=0$ 的不可压缩条件下，把 (3.19b) 式化为只有 u_i 一类变量的泛函．用 (3.33) 式的证明相同的步骤，我们很易证明

$$\sigma_{ij}\sigma_{ij}-3p^2=\mu^2(u_{i,j}+u_{j,i})(u_{i,j}+u_{j,i})=2\mu^2(u_{i,j}+u_{j,i})u_{i,j} \tag{4.2}$$

于是，我们从 (3.19a,b) 中，得

$$\Pi_{iv(1)}=\Pi_0-\iiint_\tau\left\{\rho\bar{F}_iu_i-\frac{1}{2}\mu(u_{i,j}+u_{j,i})u_{i,j}\right\}d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_iu_idS \tag{4.3}$$

其中

$$\delta\Pi_0=\iiint_\tau\rho\left\{\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_ku_{i,k}\right\}\delta u_id\tau \tag{4.4}$$

单变量的不可压缩粘性流问题的最大功率消耗原理为：

在满足 (1) $u_{i,i}=0$ (τ)，(2) $u_i=0$ (Γ_s)，(3) $u_i=\bar{u}_i(\Gamma_u)$ 的所有 u_i 中，其使流动功率消耗 $\Pi_{iv(1)}$ 最大者，为不可压缩粘性流动问题的正确解．$\Pi_{iv(1)}$ 见 (4.3) 式，σ_{ij} 可按 (4.1d) 计算．

证明 将 (4.3) 式变分，得

$$\delta\Pi_{iv(1)}=\delta\Pi_0-\iiint_\tau\{\rho\bar{F}_i\delta u_i-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\delta u_{i,j}\}d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_idS \tag{4.5}$$

由于 $u_{i,i}=0$，有

$$\iiint_\tau p\delta u_{i,i}d\tau=\iiint_\tau p\delta_{ij}\delta u_{i,j}d\tau=0 \tag{4.6}$$

所以，(4.5) 式也可以写成

$$\delta\Pi_{iv(1)}=\delta\Pi_0-\iiint_\tau\rho\bar{F}_i\delta u_id\tau+\iiint_\tau\{-p\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\}\delta u_{i,j}d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_idS \tag{4.7}$$

用格林定理，我们有

$$\iiint_\tau\{-p\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\}\delta u_{i,j}d\tau=\iiint_\tau\{p_{,i}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}\}\delta u_id\tau$$
$$+\iint_{\Gamma_\sigma}\{-pn_i+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})n_j\}\delta u_idS \tag{4.8}$$

其中有关 $\Gamma_u+\Gamma_s$ 的部份，根据 (4.1b,c) 恒等于零．最后，从 (4.7) 得

$$\delta\Pi_{iv(1)}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_ku_{i,k}-\rho\bar{F}_i+p_{,i}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}\right\}\delta u_id\tau$$

$$+\iint_{\Gamma_\sigma}[-pn_i+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})n_j-\bar{f}_i]\delta u_i dS=0 \tag{4.9}$$

其变分的自然条件为

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i+p_{,i}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}=0 \qquad (\text{在 } \tau \text{ 内}) \tag{4.10a}$$

$$-pn_i+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})n_j-\bar{f}_i=0 \qquad (\text{在 } \Gamma_\sigma \text{ 内}) \tag{4.10b}$$

这就证明了最大功率消耗原理的必要条件，用和上节相同的方法，可以证明充分条件$\delta^2\Pi_{iv(1)}<0$. (4.10a), (4.10b) 可以从 (3.30a,b)和(4.1d)中消去 σ_{ij} 而求得.

五、不可压缩粘性流问题的广义变分原理（双变量p,u_i）

现在让我们研究单变量的最大功率消耗原理的广义变分原理．在最大功率消耗原理中原来有三个变分约束条件．让我们引进三种待定的拉氏乘子，λ，λ_i，π_i．新的泛函可以写成

$$\Pi^*_{iv(1)}=\Pi_{iv(1)}+\iiint_\tau \lambda u_{k,k}d\tau+\iint_{\Gamma_s}\lambda_i u_i dS+\iint_{\Gamma_u}\pi_i(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{5.1}$$

变分后得

$$\begin{aligned}\delta\Pi^*_{iv(1)}=&\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}-\lambda_{,i}\right\}\delta u_i d\tau\\&+\iint_{\Gamma_\sigma+\Gamma_s+\Gamma_u}\{\mu(u_{i,j}+u_{j,i})n_j+\lambda n_i\}\delta u_i dS+\iiint_\tau\delta\lambda u_{k,k}d\tau\\&+\iint_{\Gamma_s}(u_i\delta\lambda_i+\lambda_i\delta u_i)dS+\iint_{\Gamma_u}\{(u_i-\bar{u}_i)\delta\pi_i+\pi_i\delta u_i\}dS\\&-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i dS=0\end{aligned} \tag{5.2}$$

