应用数学和力学，第5卷第3期（1984年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

混合杂交罚函数有限元方法及其应用

梁国平　　傅子智

（中国科学院数学研究所）（北京石油设计院）

（钟万勰推荐，1983年8月10收到）

摘　　要

对一般非协调有限元，目前采用最多的两种方法是罚函数法和混合、杂交法．前一种方法总能保证收敛，但精度差，条件数和稀疏性不好；后一种方法则要满足“秩条件”才能保证收敛，故单元的构造受到很大的限制．本文提出把这两种方法结合一起的有限元方法——混合杂交罚函数法．从理论上严格证明了（在非常一般的条件下）这种新方法总是收敛的，并且其精度、条件数以及稀疏性等皆与协调元相同，也就是说都是最优的．

最后应用这一方法具体构造了一个新的九自由度任意三角形弯板单元（每个顶点给三个自由度——一个位移和两个转角）．其单元刚度矩阵计算公式与旧的九自由度三角形弯板单元的计算公式相差不多．但它对任意几何形状的平板都收敛于真解，如果真解$u\in H^3$的话，它的三个弯矩具有一阶精度，位移及两个转角均具有二阶精度．

一、引　　言

用有限元方法求解椭圆型方程问题，经过二十多年的发展已逐步完善．然而有些问题至今仍未很好解决，其中一个突出的问题是求解高阶椭圆型方程．例如解重调和方程、板的弯曲方程和壳体方程等．其困难在于协调元所需的插值多项式的次数太高（例如对任意三角形的弯曲板单元，为了保证其位移函数及其法向导数跨过单元边界时的连续性，即属于C^1空间，至少要用五次多项式的插值函数），计算量及存储量都不合算．因此迫使人们采用非协调的方法．目前处理非协调元主要有两类方法，一类是罚函数法[1][2]，此法总能保证有限元解收敛于真解，但其精度差（误差阶只及协调元的一半），代数方程组的条件数（其阶比协调元高一倍）及稀疏性（半带宽约为协调元的两倍）不好[3]．另一类是杂交（或混合）有限元法，此法一旦收敛则其精度及条件数（就其阶而言）皆与协调元相同．收敛的充要条件是要满足所谓“秩条件”[4]，但一般的单元很难满足这一条件．

本文提出一种把两者结合起来的有限元方法．概括起来说就是：采用三套变量，单元内两套——位移变量及应力变量，用混合变分原理；边界上一套——位移变量，用杂交及罚函数法把边界变量及内部变量联系起来．本文在最一般的形式下（对单元变量没有任何限制，不需要满足任何的协调性条件；对单元形状的限制与协调元一样），证明了其误差阶及条件数阶均与协调元相同，也就是说是最优的．

具体应用这一方法，构造了一种新的九自由度的任意三角形板单元（每个顶点三个自由度——位移及两个转角）。它与旧的九自由度三角形单元（自由度的给法相同）的计算量相差甚少，其位移及转角具有二阶精度，弯矩具有一阶精度。而众所周知旧的九自由度三角形单元通常是不收敛的。这种单元很容易推广到三角形壳体单元，且具有同样的精度。

二、变分公式及有限元逼近

本文研究求解椭圆型方程边值问题。

$$\left.\begin{aligned} L^*ELu&=f && 在\Omega上\\ \gamma u&=g && 在\Gamma_u上\\ SELu&=\Sigma && 在\Gamma_\sigma上 \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中 u 是位移函数，L 是m阶($m\geqslant 1$ 的正整数)微分算子，L^*是L的共轭算子，$\Gamma_u\cup\Gamma_\sigma=\partial\Omega$，$\partial\Omega$ 是 Ω 的周界。E 是一对称正定矩阵，f 是定义在区域 Ω 上的外力，g 是给定的边界位移值，Σ 是给定的边界外力值。g 和 Σ 都是 m维列向量 $g=(g_0,g_1,\cdots,g_{m-1})^T$，$\Sigma=(\Sigma_0,\Sigma_1,\cdots,\Sigma_{m-1})^T$。$\gamma u=(\gamma_0 u,\gamma_1 u,\cdots,\gamma_{m-1}u)^T$，$S\sigma=(S_0\sigma,S_1\sigma,\cdots,S_{m-1}\sigma)^T$，$\gamma_i$ 是 i 阶边界微分算子，S_i 是 $m-i-1$ 阶边界微分算子（$i=0,1,\cdots,m-1$）。假定对任何区域 $\omega\subseteq\Omega$ 及任何函数$u\in H^m(\omega)$和 $\sigma\in H^m(\omega)$ 有格林公式

$$\langle Lu,\sigma\rangle_\omega=\langle L^*\sigma,u\rangle_\omega+\langle\gamma u,S\sigma\rangle_{\partial\omega} \tag{2.2}$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ 表示两个（向量）函数在区域 ω 上的内积，$\langle\cdot,\cdot\rangle_{\partial\omega}$ 表示两个（向量）函数在边界区域 $\partial\omega$ 上的内积，

$$\langle\gamma u,S\sigma\rangle_{\partial\omega}=\sum_{i=0}^{m-1}\langle\gamma_i u,S_i\sigma\rangle_{\partial\omega} \tag{2.3}$$

由一般理论[6]我们知道边值问题(2.1)与求(u,σ)满足下述方程和边界条件

$$\left.\begin{aligned} ELu&=\sigma && 在\Omega上\\ L^*\sigma&=f && 在\Omega上\\ \gamma u&=g && 在\Gamma_u上\\ S\sigma&=\Sigma && 在\Gamma_\sigma上 \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

是等价的，其中 σ 是应力，又与求泛函

$$J(u,\sigma)=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\langle u,ELu\rangle_\Omega+\langle Lu,\sigma\rangle_\Omega-\frac{1}{2}\langle\sigma,\sigma\rangle_\Omega\right\}-\langle f,u\rangle_\Omega-\langle\gamma u,\Sigma\rangle_{\Gamma_\sigma} \tag{2.5}$$

的稳定点问题等价（其中 u 的允许函数类要求在Γ_u上满足边值条件 $\gamma u=g$，σ不必满足相应的边界条件），即所谓混合变分原理。

为了用有限元求问题(2.5) 的近似解，把 Ω 剖分为许多单元，假定这些剖分满足一定的正则性条件要求[6]，用 e 表示任意一个单元，用A 表示这些面元（只考虑二维问题，故把单元称作面元）的总体集合，u 和 σ 是定义在所有面元$e\in A$上的函数。用 τ 表示单元的任意一条边，用T表示这些线元的总体集合，$\lambda=(\lambda_0,\lambda_1,\cdots,\lambda_{m-1})^T$是定义在所有线元 $\tau\in T$ 上的m维列向量函数。定义 Hilbert 空间（这里用到的一些 Sobolev 空间的记号参看）[7,8]）

$$\mathscr{H}_1=S(A)\times\Lambda(T)$$

其中 $$S(A)=\{u|u\in\prod_{e\in A}H^m(e)\}$$

$$\Lambda(T)=\left\{\lambda|\lambda_i\in\prod_{\tau\in T}H^{m-i+\frac{1}{2}}(\tau),i=0,1,2,\cdots,m-1\right\}$$

