应用数学和力学编委会编
四川科学技术出版社出版

在集中荷载作用下角支矩形板的弯曲*

林　鹏　程

（福州大学，1982年10月17日收到）

摘　　要

本文引用广义简支边的概念并应用迭加法，解有一集中力作用在角支矩形板的中线上任一点的弯曲问题。给出数值例子。

一、引　　言

矩形板在四角顶被支承的弯曲问题，张福范教授在[1]中研究了在板的平面内均布荷载的情形。本文我们考虑有一集中力作用在板的中线 $x=a/2$ 上任一点 $(a/2,\ \eta)$ 的情形，此时问题归结为：

在板的边界内，挠度 w 须满足偏微分方程

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}=\frac{P\delta(x-a/2,y-\eta)}{D}$$

其中：D 为板的抗弯刚度，

$$\delta(x-a/2,\ y-\eta)=\delta(x-a/2)\delta(y-\eta)$$

δ 为 Dirac 函数，并满足边界条件：

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=0,\qquad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial x\partial y^2}\right]_{\substack{x=0\\x=a}}=0 \tag{1.2}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{\substack{y=0\\y=b}}=0,\qquad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}+(2-\mu)\frac{\partial^3 w}{\partial y\partial x^2}\right]_{\substack{y=0\\y=b}}=0 \tag{1.3}$$

引用广义简支边的概念并应用迭加法来解此问题。

二、迭 加 的 组 成 部 分

(A) 一四边简支的矩形板，有一集中力作用在板的中线 $x=a/2$ 上的任一点 $(a/2,\eta)$ 上，此时板的弯曲面方程为[5]：

---

* 张福范推荐。

$$w_1=\frac{Pa^2}{D\pi^3}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{\sinh\frac{\alpha_m\eta}{b}\sinh\frac{\alpha_m y_1}{b}}{m^3\sinh\alpha_m}\Big(1+\alpha_m\coth\alpha_m-\frac{\alpha_m y_1}{b}\coth\frac{\alpha_m y_1}{b}$$

$$-\frac{\alpha_m\eta}{b}\coth\frac{\alpha_m\eta}{b}\Big)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{m\pi}{2} \tag{2.1}$$

其中 $\alpha_m=\frac{m\pi b}{a}$，$y_1=b-y$且$y\geqslant\eta$．如果$y<\eta$，则表达式(2.1)中的$y_1$应当用$y$代替，而量$\eta$应当用$b-\eta$代替．因此

$$(V_y)_{y=0}=\frac{P}{a}\sum_{m=1,3,\cdots}\left[2+(1-\mu)\alpha_m\coth\alpha_m-(1-\mu)\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}\coth\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}\right]$$

$$\cdot\frac{\sinh\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}}{\sinh\alpha_m}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.2}$$

$$(V_y)_{y=b}=-\frac{P}{a}\sum_{m=1,3,\cdots}\left[2+(1-\mu)\alpha_m\coth\alpha_m-(1-\mu)\frac{\alpha_m\eta}{b}\coth\frac{\alpha_m\eta}{b}\right]$$

$$\cdot\frac{\sinh\frac{\alpha_m\eta}{b}}{\sinh\alpha_m}\sin\frac{m\pi}{2}\sin\frac{m\pi x}{a} \tag{2.3}$$

板的弯曲面也可表示为

$$w_1=\frac{Pb^2}{2D\pi^3}\sum_{i=1}\frac{\sin\frac{i\pi\eta}{b}}{i^3\cosh\frac{\beta_i}{2}}\left[\sinh\frac{i\pi x}{b}+\frac{\beta_i}{2}\tanh\frac{\beta_i}{2}\sinh\frac{i\pi x}{b}-\frac{i\pi x}{b}\cosh\frac{i\pi x}{b}\right]\sin\frac{i\pi y}{b}$$

$$\tag{2.1'}$$

其中$\beta_i=i\pi a/b$．这弯曲面方程只适用于$x\leqslant a/2$．但由于对称，我们也可用这方程计算另一半板的挠度与内力分量弯矩等．

$$(V_x)_{x=a}=-\frac{P}{2b}\sum_{i=1}\frac{2+(1-\mu)\frac{\beta_i}{2}\tanh\frac{\beta_i}{2}}{\cosh\frac{\beta_i}{2}}\sin\frac{i\pi\eta}{b}\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{2.4}$$