于是，得下列各自然条件，即

（1）欧拉方程

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}+p_{,i}-(p+\lambda)_{,i}=0 \tag{5.3a}$$

$$u_{k,k}=0 \tag{5.3b}$$

（2）自然边界条件

$$[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-\delta_{ij}p]n_j+(\lambda+p)n_i-\bar{f}_i=0 \qquad (\Gamma_\sigma) \tag{5.4a}$$

$$[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-\delta_{ij}p]n_j+(\lambda+p)n_i+\pi_i=0 \qquad (\Gamma_u) \tag{5.4b}$$

$$[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-\delta_{ij}p]n_j+(\lambda+p)n_i+\lambda_i=0 \qquad (\Gamma_s) \tag{5.4c}$$

$$u_i=0 \qquad (\Gamma_s) \tag{5.4d}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (\Gamma_u) \tag{5.4e}$$

如果我们取

$$(p+\lambda)_{,i}=0 \qquad (\text{在 } \tau \text{ 内}) \tag{5.5}$$

$$p+\lambda=0 \qquad (\text{在 } \Gamma_\sigma+\Gamma_u+\Gamma_s \text{ 上}) \tag{5.6}$$

其唯一解为

$$\lambda=-p \qquad (\text{在 } \tau+\Gamma \text{ 中}) \tag{5.7}$$

这就求得了 λ 值．于是 (5.3a,b) 化为

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}+p_{,i}=0 \qquad (\text{在}\ \tau\ \text{内}) \tag{5.8a}$$

$$u_{k,k}=0 \qquad (\text{在}\ \tau\ \text{内}) \tag{5.8b}$$

它们是用 u_i,p 表示的 Navier-Stokes 运动方程 (4.10a) 和不可压缩条件 (4.1a)．把(5.7)代入(5.4a)，(5.4b)，(5.4c)，得

$$[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-\delta_{ij}p]n_j=\bar{f}_i \qquad (\Gamma_\sigma) \tag{5.9a}$$

$$-[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-\delta_{ij}p]n_j=\pi_i \qquad (\Gamma_u) \tag{5.9b}$$

$$-[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-\delta_{ij}p]n_j=\lambda_i \qquad (\Gamma_s) \tag{5.9c}$$

其中(5.9a)就是 Γ_σ 上的边界条件(4.10b)，而(5.9b,c)给出待定的拉氏乘子 π_i,λ_i.(5.4d,e)分别为 Γ_s,Γ_u 上的流速已知的边界条件．这是不可压缩粘性流体流动问题的全部方程和边界条件．

把 λ,π_i,λ_i 的结果(5.7)，(5.9b)，(5.9c)代入(5.1)式，得不可压缩粘性流体的广义变分原理（双变量的泛函）．

$$\Pi^*_{iv(1)}=\Pi_{iv(1)}-\iiint_\tau pu_{k,k}d\tau-\iint_{\Gamma_s}[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_ju_idS$$
$$-\iint_{\Gamma_u}[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_j(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{5.10}$$

或可写成

$$\Pi^*_{iv(1)}=\Pi_0-\iiint_\tau\left\{\rho\bar{F}_iu_i+pu_{i,i}-\frac{1}{2}\mu u_{i,j}(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_iu_idS$$
$$-\iint_{\Gamma_s}[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_ju_idS-\iint_{\Gamma_u}[\mu(u_{i,j}+u_{j,i})-p\delta_{ij}]n_j(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{5.11}$$

其中

$$\delta\Pi_0=\iiint_\tau\rho\left\{\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_ku_{i,k}\right\}\delta u_id\tau \tag{5.12}$$

所以，**不可压缩粘性流体的广义变分原理（双变量 u_i,p 的）为：**

在一切 u_i,p 中，其使(5.11)的 $\Pi^*_{iv(1)}$ 的泛函为驻值的 u_i，p，必为不可压缩粘性流体流动问题的正确解，即变分驻值条件能导出一切方程和条件．

六、不可压缩的粘性流体流动问题的广义变分原理（三类变量 u_i,σ_{ij},p）

三类变量的变分原理 $\delta\Pi_{iv}=0$ 有四个变分约束条件，即

(1) 应力流速关系(3.2)式，在这里我们将取更一般的形式(2.1)式．在不可压缩条件下，它们是相同的，即

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}-\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (\text{在}\ \tau\ \text{内}) \tag{6.1}$$

(2) 不可压缩条件(3.1)式，即

$$u_{k,k}=0 \qquad (\text{在}\ \tau\ \text{内}) \tag{6.2}$$

(3) 在固体边界上的条件(3.4b)

$$u_i=0 \qquad (\text{在 } \Gamma_s \text{ 上}) \tag{6.3}$$

(4) 在进水口处（即来流截面上）的条件

$$u_i=\bar{u}_i \qquad (\text{在 } \Gamma_u \text{ 上}) \tag{6.4}$$

为了从不可压缩粘性流体流动问题的最大功率消耗原理中解除这些约束条件，让我们引进四种拉氏乘子 $\lambda_{ij},\lambda_i,\lambda,\pi_i$，泛函 Π_{iv} (3.19b) 可以改写为新的泛函：

$$\Pi_{iv}^{*}=\Pi_{iv}+\iiint_\tau \lambda_{ij}\left\{\sigma_{ij}+p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}d\tau$$

$$+\iiint_\tau \lambda u_{k,k}d\tau+\iint_{\Gamma_s}\lambda_i u_i dS+\iint_{\Gamma_u}\pi_i(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{6.5}$$