其模定义如下

$$\|(u,\lambda)\|^2_{\mathscr{H}_1}=\sum_{e\in A}\{|u|^2_{m,e}+d(\gamma u-\lambda,\gamma u-\lambda)_{\partial e}\}\tag{2.6}$$

其中 $$|u|^2_{m,e}=\sum_{|\alpha|=m}\iint_e|D^\alpha u|^2$$

$$d(\gamma u-\lambda,\gamma u-\lambda)_{\partial e}=\sum_{i=0}^{m-1}h^{2i+1-2m}\langle\gamma_i u-\lambda_i,\gamma_i u-\lambda_i\rangle_{\partial e}$$

∂e 是 e 的周界，由若干个线元 $\tau\in T$ 组成．定义另一个Hilbert 空间

$$\mathscr{H}_2=R(A)$$

其中 $$R(A)=\left\{\sigma|\sigma\in\prod_{e\in A}H^0(e)\right\}$$

其模定义为

$$|\sigma|^2_{\mathscr{H}_2}=\sum_{e\in A}\langle\sigma,\sigma\rangle_e=\langle\sigma,\sigma\rangle_\Omega\tag{2.7}$$

泛函 (2.5) 用下述泛函

$$\begin{aligned}J(u,\lambda,\sigma)=\sum_{e\in A}\Big\{\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}\langle Lu,ELu\rangle_e+\langle Lu,\sigma\rangle_e\\-\frac{1}{2}\langle\sigma,E^{-1}\sigma\rangle_e\Big]-\langle\gamma u-\lambda,S\sigma\rangle_{\partial e}\\+\frac{1}{2}d(\gamma u-\lambda,\gamma u-\lambda)_{\partial e}\Big\}-\langle f,u\rangle_\Omega-\langle\lambda,\Sigma\rangle_{\Gamma_a}\end{aligned}\tag{2.8}$$

代替，其允许集合 $E_g=\{(u,\lambda,\sigma)|(u,\lambda)\in\mathscr{H}_1,\ \sigma\in\mathscr{H}_2$，在 Γ_u 上 $\lambda=g\}$，当 $g=0$ 时，我们记E_g为 E_0，显然 $E_g\subset\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$．不难证明下述引理（见[9]）．

引理 1 如果 u,σ 是(2.4)的解，在全部 $\tau\in T$ 上取 $\lambda=u$，则这样得到的(u,λ,σ)是泛函(2.8)在集合 E_g 上的稳定点．

为了求泛函(2.8)的近似解我们对u,λ和 σ 分别取近似逼近空间$\hat{S}(A)$，$\hat{\Lambda}(T)$及$\hat{R}(A)$，其中 $\hat{S}(A)\subset S(A)$，$\hat{\Lambda}(T)\subset\Lambda(T)$ 及 $\hat{R}(A)\subset R(A)$，从而$\hat{\mathscr{H}}_1=\hat{S}(A)\times\hat{\Lambda}(T)\subset\mathscr{H}_1$，$\hat{\mathscr{H}}_2=\hat{R}(A)\subset\mathscr{H}_2$．取允许集 $\hat{E}_g=\{(\hat{u},\hat{\lambda},\hat{\sigma})|(\hat{u},\hat{\lambda})\in\hat{\mathscr{H}}_1,\ \hat{\sigma}\in\hat{\mathscr{H}}_2$，在$\Gamma_u$上$\hat{\lambda}=g\}$．通常的有限元逼近空间就是在每一面元 $e\in A$上$\hat{u}$ 和 $\hat{\sigma}$ 采用一定阶数的插值多项式，（注意：跨过 e 的边界不需要有任何的连续性要求），$\hat{\lambda}$ 在每一线元 $\tau\in T$ 上$(\tau\not\subseteq\Gamma_u)$ 亦采用一定阶数的插值多项式（在 $\tau\in\Gamma_u$ 上取 $\hat{\lambda}=g$）．显然有 $\hat{E}_g\subseteq E_g$，从而有

引理 2 若$(\hat{u},\hat{\sigma},\hat{\lambda})$ 和 (u,σ,λ) 分别为泛函(2.8)J 在集$\hat{E}_g$和集 E_g 上的稳定点，则它们皆满足在集$\hat{E}_g$ 上的变分方程，即

$$D(\hat{u},\hat{\lambda},\hat{\sigma};\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\sigma})=\langle f,\bar{u}\rangle_\Omega+\langle\bar{\lambda},\Sigma\rangle_{\Gamma_a}\qquad\forall(\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\sigma})\in\hat{E}_0\tag{2.9}$$

$$D(u,\lambda,\sigma;\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\sigma})=\langle f,\bar{u}\rangle_{\Omega}+\langle\bar{\lambda},\Sigma\rangle_{\Gamma_\sigma},\quad \forall(\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\sigma})\in\hat{E}_0 \tag{2.10}$$

其中

$$D(u,\lambda,\sigma;\bar{u},\bar{\lambda},\bar{\sigma})=\sum_{e\in A}\left\{\frac{1}{2}[\langle Lu,EL\bar{u}\rangle_e+\langle Lu,\bar{\sigma}\rangle_e+\langle L\bar{u},\sigma\rangle_e-\langle\sigma,\bar{\sigma}\rangle_e]\right.$$
$$\left.-\langle\gamma u-\lambda,S\bar{\sigma}\rangle_{\partial e}-\langle\gamma\bar{u}-\bar{\lambda},S\sigma\rangle_{\partial e}+d(\gamma u-\lambda,\gamma\bar{u}-\bar{\lambda})_{\partial e}\right\} \tag{2.11}$$

由引理 2 及泛函(2.8)我们可以得到下面的若干定理，这些定理将在下节证明.

定理 1 如果 σ 的插值多项式是正规的（即满足反估计不等式成立的条件[6,7]），则在允许集 $\hat{E}_g$ 上对泛函(2.8) J 求得的稳定点 $(\hat{u},\hat{\lambda},\hat{\sigma})$ [即方程(2.9)的解] 与真解 (u,λ,σ)（即在集 E_g 上求得的稳定点）有误差估计

$$\|(\hat{u}-u,\hat{\lambda}-\lambda)\|_{\mathscr{H}_1}+|\hat{\sigma}-\sigma|_{\mathscr{H}_2}$$
$$\leqslant K\{\inf_{\substack{\tilde{u}\in\hat{S}(A)\\ \tilde{\lambda}\in\Lambda(T)}}\|(\tilde{u}-u,\tilde{\lambda}-\lambda)\|_{\mathscr{H}_1}+\inf_{\tilde{\sigma}\in\hat{R}(A)}|\tilde{\sigma}-\sigma|_{\mathscr{H}_2}\} \tag{2.12}$$

其中 K 是不依赖于部分及真解 u 的常数. 下面将用相同的 K 表示不依赖剖分及真解 u 的常数，这些常数可能是不一样的.