(B)　设矩形板的$y=0$，$y=b$边为简支边，而$x=0$，$x=a$这两边为广义简支边，沿边$x=0$，$x=a$的挠度为：

$$(w)_{\substack{x=0\\x=a}}=\sum_{i=1}b_i\sin\frac{i\pi y}{b}$$

此时板的弯曲面为：

$$w_2=\frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1}b_i\left\{\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left[\left(\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}-\frac{2}{1-\mu}\right)\sinh\frac{i\pi x}{b}+\frac{i\pi x}{b}\cosh\frac{i\pi x}{b}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{2}{1-\mu}\cosh\frac{i\pi x}{b}-\frac{i\pi x}{b}\sinh\frac{i\pi x}{b}\right\}\sin\frac{i\pi y}{b} \tag{2.5}$$

$$(V_y)_{y=0}=D\frac{4(1-\mu)^2\pi^2}{b^3}\sum_{m=1,3,\cdots}\sum_{i=1}\frac{m^3b_i}{i\left(\frac{m^2}{i^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\tag{2.6}$$

$$(V_y)_{y=b}=D\frac{4(1-\mu)^2\pi^2}{b^3}\sum_{m=1,3,\cdots}\sum_{i=1}\frac{m^3b_i}{i\left(\frac{m^2}{i^2}+\frac{a^2}{b^2}\right)^2}\cos i\pi\sin\frac{m\pi x}{a}\tag{2.7}$$

$$(V_x)_{x=a}=D\frac{(1-\mu)^2}{2}\cdot\frac{\pi^3}{b^3}\sum_{i=1}i^3b_i\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right)\sin\frac{i\pi y}{b}\tag{2.8}$$

(C) 设矩形板的$y=0$边为广义简支边，其他三边为简支边，沿$y=0$这边的挠度为：

$$(w)_{y=0}=\sum_{m=1,3,\cdots}c_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

此时板的弯曲面为：

$$w_3=\sum_{m=1,3,\cdots}c_m\Big[\Big(-\frac{1-\mu}{2}\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}-\coth\alpha_m\Big)\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{1-\mu}{2}\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}$$
$$+\cosh\frac{m\pi y}{a}+\frac{1-\mu}{2}\coth\alpha_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\Big]\sin\frac{m\pi x}{a}\tag{2.9}$$

$$(V_y)_{y=0}=-D\frac{(1-\mu)^2\pi^3}{2a^3}\sum_{m=1,3,\cdots}m^3c_m\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\tag{2.10}$$

$$(V_y)_{y=b}=-D\frac{(1-\mu)^2\pi^3}{2a^3}\sum_{m=1,3,\cdots}m^3c_m\frac{1}{\sinh\alpha_m}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\tag{2.11}$$

$$(V_x)_{x=a}=2D\frac{(1-\mu)^2\pi^2}{a^3}\sum_{m=1,3,\cdots}\sum_{i=1}\frac{i^3c_m\cos m\pi}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\sin\frac{i\pi y}{b}\tag{2.12}$$

(D) 设矩形板的$y=b$边为广义简支边，其他三边为简支边，沿$y=b$这边的挠度为：

$$(w)_{y=b}=\sum_{m=1,3,\cdots}a_m\sin\frac{m\pi x}{a}$$

此时板的弯曲面为

$$w_4=\frac{1-\mu}{2}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{a_m}{\sinh\alpha_m}\left\{\left(\frac{2}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sinh\frac{m\pi y}{a}-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\tag{2.13}$$

$$(V_y)_{y=0}=\frac{D}{2}\frac{(1-\mu)^2\pi^3}{a^3}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{m^3a_m}{\sinh\alpha_m}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\tag{2.14}$$

$$(V_y)_{y=b}=\frac{D}{2}\frac{(1-\mu)^2\pi^3}{a^3}\sum_{m=1,3,\cdots}m^3a_m\left(\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}+\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\tag{2.15}$$

$$(V_x)_{x=a}=D(1-\mu)^2\frac{2\pi^2}{a^3}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{a_m}{m}\sum_{i=1}\frac{i^3\cos i\pi}{\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}\sin\frac{i\pi y}{b}\tag{2.16}$$