其中 Π_{iv} 见(3.19b)，$\lambda_{ij},\lambda_i,\lambda,\pi_i$ 为尚待识别的拉氏乘子．让我们把 $\lambda_{ij},\lambda_i,\lambda,\pi_i,u_i,\sigma_{ij},p$ 看作为独立变量，进行变分，得

$$\delta\Pi_{iv}^{*}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right)\delta u_i+\frac{1}{2\mu}\sigma_{kl}\delta\sigma_{kl}-\frac{3}{2\mu}p\delta p\right\}d\tau$$

$$+\iiint_\tau\left\{\sigma_{ij}+p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}\delta\lambda_{ij}d\tau$$

$$+\iiint_\tau\lambda_{ij}\left\{\delta\sigma_{ij}+\delta p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu\delta u_{k,k}\delta_{ij}-2\mu\delta u_{i,j}\right\}d\tau$$

$$+\iiint_\tau(\lambda\delta u_{k,k}+u_{k,k}\delta\lambda)d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i dS$$

$$+\iint_{\Gamma_s}(u_i\delta\lambda_i+\lambda_i\delta u_i)dS+\iint_{\Gamma_u}[(u_i-\bar{u}_i)\delta\pi_i+\pi_i\delta u_i]dS \tag{6.6}$$

先让我们利用格林定理，简化下列积分．

$$\iiint_\tau\left\{\lambda\delta u_{k,k}+\frac{2}{3}\mu\lambda_{ii}\delta u_{k,k}-2\mu\lambda_{ij}\delta u_{i,j}\right\}d\tau=\iint\limits_{\Gamma_\sigma+\Gamma_s+\Gamma_u}\left(\lambda n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j\right)\delta u_i dS$$

$$-\iiint_\tau\left\{\lambda_{,i}+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk,i}-2\mu\lambda_{ij,j}\right\}\delta u_i d\tau \tag{6.7}$$

于是 (6.6) 可以整理成

$$\delta\Pi_{iv}^{*}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\lambda_{,i}-\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk,i}+2\mu\lambda_{ij,j}\right\}\delta u_i d\tau$$

$$+\iiint_\tau\left\{\left(\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}+\lambda_{ij}\right)\delta\sigma_{ij}+\left(\lambda_{ii}-\frac{3}{2\mu}p\right)\delta p+u_{i,i}\delta\lambda\right\}d\tau$$

$$+\iiint_\tau\left\{\sigma_{ij}+\delta_{ij}p+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}\delta\lambda_{ij}d\tau$$

$$+\iint_{\Gamma_\sigma}\left\{\lambda n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j-\bar{f}_i\right\}\delta u_i dS$$

$$+\iint_{\Gamma_s}\left\{\lambda n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j+\lambda_i\right\}\delta u_i dS$$

$$+\iint_{\Gamma_u}\left\{\lambda n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j+\pi_i\right\}\delta u_i dS$$

$$+\iint_{\Gamma_s}u_i\delta\lambda_i dS+\iint_{\Gamma_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\pi_i dS \tag{6.8}$$

驻值条件

$$\delta \Pi^{*}_{\mathrm{I}v}=0 \tag{6.9}$$

给出下列各自然条件

欧拉方程：(在 τ 内)

(a) $$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\lambda_{,i}-\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk,i}+2\mu\lambda_{ij,j}=0 \tag{6.10a}$$

(b) $$\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}+\lambda_{ij}=0 \tag{6.10b}$$

(c) $$\lambda_{ii}-\frac{3}{2\mu}p=0 \tag{6.10c}$$

(d) $$u_{i,i}=0 \tag{6.10d}$$

(e) $$\sigma_{ij}+\delta_{ij}p+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})=0 \tag{6.10e}$$

自然边界条件

(f) $$\lambda n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j-\bar{f}_i=0 \qquad (\Gamma_\sigma) \tag{6.10f}$$

(g) $$\lambda n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j+\lambda_i=0 \qquad (\Gamma_s) \tag{6.10g}$$

(h) $$\lambda n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j+\pi_i=0 \qquad (\Gamma_u) \tag{6.10h}$$

(i) $$u_i=0 \qquad (\Gamma_s) \tag{6.10i}$$

(j) $$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (\Gamma_u) \tag{6.10j}$$

应该注意到(6.10d,e,i,j)分别为原来的约束条件 (6.1)，(6.2)，(6.3)，(6.4)．

从(6.10b)，我们求得

$$\lambda_{ij}=-\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij} \tag{6.11}$$