定理 2 若在每一单元 $e\in A$，$\tilde{u}$ 和 $\tilde{\sigma}$ 分别采用 k_1 阶及 k_3 阶插值多项式，而 λ_i 在每一 $\tau\in T$ $(\tau\not\subset\Gamma_u)$ 上采用 k_{2-i} 阶插值多项式，真解 $u\in H^{k_0}(\Omega)$，则有能量模误差估计

$$\|(\hat{u}-u,\hat{\lambda}-\lambda)\|_{\mathscr{H}_1}+|\hat{\sigma}-\sigma|_{\mathscr{H}_2}\leqslant Kh^k\|u\|_{k_0,\Omega} \tag{2.13}$$

及 L_2 误差估计

$$\|\hat{u}-u\|_{0,\Omega}\leqslant K(h^{k+m}+h^{2k})\|u\|_{k_0,\Omega} \tag{2.14}$$

其中 $k=\min(k_0-m,k_1-m+1,k_2-m+1,k_3)$.

由泛函 $J(u,\lambda,\sigma)$ 的表达式 (2.8) 不难看出在 $\hat{E}_g$ 上求 J 的稳定点等价于求

$$\min_{(\tilde{u},\tilde{\lambda})}\max_{\tilde{\sigma}} J(\tilde{u},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})$$

从数值代数稳定性的观点看，第一步求 $\max\limits_{\tilde{\sigma}} J$ 不会发生困难，因为每一代数方程组的阶数很低（只等于每单元 e 上 $\tilde{\sigma}$ 的自由度）并且其条件数显然是一与 h 无关的常数. 对 $\tilde{\sigma}$ 求极大之后得到一个关于变量 $(\tilde{u},\tilde{\lambda},)$ 的二次函数 $\max\limits_{\tilde{\sigma}\in\hat{R}(A)} J(\tilde{u},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})$. 第二步是此函数对 $(\tilde{u},\tilde{\lambda})$ 变量求极小，由此得到一线性代数方程组，对此方程组的条件数（简称为二次函数 $\max\limits_{\tilde{\sigma}} J(\tilde{u},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})$ 的条件数）我们有

定理 3 $\max\limits_{\tilde{\sigma}} J(\tilde{u},\tilde{\lambda},\tilde{\sigma})$ 的条件数为 $O(h^{-2m})$.

三、误差估计及条件数

本节的目的是证明上节的定理 1～3. 设 $\mathscr{H}_1$ 及 $\mathscr{H}_2$ 是两个 Hilbert 空间，考虑在其乘积空间 $\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 上的混合变分问题，即在 $(u,\varphi)\in\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$（即 $u\in\mathscr{H}_1$，$\varphi\in\mathscr{H}_2$）空间上求泛函

$$J(u,\varphi)=\frac{1}{2}a(u,u)+b(u,\varphi)-\frac{1}{2}c(\varphi,\varphi)-f_1(u)+f_2(\varphi) \tag{3.1}$$

的稳定点. 其中 a,b 和 c 都是双线性泛函，f_1 和 f_2 都是线性泛函，并且 a 和 c 是对称的. 这

又等价于求变分方程组

$$a(u,v)+b(v,\varphi)=f_1(v) \qquad \forall v\in\mathscr{H}_1 \tag{3.2}$$

$$c(\varphi,\psi)-b(u,\psi)=f_2(\psi) \qquad \forall \psi\in\mathscr{H}_2 \tag{3.3}$$

的解。

定理 4 如果 a,b,c 满足以下条件：

1) a 和 c 满足椭圆型条件，即存在正常数 α_1 及 α_2 使得

$$\left.\begin{aligned} &a(u,u)\geqslant \alpha_1\|u\|^2_{\mathscr{H}_1} && \forall u\in\mathscr{H}_1\\ &c(\varphi,\varphi)\geqslant \alpha_2|\varphi|^2_{\mathscr{H}_2} && \forall \varphi\in\mathscr{H}_2\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

2) a,b 和 c 满足有界性条件，即存在正常数 B_1,B_2,B_3 使得

$$\left.\begin{aligned} &|a(u,v)|\leqslant B_1\|u\|_{\mathscr{H}_1}\|v\|_{\mathscr{H}_1} && \forall u,v\in\mathscr{H}_1\\ &|b(u,\varphi)|\leqslant B_2\|u\|_{\mathscr{H}_1}|\varphi|_{\mathscr{H}_2} && \forall u\in\mathscr{H}_1,\varphi\in\mathscr{H}_2\\ &|c(\varphi,\psi)|\leqslant B_3|\varphi|_{\mathscr{H}_2}|\psi|_{\mathscr{H}_2} && \forall \varphi,\psi\in\mathscr{H}_2\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

则泛函 J 有并且仅有一个稳定点（即变分方程组(3.2)和(3.3)有并且仅有一组解）(u,φ)，而且有估计

$$\|u\|_{\mathscr{H}_1}+|\varphi|_{\mathscr{H}_2}\leqslant \alpha^{-1}\sqrt{\|f_1\|^2_{\mathscr{H}_1^*}+|f_2|^2_{\mathscr{H}_2^*}} \tag{3.6}$$

其中 $\alpha=\min(\alpha_1,\alpha_2)$（以下的 α 含意相同），$\|\cdot\|_{\mathscr{H}_1}$是$\mathscr{H}_1$空间的模，$\|\cdot\|_{\mathscr{H}_1^*}$ 是 $\mathscr{H}_1$ 的对偶空间的模，$|\cdot|_{\mathscr{H}_2}$与$|\cdot|_{\mathscr{H}_2^*}$ 类似。

证明：(3.2)+(3.3)得

$$D(u,\varphi;v,\psi)=f_1(v)+f_2(\psi) \qquad \forall v\in\mathscr{H}_1,\psi\in\mathscr{H}_2 \tag{3.7}$$

其中 $D(u,\varphi;v,\psi)=a(u,v)+c(\varphi,\psi)+b(v,\varphi)-b(u,\psi)$

由椭圆型条件有

$$D(u,\varphi;u,\varphi)=a(u,u)+c(\varphi,\varphi)\geqslant \alpha(\|u\|^2_{\mathscr{H}_1}+|\varphi|^2_{\mathscr{H}_2}) \tag{3.8}$$

我们在乘积空间$\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$上定义模

$$|||(u,\varphi)|||=\sqrt{\|u\|^2_{\mathscr{H}_1}+|\varphi|^2_{\mathscr{H}_2}}$$

由(3.8)即得D满足强制性（Coercive）条件

$$\sup_{v,\psi}\frac{D(u,\varphi;v,\psi)}{|||(v,\psi)|||}\geqslant \alpha\,|||(u,\varphi)||| \qquad \forall (u,\varphi)\in\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2 \tag{3.9}$$