三、用叠加法解角支矩形板的弯曲

为了满足沿自由边$y=0$的剪力为零，叠加算式(2.2)，(2.6)，(2.10)，(2.14)，并令它们之和为零，于是得到：

$$\frac{a_m}{\sinh\alpha_m}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)-c_m\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)+\frac{8}{\pi}\frac{a^3}{b^3}\sum_{i=1}\frac{b_i}{i\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}$$

$$=-\frac{2Pa^2}{D(1-\mu)^2\pi^3m^3}\left[2+(1-\mu)\alpha_m\coth\alpha_m\right.$$

$$\left.-(1-\mu)\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}\coth\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}\right]\frac{\sinh\frac{\alpha_m(b-\eta)}{b}}{\sinh\alpha_m}\sin\frac{m\pi}{2}$$

$$(m=1,\ 3,\ 5,\ \cdots)\qquad(3.1)$$

为了满足沿自由边$y=b$的剪力为零，叠加算式(2.3)，(2.7)，(2.11)，(2.15)，并令其和为零，于是得到：

$$a_m\left(\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}+\frac{3+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m\right)-\frac{c_m}{\sinh\alpha_m}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)$$

$$+\frac{8}{\pi}\frac{a^3}{b^3}\sum_{i=1}\frac{b_i\cos i\pi}{i\left(\frac{a^2}{b^2}+\frac{m^2}{i^2}\right)^2}=\frac{2Pa^2}{D(1-\mu)^2\pi^3m^3}\left[2+(1-\mu)\alpha_m\coth\alpha_m\right.$$

$$\left.-(1-\mu)\frac{\alpha_m\eta}{b}\coth\frac{\alpha_m\eta}{b}\right]\frac{\sinh\frac{\alpha_m\eta}{b}}{\sinh\alpha_m}\sin\frac{m\pi}{2}\qquad(m=1,3,5,\cdots)\qquad(3.2)$$

为了满足沿自由边 $x=a$ 的剪力为零，叠加算式(2.4)，(2.8)，(2.12)，(2.16)，并令它们之和为零，于是得到：

$$\cos i\pi\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{a_m}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}-\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{c_m}{m\left(\frac{b^2}{a^2}+\frac{i^2}{m^2}\right)^2}$$

$$+\frac{\pi}{4}\frac{a^3}{b^3}b_i\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{3+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right)=\frac{Pa^3}{Db}\cdot\frac{1}{4(1-\mu)^2\pi^2i^3}$$

$$\cdot\frac{2+(1-\mu)\frac{\beta_i}{2}\tanh\frac{\beta_i}{2}}{\cosh\frac{\beta_i}{2}}\sin\frac{i\pi\eta}{b}\qquad(i=1,2,3,\cdots)\qquad(3.3)$$

由于对称，对$x=0$边将得到一相同的方程组．这样，我们就得到三个无穷的联立方程组(3.1)～(3.3)，于是就可以解出未知数a_m，b_i，c_m，从而可求得板的角顶的支承反力R．

$$(R)_{\substack{x=a\\y=b}}=2D(1-\mu)\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{\partial^2w_k}{\partial x\partial y}\right)_{\substack{x=a\\y=b}}=(1-\mu)P\left\{-\frac{a}{2b}\sum_{i=1}\sin\frac{i\pi\eta}{b}\frac{\tanh\frac{\beta_i}{2}}{\cosh\frac{\beta_i}{2}}\cos i\pi\right.$$

$$-(1-\mu)\pi^2\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{m^2a_mD}{Pa^2}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)$$

$$+(1-\mu)\pi^2\sum_{i=1}\frac{i^2b_iD}{Pb^2}\cos i\pi\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right)$$

$$+(1-\mu)\pi^2\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{m^2c_mD}{Pa^2\sinh\alpha_m}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\Bigg] \tag{3.4}$$

$$(R)_{\substack{x=a\\y=0}}=-(1-\mu)P\left\{-\frac{a}{2b}\sum_{i=1}\sin\frac{i\pi\eta}{b}\frac{\tanh\frac{\beta_i}{2}}{\cosh\frac{\beta_i}{2}}+(1-\mu)\pi^2\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{m^2c_mD}{Pa^2}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\coth\alpha_m\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}\right)+(1-\mu)\pi^2\sum_{i=1}\frac{i^2b_iD}{Pb^2}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}-\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right)\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}$$

$$-(1-\mu)\pi^2\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{m^2a_mD}{Pa^2\sinh\alpha_m}\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right) \tag{3.5}$$