很易从 (6.10d，e) 和 (6.11)证明 (6.10c) 也是满足的。

把(6.10c)，(6.11) 代入 (6.10a)，得

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\lambda_{,i}-p_{,i}-\sigma_{ij,j}=0 \tag{6.12}$$

和 (2.4) 相比，即可求得

$$\lambda=-p \tag{6.13}$$

把(6.11)，(6.14) 代入 (6.10f,g,h)，得

$$\sigma_{ij}n_j-\bar{f}_i=0 \qquad (\Gamma_\sigma) \tag{6.14a}$$

$$\sigma_{ij}n_j+\lambda_i=0 \qquad (\Gamma_s) \tag{6.14b}$$

$$\sigma_{ij}n_j+\pi_i=0 \qquad (\Gamma_u) \tag{6.14c}$$

(6.14a)给出了受力边界的条件(2.11)，而(6.14b,c) 给出 λ_i,π_i 两种待定的拉氏乘子

$$\lambda_i=-\sigma_{ij}n_j \quad (\Gamma_s); \qquad \pi_i=-\sigma_{ij}n_j \quad (\Gamma_u) \tag{6.15}$$

这样就求得了全部方程和边界条件，以及全部待定的拉氏乘子，把它们代入 (6.5) 式，即得不可压缩的粘性流体流动问题的三变量的广义变分原理，其泛函为

$$\Pi_{iv}^{*}=\Pi_0-\iiint_\tau \frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}\left\{\sigma_{ij}+p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}d\tau$$

$$-\iiint_\tau\left\{\rho\bar{F}_i u_i-\frac{1}{4\mu}\sigma_{kl}\sigma_{kl}+\frac{3}{4\mu}p^2\right\}d\tau-\iiint_\tau p u_{i,i}d\tau$$

$$-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i u_i dS-\iint_{\Gamma_s}\sigma_{ij}n_j u_i dS-\iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{6.16}$$

其中

$$\delta\Pi_0=\iiint_\tau\rho\left\{\frac{\partial u_i}{\partial t}+u_k u_{i,k}\right\}\delta u_i d\tau \tag{6.17}$$

凡 u_i，σ_{ij}，p 使

$$\delta\Pi_{iv}^{*}=0 \tag{6.18}$$

即使 Π_{iv}^{*} 为驻值者，即为不可压缩粘性流体流动问题的正确解.

这个广义变分原理业已消除了一切约束条件，是一个完全的广义变分原理.

七、可压缩的粘性流体流动问题的变分原理

前面讨论的都是不可压缩的粘性流体的流动问题．现在让我们考虑液体按压缩系数线性变形的物态方程(2.10)而变化的流动问题.

我们的问题是，在体积 τ 内，p,ρ,σ_{ij},u_i 满足 (1)运动方程(2.4)，(2)连续方程(2.7)，(3) 应力流速关系(2.1)，(4) 液体的物态方程 (2.10)，在边界面 $\Gamma=\Gamma_\sigma+\Gamma_s+\Gamma_u$ 上，分别满足(2.11)，(2.12a)，(2.13)．求 p,ρ,σ_{ij},u_i 的解.

让我们把本题化为在约束条件(2.7)，(2.1)，(2.12a)，(2.13)诸条件下，求 p,ρ,σ_{ij}，u_i 满足运动方程(2.4)和受力边界条件(2.11)的解.

让我们用权余法．称

$$\delta\Pi_{PG}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\sigma_{ij,j}\right\}\delta u_i d\tau+\iint_{\Gamma_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{f}_i)H_i dS \tag{7.1}$$

δu_i 是任选的，H_i 待定．因为

$$\iiint_\tau\sigma_{ij,j}\delta u_i d\tau=\iint_\Gamma\sigma_{ij}n_j\delta u_i dS-\iiint_\tau\sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\tau \tag{7.2}$$

在 Γ_s，Γ_u 上，u_i 已知，$\delta u_i=0$．所以，上式写为

$$\iiint_\tau\sigma_{ij,j}\delta u_i d\tau=\iint_{\Gamma_\sigma}\sigma_{ij}n_j\delta u_i dS-\iiint_\tau\sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\tau \tag{7.3}$$

把它代入 (7.1)，得

$$\delta\Pi_{PG}=\iiint_\tau\left\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right\}\delta u_i d\tau+\iiint_\tau\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta(u_{i,j}+u_{j,i})d\tau$$

$$-\iint_{\Gamma_\sigma}\sigma_{ij}n_j(\delta u_i-H_i)dS-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i H_i dS \tag{7.4}$$

让我们选用

$$H_i=\delta u_i \qquad (\Gamma_\sigma) \tag{7.5}$$

于是 (7.4) 化为

$$\delta\Pi_{PC}=\iiint_\tau\left\{\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right]\delta u_i+\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i dS \tag{7.6}$$