由有界性条件(3.5)即可得到 D 的有界性条件，$f_1(v)+f_2(\psi)$ 显然是定义在$\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$上的线性泛函$F(v,\psi)$，其模

$$|||F|||_*=\sqrt{\|f_1\|^2_{\mathscr{H}_1^*}+|f_2|^2_{\mathscr{H}_2^*}}$$

因此由 Lax-Milgram 引理[6]知道存在唯一的 $(u,\varphi)\in\mathscr{H}_1\times\mathscr{H}_2$ 满足变分方程(3.7)，并且其解有估计

$$|||(u,\varphi)|||\leqslant \alpha^{-1}|||F|||_*$$

由此即得(3.6)。

为了得到变分问题(3.1)的近似解，我们用有限维空间$\hat{\mathscr{H}}_1$和$\hat{\mathscr{H}}_2$分别逼近$\mathscr{H}_1$和$\mathscr{H}_2$，然后在近似解空间$\hat{\mathscr{H}}_1\times\hat{\mathscr{H}}_2$上求泛函$J$的稳定点（即求 $\min\limits_{\hat{u}\in\hat{\mathscr{H}}_1}\max\limits_{\hat{\varphi}\in\hat{\mathscr{H}}_2} J(\hat{u},\hat{\varphi})$），或等价地求变分方程组

$$a(\hat{u},v)+b(v,\hat{\varphi})=f_1(v) \qquad \forall v\in\hat{\mathscr{H}}_1 \tag{3.2)$'$ (}$$

$$c(\hat{\varphi},\psi)-b(\hat{u},\psi)=f_2(\psi) \qquad \forall\psi\in\hat{\mathscr{H}}_2 \tag{3.3)$'$ (}$$

的解，即可得到近似解 $(\hat{u},\hat{\varphi})$。如果逼近空间 $\hat{\mathscr{H}}_1\subseteq\mathscr{H}_1$，$\hat{\mathscr{H}}_2\subseteq\mathscr{H}_2$，我们有

定理 5 如果 a,b 和 c 满足

1) a 和 c 分别在近似解空间 $\hat{\mathscr{H}}_1$ 和 $\hat{\mathscr{H}}_2$ 上满足定理 4 的条件 1，（注意此条件比定理 4 的弱）(即(3.4)式)；

2) a,b 和 c 满足定理 4 的条件 2（即(3.5)式）。

则方程组 (3.2)′ 和 (3.3)′ 存在唯一的解 $(\hat{u},\hat{\varphi})$，此解与真解 (u,φ) 有误差估计

$$\|\hat{u}-u\|_{\mathscr{H}_1}+|\hat{\varphi}-\varphi|_{\mathscr{H}_2}\leqslant\left(1+\frac{2B}{\alpha}\right)\left(\inf_{\tilde{u}\in\hat{\mathscr{H}}_1}\|u-\tilde{u}\|_{\mathscr{H}_1}+\inf_{\tilde{\varphi}\in\hat{\mathscr{H}}_2}|\varphi-\tilde{\varphi}|_{\mathscr{H}_2}\right) \tag{3.10}$$

其中 $B=\max(B_1,B_2,B_3)$。

证明：由(3.2)′+(3.3)′的左端=(3.2)+(3.3)的左端得

$$\begin{aligned}&a(\hat{u},v)+b(v,\hat{\varphi})-b(\hat{u},\psi)+c(\hat{\varphi},\psi)\\&\quad=a(u,v)+b(v,\varphi)-b(u,\psi)+c(\varphi,\psi)\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}&a(\hat{u}-\tilde{u},v)+b(v,\hat{\varphi}-\tilde{\varphi})-b(\hat{u}-\tilde{u},\psi)+c(\hat{\varphi}-\tilde{\varphi},\psi)\\&\quad=a(u-\tilde{u},v)+b(v,\varphi-\tilde{\varphi})-b(u-\tilde{u},\psi)+c(\varphi-\tilde{\varphi},\psi)\end{aligned}$$

取 $v=\hat{u}-\tilde{u}$，$\psi=\hat{\varphi}-\tilde{\varphi}$，则上式

$$\begin{aligned}\text{左边}&=a(v,v)+c(\psi,\psi)\geqslant\alpha(\|v\|^2_{\mathscr{H}_1}+|\psi|^2_{\mathscr{H}_2})\\&\geqslant\frac{\alpha}{2}(\|v\|_{\mathscr{H}_1}+|\psi|_{\mathscr{H}_2})^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&\leqslant B_1\|u-\tilde{u}\|_{\mathscr{H}_1}\|v\|_{\mathscr{H}_1}+B_2\|v\|_{\mathscr{H}_1}|\varphi-\tilde{\varphi}|_{\mathscr{H}_2}\\&\quad+B_2\|u-\tilde{u}\|_{\mathscr{H}_1}|\psi|_{\mathscr{H}_2}+B_3|\varphi-\tilde{\varphi}|_{\mathscr{H}_2}|\psi|_{\mathscr{H}_2}\\&\leqslant B(\|u-\tilde{u}\|_{\mathscr{H}_1}+|\varphi-\tilde{\varphi}|_{\mathscr{H}_2})(\|v\|_{\mathscr{H}_1}+|\psi|_{\mathscr{H}_2})\end{aligned}$$

故

$$\|v\|_{\mathscr{H}_1}+|\psi|_{\mathscr{H}_2}\leqslant\frac{2B}{\alpha}(\|u-\tilde{u}\|_{\mathscr{H}_1}+|\varphi-\tilde{\varphi}|_{\mathscr{H}_2})$$

$$\begin{aligned}\|\hat{u}-u\|_{\mathscr{H}_1}+|\hat{\varphi}-\varphi|_{\mathscr{H}_2}&\leqslant\|v\|_{\mathscr{H}_1}+\|u-\tilde{u}\|_{\mathscr{H}_1}+|\psi|_{\mathscr{H}_2}+|\varphi-\tilde{\varphi}|_{\mathscr{H}_2}\\&\leqslant\left(1+\frac{2B}{\alpha}\right)(\|u-\tilde{u}\|_{\mathscr{H}_1}+|\varphi-\tilde{\varphi}|_{\mathscr{H}_2})\end{aligned}$$

由此即得(3.10)。存在唯一性容易仿照上述证明过程得到。

由定理 5 即得定理1。

如果 Hilbert 空间 $\mathscr{H}_1$ 是 L_2（即平方可积空间）的子空间（即 $\mathscr{H}_1\subset L_2$），则有

定理 6 如果 a,b 和 c 满足定理 4 的全部条件，则对 L_2 空间中的任何一个元素 f，皆有估计

$$\langle f,e\rangle\leqslant B\left(\inf_{\tilde{w}\in\hat{\mathscr{H}}_1}\|w-\tilde{w}\|_{\mathscr{H}_1}+\inf_{\tilde{z}\in\hat{\mathscr{H}}_2}|z-\tilde{z}|_{\mathscr{H}_2}\right)(\|e\|_{\mathscr{H}_1}+|\varepsilon|_{\mathscr{H}_2}) \tag{3.11}$$

其中，$B=\max(B_1,\ B_2,\ B_3)$，$e=u-\hat{u}$，$\varepsilon=\varphi-\hat{\varphi}$，是真解与近似解之差，$\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是 L_2 空间中任意两个元素的内积．w 和 z 满足变分方程组

$$a(w,v)+b(v,z)=\langle f,v\rangle \qquad \forall v\in\mathscr{H}_1 \tag{3.12}$$

$$c(z,\psi)-b(w,\psi)=0 \qquad \forall\psi\in\mathscr{H}_2 \tag{3.13}$$

证明：由$\mathscr{H}_1\subseteq L_2$ 可知 $\langle f,v\rangle$ 是$\mathscr{H}_1$空间上的一线性泛函，根据定理 4 知道方程组(3.12)和(3.13)的解存在唯一．取 $v=e,\psi=\varepsilon$ 代入此方程组，(3.12)减(3.13)即得

$$\langle f,e\rangle=a(w,e)+b(e,z)+b(w,\varepsilon)-c(z,\varepsilon) \tag{3.14}$$