四、数 值 例 子

现在考虑一四角顶被支承的正方形板，此时，$a=b$，取$\mu=0.2$，集中力作用在$(a/2,\ \eta)$处，a_m，b_i，c_m 各取15个未知量．下面列出由电子计算机解方程组(3.1)～(3.3)的计算结果，只写出当$\eta=\frac{5}{8}a$时，a_m，b_i，c_m的数值$\left(\text{单位：}\frac{Pa^2}{D}\right)$，其他$\eta$值的结果由于篇幅关系从略。

a_m:	0.277694,	0.317469×10^{-3},	0.304467×10^{-3},	0.767920×10^{-4},
	0.310705×10^{-4},	0.146644×10^{-4},	0.784079×10^{-5},	0.456923×10^{-5},
	0.284164×10^{-5},	0.185914×10^{-5},	0.126681×10^{-5},	0.892535×10^{-6},
	0.646686×10^{-6},	0.479841×10^{-6},	0.363417×10^{-6}.	
b_i:	0.211757,	-0.551836×10^{-2},	0.134071×10^{-2},	-0.480649×10^{-4},
	0.236966×10^{-3},	-0.215312×10^{-4},	0.689022×10^{-4},	-0.695765×10^{-5},
	0.269786×10^{-4},	-0.298451×10^{-5},	0.127662×10^{-4},	-0.150084×10^{-5},
	0.684174×10^{-5},	-0.840724×10^{-6},	0.400673×10^{-5}.	
c_m:	0.181183,	0.110052×10^{-2},	0.196854×10^{-3},	0.559947×10^{-4},
	0.219179×10^{-4},	0.103370×10^{-4},	0.551517×10^{-5},	0.321193×10^{-5},
	0.199717×10^{-5},	0.130669×10^{-5},	0.890523×10^{-6},	0.627558×10^{-6},
	0.454803×10^{-6},	0.337541×10^{-6},	0.255699×10^{-6}.	

计算表明，a_m,c_m收敛较快；b_i收敛较慢．当$\eta=\frac{5}{8}a$时，a_{29}为a_1的1.31×10^{-6},c_{29}为c_1的1.41×10^{-6}，b_{15}为b_1的1.89×10^{-5}；$\eta=\frac{3}{4}a$时，a_{29}为a_1的1.10×10^{-6}，c_{29}为c_1的1.34×10^{-6}，

b_{15} 为b_1 的2.17×10^{-5}; $\eta=\frac{7}{8}a$ 时, a_{29} 为a_1的0.79×10^{-6}. c_{29}为 c_1的 1.17×10^{-6},b_{15} 为b_1 的 2.82×10^{-5}. 由此可见, 当 η 从$\frac{5}{8}a$增长到$\frac{7}{8}a$时, a_m, c_m 的收敛速度随着增长; 而 b_i 的收敛速度却越来越减慢.

下面计算板的各点的挠度. 把a_m, b_i, c_m 的值代入挠度公式(2.5), (2.9),(2.13),并与(2.1)′相加, 得到:

$$
\begin{aligned}
w=\sum_{k=1}^{4} w_k=&\frac{Pb^2}{2D\pi^3}\sum_{i=1}\frac{\sin\frac{i\pi\eta}{b}}{i^3\cosh\frac{\beta_i}{2}}\left[\sinh\frac{i\pi x}{b}+\frac{\beta_i}{2}\tanh\frac{\beta_i}{2}\sinh\frac{i\pi x}{b}\right.\\
&\left.-\frac{i\pi x}{b}\cosh\frac{i\pi x}{b}\right]\sin\frac{i\pi y}{b}+\frac{1-\mu}{2}\sum_{i=1}b_i\left\{\frac{\cosh\beta_i-1}{\sinh\beta_i}\left[\left(\frac{\beta_i}{\sinh\beta_i}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.-\frac{2}{1-\mu}\right)\sinh\frac{i\pi x}{b}+\frac{i\pi x}{b}\cosh\frac{i\pi x}{b}\right]+\frac{2}{1-\mu}\cosh\frac{i\pi x}{b}\\
&\left.-\frac{i\pi x}{b}\sinh\frac{i\pi x}{b}\right\}\sin\frac{i\pi y}{b}+\sum_{m=1,3,\cdots}c_m\left[\left(-\frac{1-\mu}{2}\frac{\alpha_m}{\sinh^2\alpha_m}-\coth\alpha_m\right)\sinh\frac{m\pi y}{a}\right.\\
&\left.-\frac{1-\mu}{2}\frac{m\pi y}{a}\sinh\frac{m\pi y}{a}+\cosh\frac{m\pi y}{a}+\frac{1-\mu}{2}\coth\alpha_m\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\\
&+\frac{1-\mu}{2}\sum_{m=1,3,\cdots}\frac{a_m}{\sinh\alpha_m}\left\{\left(\frac{2}{1-\mu}+\alpha_m\coth\alpha_m\right)\sinh\frac{m\pi y}{a}\right.\\
&\left.-\frac{m\pi y}{a}\cosh\frac{m\pi y}{a}\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}
\end{aligned}
$$