让我们进一步简化(7.6)式　从(2.1)中解出$(u_{i,j}+u_{j,i})$

$$(u_{i,j}+u_{j,i})=\frac{1}{\mu}\sigma_{ij}+\frac{p}{\mu}\delta_{ij}+\frac{2}{3}u_{k,k}\delta_{ij} \tag{7.7}$$

于是，我们有

$$\iiint_\tau\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta(u_{i,j}+u_{j,i})d\tau=\iiint_\tau\frac{1}{2}\sigma_{ij}\left\{\frac{1}{\mu}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{\mu}\delta_{ij}\delta p+\frac{2}{3}\delta_{ij}\delta u_{k,k}\right\}d\tau$$

$$=\iiint_\tau\left\{\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}+\frac{1}{2\mu}\sigma_{ii}\delta p+\frac{1}{3}\delta u_{k,k}\sigma_{ii}\right\}d\tau \tag{7.8}$$

但是，从(2.1)，我们有 $\sigma_{ii}=-3p$. 所以，(7.8) 式化为

$$\iiint_\tau\frac{1}{2}\sigma_{ij}\delta(u_{i,j}+u_{j,i})d\tau=\iiint_\tau\left\{\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-\frac{3}{2\mu}p\delta p-p\delta u_{k,k}\right\}d\tau \tag{7.9}$$

把(7.9)代入(7.6)，得

$$\delta\Pi_{PC}=\iiint_\tau\left\{\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right]\delta u_i-p\delta u_{k,k}\right\}d\tau$$

$$+\iiint_\tau\frac{1}{4\mu}[\delta(\sigma_{ij}\sigma_{ij})-3\delta p^2]d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i dS \tag{7.10}$$

或可写成

$$\Pi_{PC}=\Pi_{OC}+\iiint_\tau\frac{1}{4\mu}[\sigma_{ij}\sigma_{ij}-3p^2]d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i u_i dS \tag{7.11}$$

其中

$$\delta\Pi_{OC}=\iiint_\tau\left\{\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right]\delta u_i-p\delta u_{k,k}\right\}d\tau \tag{7.12}$$

上式可以分为三部份

$$\delta\Pi_{OC}=\delta\Pi_0+\delta\Pi_1+\delta\Pi_2 \tag{7.13}$$

其中

$$\delta\Pi_0=\iiint_\tau\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}\right]\delta u_i d\tau \tag{7.14}$$

Π_0=单位时间内，流体积贮的总动能　(7.14a)

$$\delta\Pi_1=-\iiint_\tau\rho\bar{F}_i\delta u_i d\tau \tag{7.15}$$

Π_1=单位时间内，体积力 $\bar{F}_i$ 做的功　(7.15a)

$$\delta\Pi_2=-\iiint_\tau p\delta u_{k,k}d\tau \tag{7.16}$$

Π_2=单位时间内，内压 p 做的功　(7.16a)

还有

$$\Pi_{粘}=\iiint_\tau\frac{1}{4\mu}(\sigma_{ij}\sigma_{ij}-3p^2)d\tau=\text{单位时间内，流体消耗于粘性的能量} \tag{7.17}$$

$$\Pi_f=-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i u_i dS=\text{单位时间内，外力对流体的流动做的功} \tag{7.18}$$

所以

$$\Pi_{PC}=\text{流动的功率消耗} \tag{7.19}$$

因此，我们有**可压缩粘性流动问题的最大功率消耗原理：**

在满足条件（1）连续方程（2.7）式，（2）应力流速关系（2.1）式.（3）液体物态方程（2.10）式，以及（4）固体边界（Γ_s）和供水口边界（Γ_u）上的已知流速条件（2.12a），（2.13）式的一切 p,ρ,σ_{ij},u_i 中，其使流动的总功率消耗 Π_{PC}[（7.11）式]为最大的 p,ρ,σ_{ij},u_i，即为可压缩粘性流动问题的正确解.

证明：设 p,ρ,σ_{ij},u_i 为正确解．设在其附近有一组 $p+\delta p$，$\rho+\delta\rho$，$\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij}$，$u_i+\delta u_i$ 值，其总功率消耗为

$$\Pi_{PC}(p+\delta p,\rho+\delta\rho,\sigma_{ij}+\delta\sigma_{ij},u_i+\delta u_i)=\Pi_{PC}(p,\rho,\sigma_{ij},u_i)+\delta\Pi_{PC}+\delta^2\Pi_{PC} \tag{7.20}$$

从(7.11)式，有

$$\delta\Pi_{PC}=\delta\Pi_{OC}+\iiint_\tau \frac{1}{2\mu}[\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3p\delta p]\,d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i dS \tag{7.21}$$

$$\delta^2\Pi_{PC}=\iiint_\tau\left\{\delta\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right]\delta u_i-\delta p\delta u_{k,k}\right\}d\tau$$
$$+\iiint_\tau\frac{1}{4\mu}[\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3\delta p\delta p]d\tau \tag{7.22}$$