另一方面对任何 $\tilde{w}\in\hat{\mathscr{H}}_1$ 及任何 $\tilde{z}\in\hat{\mathscr{H}}_2$ 又有

$$\begin{aligned}&a(\tilde{w},e)+b(e,\tilde{z})+b(\tilde{w},\varepsilon)-c(\tilde{z},\varepsilon)\\&\quad=(a(e,\tilde{w})+b(\tilde{w},\varepsilon))-(c(\varepsilon,\tilde{z})-b(e,\tilde{z}))=0\end{aligned} \tag{3.15}$$

(3.14)式减(3.15)式得

$$\begin{aligned}\langle f,e\rangle&=a(w-\tilde{w},e)+b(e,z-\tilde{z})+b(w-\tilde{w},\varepsilon)-c(z-\tilde{z},\varepsilon)\\&\leqslant B(\|w-\tilde{w}\|_{\mathscr{H}_1}+|z-\tilde{z}|_{\mathscr{H}_2})(\|e\|_{\mathscr{H}_1}+|\varepsilon|_{\mathscr{H}_2})\end{aligned}$$

由此式即得(3.11)式．

由定理 5 和 6 以及有限元插值理论及椭圆型方程的一般理论即可推得定理 2．

下面讨论条件数估计，由(3.1)式不难看出在 $\hat{\mathscr{H}}_1\times\hat{\mathscr{H}}_2$ 有限维空间上求泛函 $J(u,\varphi)$ 的稳定点等价于求 $\min\limits_{u\in\hat{\mathscr{H}}_1}\max\limits_{\varphi\in\hat{\mathscr{H}}_2}J(u,\varphi)$ 或 $\max\limits_{\varphi\in\hat{\mathscr{H}}_2}\min\limits_{u\in\hat{\mathscr{H}}_1}J(u,\varphi)$（由极值理论的对偶性原理 知 道 min, max 与 max，min 问题等价，故两者具有相同的解）．我们用符号Num $(\max\limits_{\varphi\in\hat{\mathscr{H}}_2}J(u,\varphi))$ 及 $\mathrm{Num}(-\min\limits_{u\in\hat{\mathscr{H}}_1}J(u,\varphi))$ 分别表示二次函数 $\max\limits_{\varphi\in\hat{\mathscr{H}}_2}J(u,\varphi)$ 及 $\min\limits_{u\in\hat{\mathscr{H}}_1}J(u,\varphi)$ 的条件数，对于这两个条件数的估计我们有

定理 7 如果 a,b 和 c 满足定理 5 的全部条件，则有

$$\mathrm{Num}(\max_{\varphi\in\hat{\mathscr{H}}_2}J(u,\varphi))\leqslant\alpha_1^{-1}\left(B_1+\frac{B_2^2}{\alpha_2^2}\right)\mathrm{Num}(\|u\|^2_{\mathscr{H}_1})\qquad \forall u\in\hat{\mathscr{H}}_1 \tag{3.16}$$

$$\mathrm{Num}(-\min_{u\in\hat{\mathscr{H}}_1}J(u,\varphi))\leqslant\alpha_2^{-1}\left(B_3+\frac{B_2^2}{\alpha_1^2}\right)\mathrm{Num}(|\varphi|^2_{\mathscr{H}_2})\qquad \forall\varphi\in\hat{\mathscr{H}}_2 \tag{3.17}$$

证明：设$J(u,\hat{\varphi})=\max\limits_{\varphi\in\hat{\mathscr{H}}_2}J(u,\varphi)$，则 $\hat{\varphi}$满足方程

$$c(\hat{\varphi},\psi)=b(u,\psi)+f_2(\psi) \qquad \forall\psi\in\hat{\mathscr{H}}_2 \tag{3.18}$$

由(3.18)求得的$\hat{\varphi}$必为 u 的线性函数，由此代入 $J(u,\hat{\varphi})$ 得到一个关于变量 u 的二次函数．不难看出其二次型部分等于齐次二次函数$\tilde{J}(u)$，

$$\tilde{J}=\frac{1}{2}a(u,u)+b(u,\varphi)-\frac{1}{2}c(\varphi,\varphi) \tag{3.19}$$

其中 φ 是 u 的齐次线性函数，通过解齐次方程

$$c(\varphi,\psi)=b(u,\psi) \qquad \forall\psi\in\hat{\mathscr{H}}_2 \tag{3.20}$$

求得．因此我们估计 $\tilde{J}(u)$ 的条件数即可得到 $J(u)$ 的条件数．取 $\psi=\varphi$代入(3.20)得

$$c(\varphi,\varphi)=b(u,\varphi) \tag{3.21}$$

故

$$|\varphi|_{\mathscr{H}_2}\leqslant\frac{B_2}{\alpha_2}\|u\|_{\mathscr{H}_1} \tag{3.22}$$

由(3.21)代入$\tilde{J}$得

$$\tilde{J}=\frac{1}{2}a(u,u)+\frac{1}{2}c(\varphi,\varphi)\geqslant\frac{\alpha_1}{2}\|u\|^2_{\mathscr{H}_1}\tag{3.23}$$

另一方面，由(3.21)，(3.22)及a, b的有界性条件

$$\begin{aligned}\tilde{J}&=\frac{1}{2}a(u,u)+\frac{1}{2}b(u,\varphi)\\&\leqslant\frac{B_1}{2}\|u\|^2_{\mathscr{H}_1}+\frac{B_2}{2}\frac{B_2}{\alpha_2}\|u\|^2_{\mathscr{H}_1}=\frac{1}{2}\left(B_1+\frac{B_2^2}{\alpha_2}\right)\|u\|^2_{\mathscr{H}_1}\end{aligned}\tag{3.24}$$

由(3.23)和(3.24)即得(3.16)，同理得(3.17)。

由定理7便可得到定理3[3]

四、新的三角形弯曲板单元

本节应用混合杂交罚函数有限元变分表达式(2.8)的$J(u,\lambda,\sigma)$具体构造一任意三角形弯曲板单元.