表1～表4列出当 $\eta=\frac{1}{2}a,\frac{5}{8}a,\frac{3}{4}a,\frac{7}{8}a$ 时板的几个点的挠度值. 从这几个表格可以看出, 在中线$x=a/2$上, 当$\eta=\frac{5}{8}a$时,$y=0$, $0.125a$, $0.25a$ 这三点的挠度系位于一直线上; 当$\eta=\frac{3}{4}a$时,$y=0$, $0.125a$, $0.25a$,$0.375a$这四点的挠度几乎在一直线上; 当$\eta=\frac{7}{8}a$时,$y=0$,$0.125a$, $0.25a$,$0.375a$,$0.5a$ 这五点的挠度几乎在一直线上. 且当 $\eta=\frac{1}{2}a,\frac{5}{8}a,\frac{3}{4}a,\frac{7}{8}a$时最大挠度分别发生在$\left(\frac{a}{2},\ \frac{a}{2}\right)$, $\left(\frac{a}{2},\ \frac{5}{8}a\right)$, $\left(\frac{a}{2},\ \frac{3}{4}a\right)$, $\left(\frac{a}{2},\ a\right)$处, 其最大挠度值分别为$0.402137\times10^{-1}\frac{Pa^2}{D}$, $0.394152\times10^{-1}\frac{Pa^2}{D}$, $0.383045\times10^{-1}\frac{Pa^2}{D}$, $0.435084\times10^{-1}\frac{Pa^2}{D}$.

表 1　　$\eta=\frac{1}{2}a$ 时正方板的各点挠度表$\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	0.125a	0.25a	0.375a	0.5a
0	0	0.883951×10^{-1}	0.161657×10^{-1}	0.210061×10^{-1}	0.227008×10^{-1}
0.125a		0.160806×10^{-1}	0.223982×10^{-1}	0.267239×10^{-1}	0.282686×10^{-1}
0.25a			0.281029×10^{-1}	0.322074×10^{-1}	0.337283×10^{-1}
0.375a				0.364325×10^{-1}	0.381376×10^{-1}
0.5a					0.402137×10^{-1}

表 2　　$\eta=\frac{5}{8}a$ 时正方板的各点挠度表$\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	0.125a	0.25a	0.375a	0.5a
0	0	0.714656×10^{-2}	0.130434×10^{-1}	0.169136×10^{-1}	0.182620×10^{-1}
0.125a	0.795662×10^{-2}	0.139607×10^{-1}	0.191538×10^{-1}	0.226656×10^{-1}	0.239072×10^{-1}
0.25a	0.146904×10^{-1}	0.200790×10^{-1}	0.249234×10^{-1}	0.283132×10^{-1}	0.295369×10^{-1}
0.375a	0.193735×10^{-1}	0.246450×10^{-1}	0.296668×10^{-1}	0.331667×10^{-1}	0.345120×10^{-1}
0.5a	0.213384×10^{-1}	0.269256×10^{-1}	0.323006×10^{-1}	0.364559×10^{-1}	0.381365×10^{-1}
0.625a	0.201573×10^{-1}	0.264152×10^{-1}	0.324407×10^{-1}	0.372211×10^{-1}	0.394152×10^{-1}
0.75a	0.158047×10^{-1}	0.230753×10^{-1}	0.298278×10^{-1}	0.348814×10^{-1}	0.368728×10^{-1}
0.875a	0.875932×10^{-2}	0.174999×10^{-1}	0.252201×10^{-1}	0.306265×10^{-1}	0.325987×10^{-1}
a	0	0.108239×10^{-1}	0.198908×10^{-1}	0.259719×10^{-1}	0.281257×10^{-1}