Π_{PC} 的极值条件（$\delta\Pi_{PC}=0$，必要条件）给出

$$\delta\Pi_{PC}=\iiint_\tau\left\{\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right]\delta u_i-p\delta u_{k,k}\right\}d\tau$$
$$+\iiint_\tau\frac{1}{2\mu}[\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3p\delta p]d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i dS=0 \tag{7.23}$$

由（2.1）式，我们有

$$\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}=\sigma_{ij}\left\{-\delta p\delta_{ij}-\frac{2}{3}\mu\delta u_{k,k}\delta_{ij}+\mu\delta(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}$$
$$=-\sigma_{ii}\delta p-\frac{2}{3}\mu\sigma_{ii}\delta u_{k,k}+2\mu\sigma_{ij}\delta u_{i,j}$$
$$=3p\delta p+2\mu p\delta u_{k,k}+2\mu\sigma_{ij}\delta u_{i,j} \tag{7.24}$$

代入(7.23)式，我们有

$$\delta\Pi_{PC}=\iiint_\tau\left\{\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right]\delta u_i+\sigma_{ij}\delta u_{ij}\right\}d\tau-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i dS=0 \tag{7.25}$$

由于 δu_i 在 τ 中和在 Γ_σ 上都是独立的，（7.25）中即导出运动方程（2.4）和边界条件（2.11）式．这就证明了 Π_{PC} 为最大的必要条件.

现在从(7.22)式证明 Π_{PC} 为极大的充分条件：

从运动方程（2.4）式，我们有

$$\delta\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right]=\delta\sigma_{ij,j} \tag{7.26}$$

把它代入(7.22)，得

$$\delta^2\Pi_{PG}=\iiint_\tau\left\{\delta\sigma_{ij,j}\delta u_i-\delta p\delta u_{k,k}+\frac{1}{4\mu}(\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3\delta p\delta p)\right\}d\tau \tag{7.27}$$

但是：

$$\iiint_\tau\delta\sigma_{ij,j}\delta u_i d\tau=\iint_\Gamma\delta\sigma_{ij}\delta u_i n_j dS-\iiint_\tau\delta\sigma_{ij}\delta u_{i,j}d\tau \tag{7.28}$$

在 Γ_σ 上，$\delta\sigma_{ij}=0$；在 Γ_s，Γ_u 上，$\delta u_i=0$，所以

$$\delta^2\Pi_{PG}=\iiint_\tau\left\{-\delta\sigma_{ij}\delta u_{i,j}-\delta p\delta u_{k,k}+\frac{1}{4\mu}(\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3\delta p\delta p)\right\}d\tau \tag{7.29}$$

用 (7.7) 式，上式可以化为

$$\delta^2\Pi_{PG}=-\frac{1}{4\mu}\iiint_\tau\{\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3\delta p\delta p\}d\tau<0 \tag{7.30}$$

这一点很易证明，从 (2.1) 式有

$$\begin{aligned}\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}=&\left\{-\delta_{ij}\delta p-\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\delta u_{k,k}+\mu(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\right\}\\&\cdot\left\{-\delta_{ij}\delta p-\frac{2}{3}\mu\delta_{ij}\delta u_{k,k}+\mu(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\right\}\\=&3(\delta p)^2+\mu^2(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\end{aligned} \tag{7.31}$$

或

$$\delta\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3\delta p\delta p=\mu^2(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})>0 \tag{7.32}$$

这就证明了

$$\delta^2\Pi_{PG}<0 \tag{7.33}$$

是 Π_{PG} 为极大的充分条件，亦即证明了**可压缩粘性流动问题的最大功率消耗原理**.

八、可压缩性粘性流体的流动问题的广义变分原理

让我们引进 λ, λ_{ij}, π, μ_i, η_i 诸拉氏乘子来解消最大功率消耗定理的全部约束条件［即 (2.7)，(2.11)，(2.10)，(2,12a)，(2.13) 诸式］. 设新的泛函为

$$\begin{aligned}\Pi^*_{PG}=&\Pi_{PG}+\iiint_\tau\lambda\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}+u_k\rho_{,k}+\rho u_{k,k}\right)d\tau\\&+\iiint_\tau\lambda_{ij}\left\{\sigma_{ij}+p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\right\}d\tau\\&+\iiint_\tau\pi\left\{p-\kappa\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)\right\}d\tau+\iint_{\Gamma_s}\mu_i u_i dS+\iint_{\Gamma_u}(u_i-\bar{u}_i)\eta_i dS\end{aligned} \tag{8.1}$$