对于平板弯曲问题，我们有

$$Lu=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2},2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^T,\quad \sigma=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})^T$$

$$E=\beta\begin{bmatrix}1&\nu&0\\ \nu&1&0\\ 0&0&\frac{1-\nu}{2}\end{bmatrix},\ E^{-1}=\frac{1}{\beta}\begin{bmatrix}(1-\nu^2)^{-1}&-\nu(1-\nu^2)^{-1}&0\\ -\nu(1-\nu^2)^{-1}&(1-\nu^2)^{-1}&0\\ 0&0&2(1-\nu)^{-1}\end{bmatrix}$$

$$\langle Lu,ELu\rangle_e=\iint_e\beta\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right]\tag{4.1}$$

$$\langle\sigma,E^{-1}\sigma\rangle_e=\iint_e\frac{1}{\beta}[(1-\nu^2)^{-1}(\sigma_{11}^2+\sigma_{22}^2-2\nu\sigma_{11}\sigma_{22})+2(1-\nu)^{-1}\sigma_{12}^2]\tag{4.2}$$

$$\langle\gamma u-\lambda,S\sigma\rangle_e=\sum_{i,j=1}^{2}\left\{\int_{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_i\right)\sigma_{ij}n_j-\int_{\partial e}(u-\lambda_0)\ \frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}n_i\right\}\tag{4.3}$$

其中$\sigma_{21}=\sigma_{12}$，n为外法线方向，n_i是n在x_i坐标轴上的投影. $\beta=\frac{et^3}{12(1-\nu^2)}$，$t$是板厚，$e$是弹性模量，$\nu$是泊松系数.

$$d(\gamma u-\lambda,\gamma u-\lambda)_{\partial e}=\sum_{i=1}^{2}h^{-1}\int_{\partial e}\left[\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_i\right]^2+h^{-3}\int_{\partial e}(u-\lambda_0)^2\tag{4.4}$$

e为任意三角形单元，在e上位移函数$u(x_1,x_2)$取为九自由度的不完全三次插值多项式

$$\begin{aligned}u(x_1,x_2)=&a_0+b_1x_1+b_2x_2+c_1x_1^2+c_2x_2^2+2c_{12}x_1x_2\\&+d_1x_1^3+d_2x_2^3+d_{12}x_1^2x_2+d_{21}x_1x_2^2\end{aligned}\tag{4.5}$$

三角形的每个顶点上给三个自由度$\left(u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\ \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)$. 这样的位移插值函数属于$C^0$类但不属

于C^1类，即u跨过三角形的每条边时是连续的，但法向导数不连续．在e的每条边上我们取$\lambda_0=u$，λ_i为$\frac{\partial u}{\partial x_i}$的线性插值函数，在两个端点上取$\lambda_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$．应力$\sigma=(\sigma_{11},\sigma_{22},\sigma_{12})^T$取为常数向量．

按照上述办法构造出来的(u,λ,σ)，(4.3)式简化为

$$\langle \gamma u-\lambda, S\sigma\rangle_{\partial e}=\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_i\right)\sigma_{ij}n_j \tag{4.6}$$

(4.4) 式简化为

$$d(\gamma u-\lambda,\gamma u-\lambda)_{\partial e}=h^{-1}\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_i\right)^2 \tag{4.7}$$

下面的定理指出从泛函$J(u,\lambda,\sigma)$中完全去掉罚函数项(4.7)，不会影响近似解的阶精度．

定理 8 如果(u,λ,σ)的插值函数空间按以上办法构造，则弯板的泛函J简单地取为

$$J(u,\lambda,\sigma)=\sum_{e\in A}\tilde{J}_e(u,\lambda,\sigma)+\sum_{\substack{\tau\subseteq\Gamma_\sigma\\ \tau\in T}}\sum_{i,j=1}\int_\tau\left(\lambda_i\sigma_{ij}n_j-u\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_i}n_j\right)-\langle f,u\rangle_\Omega \tag{4.8}$$

其中

$$\tilde{J}_e(u,\lambda,\sigma)=\frac{1}{4}(\langle Lu,ELu\rangle_e-\langle\sigma,E^{-1}\sigma\rangle_e)-\frac{1}{2}\langle Lu,\sigma\rangle_e+\left\langle\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_j},\sigma_{ij}\right\rangle_e \tag{4.9}$$

则泛函(4.8)的稳定点$(\hat{u},\hat{\lambda},\hat{\sigma})$存在，唯一，并有下述误差估计

$$h\sqrt{\sum_{e\in A}|\hat{u}-\tilde{u}|^2_{2,e}}+\|\hat{u}-u\|_{1,\Omega}\leqslant Kh^2\|u\|_{3,\Omega_0} \tag{4.10}$$

其中K是一只依赖于Ω的常数．λ_i原来只定义在e的周界∂e上，在e上的λ_i应理解为简单的线性开拓，即λ_i在三角形e上取为$\frac{\partial u}{\partial x_i}$的线性插值函数，在$e$的三个顶点上取$\lambda_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$．

证明：这里的λ_i不是独立变量，与第二节的λ不同，不能直接用第二节的结论．事实上λ_i完全依赖于变量$\frac{\partial u}{\partial x_i}$，因此泛函$J(u,\lambda,\sigma)$实质上可看作只有两个变量$(u,\sigma)$，即

$$J(u,\lambda,\sigma)=J(u,\lambda(u),\sigma)=J'(u,\sigma) \tag{4.11}$$

但一旦作了这样的理解后，近似解空间$\hat{\mathscr{H}}_1$则不再包含在真解空间$\mathscr{H}_1$内（即$\hat{\mathscr{H}}_1\not\subseteq\mathscr{H}_1$）．因为真解空间的$\lambda$（如果规定为完全依赖于$u$的话）必须取为$\lambda=u$，即$\lambda_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$（当然只是在全部$\tau\in T$上）；而近似解空间的$\lambda_i\neq\frac{\partial u}{\partial x_i}$．因此我们需要对第三节的结果作适当的修改．

首先需要验证真解$(u,\lambda(u),\sigma)$满足泛函J在$\hat{\mathscr{H}}_1\times\hat{\mathscr{H}}_2$空间上的变分方程；第二，定理5的

条件1即椭圆型条件(3.4)不变，仍需满足；第三，定理5的条件2（即有界性条件）应改为a,b和c在空间$(\hat{\mathscr{H}}_1\oplus\mathscr{H}_1)\times\mathscr{H}_2$上满足有界性条件(3.5)，其中$\hat{\mathscr{H}}_1\oplus\mathscr{H}_1$是两个空间的直接和。如果泛函(4.11)满足以上条件，则容易按照定理5的证明步骤推出估计式(3.10)；如果(3.12)式中的"$\forall v\in\mathscr{H}_1$"改为"$\forall v\in\hat{\mathscr{H}}_1\oplus\mathscr{H}_1$"，则估计式(3.11)仍然成立。

容易直接验证真解$(u,\lambda(u),\sigma)$满足J在近似解空间$\hat{\mathscr{H}}_1\times\hat{\mathscr{H}}_2$上的变分方程。其余条件验证如下：取真解空间$u\in H^2(\Omega)$，在$\tau\in T$上取$\lambda_i=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$，$\sigma\in H^0(\Omega)$；近似解空间$\hat{u}\in H^1(\Omega)$，在每个$e\in A$上为三次插值多项式，在每个$\tau\in T$上，取$\lambda_i$为$\hat{u}$的线性插值函数，$\sigma$在每个$e\in A$上取为常数向量。定义模

$$\|(u,\lambda)\|_{\mathscr{H}_1}=\sum_{e\in A}\left\{|u|^2_{2,e}+h^{-1}\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_i\right)^2\right\}\tag{4.12}$$

及

$$|\sigma|_{\mathscr{H}_2}=\sum_{e\in A}\{\langle\sigma,\sigma\rangle_e+h\int_{\partial e}|\sigma|^2\}\tag{4.13}$$