表 3　　$\eta=\frac{3}{4}a$ 时的正方板的各点挠度表$\left(单位：\frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	0.125a	0.25a	0.375a	0.5a
0	0	0.570560×10^{-2}	0.104140×10^{-1}	0.135001×10^{-1}	0.145738×10^{-1}
0.125a	0.633333×10^{-2}	0.113487×10^{-1}	0.156619×10^{-1}	0.185602×10^{-1}	0.195806×10^{-1}
0.25a	0.117589×10^{-1}	0.165336×10^{-1}	0.207559×10^{-1}	0.236590×10^{-1}	0.246941×10^{-1}
0.375a	0.156631×10^{-1}	0.206640×10^{-1}	0.251919×10^{-1}	0.283810×10^{-1}	0.295368×10^{-1}
0.5a	0.175070×10^{-1}	0.232047×10^{-1}	0.284726×10^{-1}	0.323006×10^{-1}	0.337275×10^{-1}
0.625a	0.168493×10^{-1}	0.236997×10^{-1}	0.301126×10^{-1}	0.349536×10^{-1}	0.368735×10^{-1}
0.75a	0.134763×10^{-1}	0.219088×10^{-1}	0.297261×10^{-1}	0.356932×10^{-1}	0.383045×10^{-1}
0.875a	0.759460×10^{-2}	0.180743×10^{-1}	0.274521×10^{-1}	0.342490×10^{-1}	0.368686×10^{-1}
a	0	0.131291×10^{-1}	0.243372×10^{-1}	0.320780×10^{-1}	0.348924×10^{-1}

其次，计算板边各点的弯矩值。$y=a$边和$y=0$边的弯矩M_x分别为

$$(M_x)_{y=a}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=a}=(1-\mu^2)\frac{D}{a^2}\sum_{m=1,3,\cdots} m^2 a_m \sin\frac{m\pi x}{a}$$

$$(M_x)_{y=0}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{y=0}=(1-\mu^2)\frac{D}{a^2}\sum_{m=1,3,\cdots} m^2 c_m \sin\frac{m\pi x}{a}$$

而板边$x=0$或$x=a$的M_y为

$$(M_y)_{\substack{x=0\\x=a}}=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{\substack{x=0\\x=a}}=(1-\mu^2)\frac{D}{a^2}\sum_{i=1} i^2 b_i \sin\frac{i\pi y}{a}$$

表 4 $\eta=\frac{7}{8}a$ 时的正方板的各点挠度表$\left(单位: \frac{Pa^2}{D}\right)$

y \ x	0	$0.125a$	$0.25a$	$0.375a$	$0.5a$
0	0	0.447342×10^{-2}	0.818053×10^{-2}	0.106171×10^{-1}	0.114669×10^{-1}
$0.125a$	0.422850×10^{-2}	0.847040×10^{-2}	0.121035×10^{-1}	0.145380×10^{-1}	0.153936×10^{-1}
$0.25a$	0.786328×10^{-2}	0.122476×10^{-1}	0.160664×10^{-1}	0.186615×10^{-1}	0.195805×10^{-1}
$0.375a$	0.105293×10^{-1}	0.154784×10^{-1}	0.198390×10^{-1}	0.228372×10^{-1}	0.239071×10^{-1}
$0.5a$	0.118847×10^{-1}	0.178721×10^{-1}	0.232046×10^{-1}	0.269255×10^{-1}	0.282681×10^{-1}
$0.625a$	0.116071×10^{-1}	0.191609×10^{-1}	0.259623×10^{-1}	0.308125×10^{-1}	0.326005×10^{-1}
$0.75a$	0.945680×10^{-2}	0.191416×10^{-1}	0.279216×10^{-1}	0.343655×10^{-1}	0.368595×10^{-1}
$0.875a$	0.542902×10^{-2}	0.178289×10^{-1}	0.289860×10^{-1}	0.372775×10^{-1}	0.407504×10^{-1}
a	0	0.157470×10^{-1}	0.295596×10^{-1}	0.396032×10^{-1}	0.435084×10^{-1}