把 λ, λ_{ij}, π, μ_i, η_i, ρ, p, σ_{ij}, u_i 都看作是独立变量，并进行变分，得

$$\begin{aligned}\delta\Pi^*_{PG}=&\iiint_\tau\left\{\left[\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i\right]\delta u_i-p\delta u_{k,k}+\frac{1}{2\mu}[\sigma_{ij}\delta\sigma_{ij}-3p\delta p]\right.\\&+\delta\lambda\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+(u_k\rho)_{,k}\right]+\delta\lambda_{ij}\left[\sigma_{ij}+p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\\&+\delta\pi\left[p-\kappa\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)\right]+\pi\left[\delta p-\frac{\kappa}{\rho_0}\delta\rho\right]+\lambda\left[\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}+\delta u_k\rho_{,k}+u_k\delta\rho_{,k}\right.\end{aligned}$$

$$+\delta\rho u_{k,k}+\rho\delta u_{k,k}\Big]+\lambda_{ij}\Big[\delta\sigma_{ij}+\delta p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu\delta u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(\delta u_{i,j}+\delta u_{j,i})\Big]\Big\}d\tau$$

$$-\iint_{\Gamma_\sigma}\bar{f}_i\delta u_i dS+\iint_{\Gamma_s}[\delta\mu_i u_i+\mu_i\delta u_i]dS$$

$$+\iint_{\Gamma_u}\{\delta\eta_i(u_i-\bar{u}_i)+\eta_i\delta u_i\}dS \tag{8.2}$$

先研究下面的积分，

$$\iiint_\tau\Big\{-p\delta u_{k,k}+\lambda u_k\delta\rho_{,k}+\lambda\rho\delta u_{k,k}+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}\delta u_{i,i}-\mu\lambda_{ij}\delta u_{i,j}\Big\}d\tau$$

$$=\iint_\Gamma\Big\{\Big[-pn_i+\lambda\rho n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-\mu\lambda_{ij}n_j\Big]\delta u_i+\lambda u_i n_i\delta\rho\Big\}dS$$

$$+\iiint_\tau\Big\{\Big[p_{,i}-(\lambda\rho)_{,i}-\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk,i}+\mu\lambda_{ij,j}\Big]\delta u_i-(\lambda u_k)_{,k}\delta\rho\Big\}d\tau \tag{8.3}$$

所以，用 (8.3) 式，可以把 (8.2) 式化为

$$\delta\Pi^*_{PG}=\iiint_\tau\Big\{\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i+p_{,i}-\rho\lambda_{,i}-\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk,i}+\mu\lambda_{ij,j}\Big\}\delta u_i d\tau$$

$$+\iiint_\tau\Big\{\Big(\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}+\lambda_{ij}\Big)\delta\sigma_{ij}+\Big(\lambda_{ii}-\frac{3p}{2\mu}+\pi\Big)\delta p+\lambda\frac{\partial\delta\rho}{\partial t}$$

$$+\Big[-(\lambda u_k)_{,k}+\lambda u_{k,k}-\pi\frac{\kappa}{\rho_0}\Big]\delta\rho\Big\}d\tau$$

$$+\iiint_\tau\Big\{\delta\lambda_{ij}\Big[\sigma_{ij}+p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\Big]$$

$$+\delta\lambda\Big[\frac{\partial\rho}{\partial t}+(u_k\rho)_{,k}\Big]+\delta\pi\Big[p-\Big(\frac{\rho}{\rho_0}-1\Big)\kappa\Big]\Big\}d\tau$$

$$+\iint_{\Gamma_s}\Big\{\delta\mu_i u_i+\Big(\mu_i-pn_i+\lambda\rho n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-\mu\lambda_{ij}n_j\Big)\delta u_i\Big\}dS$$

$$+\iint_{\Gamma_\sigma}\Big\{-pn_i+\lambda\rho n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-\mu\lambda_{ij}n_j-\bar{f}_i\Big\}\delta u dS$$

$$+\iint_{\Gamma_u}\Big\{\delta\eta_i(u_i-\bar{u}_i)+\Big(\eta_i-pn_i+\lambda\rho n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-\mu\lambda_{ij}n_j\Big)\delta u_i\Big\}dS \tag{8.4}$$

驻值条件$\delta\Pi^*_{PG}=0$给出下列欧拉方程

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i+\rho_{,i}\lambda+p_{,i}-(\lambda\rho)_{,i}-\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk,i}+2\mu\lambda_{ij,j}=0 \tag{8.5a}$$

$$\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij}+\lambda_{ij}=0 \tag{8.5b}$$

$$\lambda_{ii}-\frac{3}{2}\frac{p}{\mu}+\pi=0 \tag{8.5c}$$

$$-(\lambda u_k)_{,k}+\lambda u_{k,k}-\pi\frac{\kappa}{\rho_0}=0 \tag{8.5d}$$

$$\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}-\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{8.5e}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+(u_k\rho)_{,k}=0 \tag{8.5f}$$

$$p-\kappa\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)=0 \tag{8.5g}$$

$$\lambda=0 \tag{8.5h}$$

也给出下列自然边界条件

$$u_i=0 \qquad (\Gamma_s) \tag{8.6a}$$

$$\mu_i-pn_i+\lambda\rho n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j=0 \qquad (\Gamma_s) \tag{8.6b}$$

$$-pn_i+\lambda\rho n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j-\bar{f}_i=0 \qquad (\Gamma_\sigma) \tag{8.6c}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (\Gamma_u) \tag{8.6d}$$

$$\eta_i-pn_i+\lambda\rho n_i+\frac{2}{3}\mu\lambda_{kk}n_i-2\mu\lambda_{ij}n_j=0 \qquad (\Gamma_u) \tag{8.6e}$$