由E的正定性及有界性推知，存在正常数α_1'及α_2'使得

$$\langle Lu,ELu\rangle_e\geqslant\alpha_1'|u|^2_{2,e}\tag{4.14}$$

及

$$\langle\sigma,E^{-1}\sigma\rangle_\Omega\geqslant\alpha_2'\langle\sigma,\sigma\rangle_\Omega\tag{4.15}$$

由有限元的多项式插值理论[6,7]有

$$\langle\sigma,\sigma\rangle_e\geqslant K_1^{-1}h\langle\sigma,\sigma\rangle_{\partial e},$$

$$2\int_{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_i\right)^2\leqslant K_2h^4\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2_{2,\partial e}\leqslant K_2K_3h\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^2_{1,e}\leqslant K_2K_3h|u|^2_{2,e}$$

其中K_1，K_2和K_3是与e及h无关的常数，故

$$\sum_{i=1}^{2}h^{-1}\int_{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_i\right)^2\leqslant K_2K_3|u|^2_{2,e}\tag{4.16}$$

从而

$$\sum_{e\in A}\langle\sigma,E^{-1}\sigma\rangle_e\geqslant\alpha_2|\sigma|^2_{\mathscr{H}_2},\quad\sum_{e\in A}\langle Lu,ELu\rangle_e\geqslant\alpha_1\|(u,\lambda)\|^2_{\mathscr{H}_1}\tag{4.17}$$

其中
$$\alpha_1=\frac{\alpha_1'}{1+K_2K_3},\quad\alpha_2=\frac{\alpha_2'}{1+K_1}$$

故J满足椭圆型条件。

在$(\hat{\mathscr{H}}\oplus\mathscr{H}_1)\times\mathscr{H}_2$上，有

$$|\langle Lu,\sigma\rangle_e|\leqslant|u|_{2,e}|\sigma|_{0,e}$$

$$\left|\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_i\right)n_j\sigma_{ij}\right|\leqslant\sqrt{h^{-1}\sum_{i=1}^{2}\int_{\partial e}\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}-\lambda_i\right)^2}\ \sqrt{h\sum_{i,j=1}^{2}\int_{\partial e}\sigma_{ij}^2}$$

再由(4.12)及(4.13)即得有界性条件. 因此有估计

$$\|(\hat{u}-u,\hat{\lambda}-\lambda\|_{\mathscr{H}_1}+|\hat{\sigma}-\sigma|_{\mathscr{H}_2}\leqslant\left(\frac{2B}{\alpha}+1\right)\left(\inf_{(\tilde{u},\tilde{\lambda})\in\mathscr{H}_1}\|(\tilde{u}-u,\tilde{\lambda}-\lambda\|_{\mathscr{H}_1}+\inf_{\tilde{\sigma}\in\mathscr{H}_2}|\tilde{\sigma}-\sigma|_{\mathscr{H}_2}\right) \tag{4.18}$$

其中 B 和 α 是只依靠于Ω 的常数.

为了得到L_2 估计, 我们在空间$w\in\mathring{H}^2(\Omega)$及$z\in H^0(\Omega)$上求广义解

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\langle Lw,ELv\rangle_\Omega+\frac{1}{2}\langle Lv,z\rangle_\Omega=\langle f,v\rangle_\Omega && \forall v\in\mathring{H}^2(\Omega)\\&\langle Lw,\gamma\rangle_\Omega-\langle z,E^{-1}\gamma\rangle_\Omega=0 && \forall\gamma\in H^0(\Omega)\end{aligned}\right\} \tag{4.19}$$

其中$\mathring{H}^2(\Omega)$是$H^2(\Omega)$的子空间, 它的任何元素 v 在 Γ_u 上满足齐次边值条件 $v=\frac{\partial v}{\partial n}=0$. 由椭圆型微分方程的理论我们知道(4.19)存在唯一的解(w,z), 并且如果 Ω 是凸多角形区域, 则有估计[10]

$$\|w\|_{3,\Omega}\leqslant K_4\|f\|_{-1,\Omega} \tag{4.20}$$

其中K_4是一个依赖于 Ω 的常数.

如果(w,z)是(4.19)解, 在 $\tau\in T$ 上取$\mu_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}$ $(i=1,2)$, $\mu=(\mu_1,\mu_2)^T$. 则这样得到的 (w,μ,z) 满足变分方程

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{e\in A}\left\{\frac{1}{2}\langle Lw,ELv\rangle_e+\frac{1}{2}\langle Lv,z\rangle_e-\int_{\partial e}\left(\frac{\partial v}{\partial x_i}-q_i\right)z_{ij}n_j\right\}\\&\quad=\langle f,v\rangle_\Omega\qquad\forall(v,q)\in\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_1\\&\sum_{e\in A}\left\{\frac{1}{2}\langle z,E^{-1}\gamma\rangle_e-\frac{1}{2}\langle Lw,\gamma\rangle_e+\int_{\partial e}\left(\frac{\partial w}{\partial x_i}-\mu_i\right)\gamma_{ij}n_j\right\}\\&\quad=0\qquad\forall\gamma\in\mathscr{H}_2\end{aligned}\right\} \tag{4.21}$$

其中, $\gamma_{12}=\gamma_{21}$, $z_{12}=z_{21}$. 因此定理 6 的估计式(3.11)仍然有效, 即有

$$\begin{aligned}\langle f,u-\hat{u}\rangle_\Omega&\leqslant B\Big(\inf_{(\tilde{u},\tilde{\lambda})\in\mathscr{H}_1}\|(w-\tilde{w},\mu-\tilde{\mu})\|_{\mathscr{H}_1}\\&\quad+\inf_{\tilde{\sigma}\in\mathscr{H}_2}|z-\tilde{z}|_{\mathscr{H}_2}\Big)\left(\|(u-\tilde{u},\lambda-\tilde{\lambda})\|_{\mathscr{H}_1}+|\sigma-\tilde{\sigma}|_{\mathscr{H}_2}\right)\\&\leqslant K_5Bh\|w\|_{3,\Omega}\ h\|u\|_{3,\Omega}\\&\leqslant K_5K_4Bh^2\|u\|_{3,\Omega}\|f\|_{-1,\Omega}\end{aligned}$$

由此得

$$\|u-\hat{u}\|_{1,\Omega}=\sup_f\frac{\langle f,u-\hat{u}\rangle_\Omega}{\|f\|_{-1,\Omega}}\leqslant Kh^2\|u\|_{3,\Omega}$$

其中$K=K_5K_4B$. 由此式及(4.18)式即得(4.10)式.