表5～7列出沿边$y=a$，$y=0$，$x=0$或$x=a$的几个点的弯矩值。

表 5 沿边$x=0$或$x=a$的几个点的弯矩M_y（单位P）

η \ x	0	$0.25a$	$0.5a$	$0.75a$	a
$\frac{1}{2}a$	0	0.154190	0.210482	0.154190	0
$\frac{5}{8}a$	0	0.126184	0.195008	0.167333	0
$\frac{3}{4}a$	0	0.933397×10^{-1}	0.154451	0.156568	0
$\frac{7}{8}a$	0	0.592948×10^{-1}	0.100363	0.117179	0

表 6 沿边$y=0$的几个点的弯矩值M_x（单位P）

η \ x	0	$0.125a$	$0.25a$	$0.375a$	$0.5a$
$\frac{1}{2}a$	0	0.947664×10^{-1}	0.154190	0.195530	0.211000
$\frac{5}{8}a$	0	0.784533×10^{-1}	0.125876	0.156674	0.167625
$\frac{3}{4}a$	0	0.626187×10^{-1}	0.100829	0.125012	0.133423
$\frac{7}{8}a$	0	0.480437×10^{-1}	0.789946×10^{-1}	0.986695×10^{-1}	0.105486

表 7 沿边$y=b$的几个点的弯矩值M_x（单位P）

η \ x	0	$0.125a$	$0.25a$	$0.375a$	$0.5a$
$\frac{1}{2}a$	0	0.947664×10^{-1}	0.154190	0.195530	0.211000
$\frac{5}{8}a$	0	0.109478	0.184657	0.244357	0.269109
$\frac{3}{4}a$	0	0.118675	0.212891	0.306369	0.354821
$\frac{7}{8}a$	0	0.118383	0.228457	0.375678	0.509089

由表5～表7可以看出，板边的最大弯矩均发生在 $y=a$ 边的中点处，其最大弯矩值分别为 $0.210509P$，$0.269109P$，$0.354821P$，$0.509089P$.

表8列出当 $\eta=\frac{a}{2}$ 时，板中心，板边中点的挠度值以及板边中点弯矩值对照，前三列为石钟慈[3]按样条有限元法用4×4、8×8、16×16网格的计算结果，第四列为本文按上述级数取15项解析解的计算结果．从表8中可以看出，我们的结果与［3］的结果非常接近且更精确。

表 8　本文解析解与样条有限元计算对照表$\left(\eta=\frac{a}{2}\right)$

	4×4	8×8	16×16	本文解析解
板中心挠度	0.040058 $\frac{Pa^2}{D}$	0.040176	0.040208	0.0402137
板边中心挠度	0.022705 $\frac{Pa^2}{D}$	0.022701	0.022701	0.0227008
板边中点弯矩	0.22139 P	0.21354	0.21150	0.0211000

作为校核，我们计算了角顶的支承反力，把 a_m，b_i，c_m 的值代入公式(3.4)，(3.5)进行计算，再相加并乘以2，即得支承反力总和，计算结果列于表9.

由表9误差及进一步计算（取多于15项）表明，a_m，b_i，c_m 各取15个未知量已经足够.

表 9　角顶支承反力总和及其误差

η	ΣR	误　差
$\frac{1}{2}a$	−0.95446	4.55%
$\frac{5}{8}a$	−0.94186	5.81%
$\frac{3}{4}a$	−0.94562	5.44%
$\frac{7}{8}a$	−0.95350	4.65%

参 考 文 献

［1］张福范．矩形板在角顶被支承的问题．清华大学学报．9，5(1962)．

［2］张福范．在不连续荷载作用下的悬臂矩形板的弯曲．应用数学和力学．2,4(1981)．

［3］石钟慈．样条有限元．计算数学．1，1(1979)．

［4］张福范．《弹性薄板》．科学出版社．(1964)．

［5］S.铁摩辛柯，S.沃诺斯基．《板壳理论》．中译本，科学出版社．(1977)．

Bending of Corner-Supported Rectangular Plate under Concentrated Load

Lin Peng-cheng

(Fuzhou University, Fujian)

Abstract

In this paper the solution for the bending of corner-supported rectangular plate under concentrated load at any point$(a/2,\ \eta)$ of the middle line of the plate is given by means of a conception called modified simply supported edges and the method of superposition. Some numerical examples are presented. The solution obtained by this method checks very nicely with what was obtained by C. T. Shih[3] by means of spline finite element method when $\eta=a/2$. This shows that this method of solution is satisfactory.