从(8.5d,h)，(8.5b)，(8.5c)，(8.6b,e)，我们求得

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\pi=0,\quad \lambda_{ij}=-\frac{1}{2\mu}\sigma_{ij},\quad \lambda_{ii}=\frac{3p}{2\mu}\\&\mu_i=\sigma_{ij}n_j,\quad \eta_i=\sigma_{ij}n_j\end{aligned}\right\} \tag{8.7}$$

(8.5a),(8.5e)分别给出

$$\left.\begin{aligned}&\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}+\rho u_k u_{i,k}-\rho\bar{F}_i-\sigma_{ij,j}=0\\&\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}-\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}+\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\end{aligned}\right\} \tag{8.8a,b}$$

由于$\lambda=\pi=0$，(8.5f,g)仍保持为约束条件。自然边界条件为

$$u_i=0 \quad (\Gamma_s),\quad \sigma_{ij}n_j-\bar{f}_i=0 \quad (\Gamma_\sigma),\quad u_i=\bar{u}_i \quad (\Gamma_u) \tag{8.9a,b,c}$$

把(8.7)代入Π^*_{PC}(8.1)，得广义变分原理的泛函

$$\Pi^*_{PC}=\Pi_{PC}-\frac{1}{2\mu}\iiint_\tau\sigma_{ij}\left[\sigma_{ij}+p\delta_{ij}+\frac{2}{3}\mu u_{k,k}\delta_{ij}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})\right]d\tau$$
$$+\iint_{\Gamma_s}\sigma_{ij}n_ju_idS+\iint_{\Gamma_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{8.10}$$

其中Π_{PC}见(7.11)，(7.12)式。

这里很易看到，对于约束条件(8.5f,g)而言，Π^*_{PC}仍没有解除，所以，是一种临界状态[7]。

可压缩粘性流体的流动问题的广义变分原理：

在满足（1）连续方程(2.7)式，（2）液体物态方程(2.10)式两个条件的一切σ_{ij}，u_i，p，ρ中，其使Π^*_{PC}(8.10)式为驻值的σ_{ij}，u_i，p，ρ，必为可压缩粘性流问题的正确解.

为了进一步解除连续方程和物态方程的约束(临界约束)，我们可以采用高阶拉氏乘子

法[7]。

新的泛函可以写成

$$\Pi_{G\lambda(粘)}=\Pi^*_{PO}+\iiint_\tau \lambda\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+(u_k\rho)_{,k}\right]\left[p-\kappa\left(\frac{\rho}{\rho_0}-1\right)\right]d\tau \tag{8.11}$$

Π^*_{PO}见(8.10)式。很易证明，变分后的自然条件是可压缩粘性流体力学问题的一切方程和边界条件，而$\lambda\neq0$则是一个任选的标量。

可压缩粘性流体的流动问题的更一般的广义变分原理：

凡使$\Pi_{G\lambda(粘)}$为驻值的ρ，p，u_i，σ_{ij}，必为可压缩粘性流体流动问题的正确解。

参 考 文 献

[1] Lin, C. C. (林家翘) and L. Rubinow, On the flow behind curved shocks, *Journal of Mathematics and Physics*, 27(1948), 105—129.

[2] Skobeikin, V. I., Variational principles in hydrodynamics, *Soviet Physics*, *JETP*, 4, 1(1957), 68—71.

[3] Guderley, K. G., An extremun principle for three dimensional compressible inviscid flows, *SIAM*, *Journal of Applied Mathematics*, 23, 2(1972), 259—275.

[4] Morice, P., Un Principe Variational et ume Methode de Resolution Numerigue par Elemente Finis pour des Ecoulements Avec, Frontiers, Libres, Paper presented at XIII Symposium of Dynamics of Fluids, Kortawo, Poland, Sept(1977).

[5] Manwell, A. R., A variational principle for steady honenergie compressible flow with finite shocks, *Wave Motion*, 2(1980), 83—95.

[6] Hafez, M. and D. Lovell, Numerical solution of transonic stream function equation, *AIAA Journal*, 21, 3(1983)

[7] 钱伟长，高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理，应用数学和力学，4，2(1983)，137—150.

Variational Principles and Generalized Variational Principles in Hydrodynamics of Viscous Fluids

Chien Wei-zang

(Shanghai University of Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper, the variational principles of hydrodynamic problems for the incompressible and compressible viscous fluids are established. These principles are principles of maximum power lossed. Their generalized variational principles are also discussed on the bases of Lagrange multiplier methods.