五、单刚$\max\limits_\sigma \tilde{J}_e(u,\lambda,\sigma)$ 的计算

本节讨论如何从 (4.9) 式 $\tilde{J}_e(u,\lambda,\sigma)$ 计算单元 e 的刚度矩阵 $\max\limits_\sigma\tilde{J}_e(u,\lambda,\sigma)$. 求

$\max\limits_{\sigma} \mathfrak{I}_e(u,\lambda,e)$ 得

$$\langle\bar{\sigma},E^{-1}\sigma\rangle_e=2\left\langle\bar{\sigma}_{ij},\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_j}\right\rangle_e-\langle\bar{\sigma},Lu\rangle_e \qquad \forall\bar{\sigma} \tag{5.1}$$

其中 $\bar{\sigma}$ 取为任意常数向量，由此得

$$\sigma=\frac{1}{|e|}ER \tag{5.2}$$

其中 $|e|$ 为 e 的面积，列向量 $R=(R_{11},R_{22},2R_{12})^T$ 的分量

$$R_{ij}=\iint_e\left(2\frac{\partial\lambda_i}{\partial x_j}-\frac{\partial^2u}{\partial x_i\partial x_j}\right) \tag{5.3}$$

由(5.2)得到的 σ 代回单元应变能表达式 $\mathfrak{I}_e(u,\lambda,\sigma)$ 即得单刚表达式

$$\mathfrak{I}_e(u,\lambda,\sigma)=\frac{1}{4}\langle Lu,ELu\rangle_e+\frac{1}{4|e|}R^TER \tag{5.4}$$

其中

$$R^TER=\beta[R_{11}^2+R_{22}^2+2\nu R_{11}R_{22}+2(1-\nu)R_{12}^2] \tag{5.5}$$

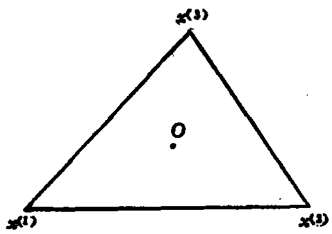

图 1

如果坐标原点选在三角形 e 的重心上 $\left(\text{即}\sum\limits_{j=1}^{3}x^{(j)}=0\right.$，其中 $x^{(j)}$ $(j=1,2,3)$ 为三角形三个顶点的坐标$\Big)$，则 R_{ij} 有简单的计算公式如下

$$\left.\begin{aligned}R_{ii}&=-2|e|c_i+\mathrm{sign}(D)\sum_{k=1}^{3}\xi_i^{(k)}\frac{\partial u(x^{(k)})}{\partial x_i}\qquad(i=1,2)\\ R_{12}&=-|e|c_{12}+\frac{\mathrm{sign}(D)}{2}\sum_{k=1}^{3}\left(\xi_1^{(k)}\frac{\partial u(x^{(k)})}{\partial x_2}+\xi_2^{(k)}\frac{\partial u(x^{(k)})}{\partial x_1}\right)\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

其中行列式

$$D=\begin{vmatrix}1&1&1\\ x_1^{(1)}&x_1^{(2)}&x_1^{(3)}\\ x_2^{(1)}&x_2^{(2)}&x_2^{(3)}\end{vmatrix},\quad \mathrm{sign}(D)=\begin{cases}1, & D>0\\ -1, & D<0\end{cases}$$

$$\xi_1^{(1)}=x_2^{(2)}-x_2^{(3)},\quad \xi_1^{(2)}=x_2^{(3)}-x_2^{(1)},\quad \xi_1^{(3)}=x_2^{(1)}-x_2^{(2)}$$

$$\xi_2^{(1)}=x_1^{(3)}-x_1^{(2)},\quad \xi_2^{(2)}=x_1^{(1)}-x_1^{(3)},\quad \xi_2^{(3)}=x_1^{(2)}-x_1^{(1)}$$

$x_i^{(j)}$ $(i=1,2)$ 为 $x^{(j)}$ 节点的第 i 个分量坐标.

$$\langle Lu,ELu\rangle=\iint_e\beta\left[\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2u}{\partial x_1^2}\cdot\frac{\partial^2u}{\partial x_2^2}+2(1-\nu)\left(\frac{\partial^2u}{\partial x_1\partial x_2}\right)^2\right]$$

c_1, c_2 和 c_{12} 是三次插值函数

$$u(x_1,x_2)=a_0+b_1x_1+b_2x_2+c_1x_1^2+c_2x_2^2+c_{12}x_1x_2+d_1x_1^3+d_2x_2^3+d_{12}x_1^2x_2+d_{21}x_1x_2^2$$

的二阶项系数.

结论．由(5.4)式看出，第一项乘2就是旧的九自由度三角形单刚公式，用$\frac{1}{4}\ \frac{R^TER}{|e|}$代替旧单刚中的$\frac{1}{4}\langle Lu,ELu\rangle_e$便得到本文的单刚公式．由(5.6)式看出，$R^TER$的计算是很简单的，故新单刚比旧单刚增加的计算量及程序量甚少；其余的计算及程序（如等效节点力的计算，代数方程组的求解等等）新与旧是完全一样的．但我们知道旧的三角形单元一般是不收敛的，而新的三角形单元是收敛的，并且如果Ω区域存在角点的话（这是最实用的情形）则其收敛阶是不可改进的（因为这时真解u至多只属于$H^3(\Omega)$[10]），即不可能有更高的收敛阶单元（包括五次多项式的协调元）．

参 考 文 献

[1] Babuska, I. and M. Zl'amal, Nonconforming elements in finite element method with penalty, *SIAM J. Numer Anal.* 10, 5(1973).

[2] 冯康．论间断有限元的理论．计算数学，1，4(1979)．

[3] Fix, G. J., G. Liang and D. N. Lee, Penalty-hybrid finite element method (to be published in *Math. and Comp. with Appl.*).

[4] Brezzi, F., On the existence, uniqueness and approximation of saddle point problems arising from Lagrangian multipliers, *RAIRO Numer. Anal.*, 8R2 (1974).

[5] Oden, J. T. and J. N. Reddy, *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, Springer-Verlag, Heidelberg(1976).

[6] Ciarlet, P., *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North Holland Publisher (1979).

[7] Oden, J. T. and J. N. Reddy, *Mathematical Theory of Finite Elements*, John Wiley & Sons, New York (1975).

[8] Treves, F., *Basic Linear Partial Differential Equations*, Academic Press, New York (1975).

[9] 梁国平、傅子智，有限元法中大单元的构造，应用数学和力学．4，3 (1983)

[10] Kondratev, V. A., Boundary value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, *Trudy Moskov Mat OBSC.*, 16(1967), 209—292

Mixed Hybrid Penalty Finite Element Method and Its Applications

Liang Guo-ping
(*Institute of Mathematics, Academia Sinica, Beijing*)

Fu Zi-zhi
(*Beijing Petroleum Design Institute, Beijing*)

Abstract

Penalty and hybrid are the two methods being much used in dealing with general incompatible element With the penalty method convergence can always be assured, but comparatively speaking, its accuracy is lower, condition number and sparsity are not so good With the hybrid method, convergence can be assured only when rank condition is satisfied. So the construction of the element is extremely limited. This paper presents the mixed hybrid penalty element method, which combines the two methods together And it is proved theoretically that this new method is convergent, and it has the same accuracy, condition number and sparsity with the compatible element That is to say, they are optimal.

Finally, a new triangle element for plate bending with nine degrees of freedom are constructed with this method (three degrees of freedom are given on each corner——one displacement and two rotations), the calculating formula of the element stiffness matrix is almost the same with that of the old triangle element for plate bending with nine degrees of freedom. But it is converged to true solution with arbitrary irregular triangle subdivision. If the true solution $u\in H^3$, with this method, the linear and quadratic rates of convergence are obtained for three bending moments and for the displacement and two rotations respectively.