

混合型裂纹的疲劳扩展*

曹桂馨 琚定一

(华东化工学院, 1983年4月15日收到)

摘 要

本文对受单向拉伸疲劳载荷的中心斜裂纹L3铝试板进行了研究。根据 Erdogan 和 Sih 的最大拉应力理论, 推导出以 ΔK 作为参变量, 以裂纹角 β_0 进行修正的 Paris 形式的扩展速率表达式。并且进一步论证以更简单的用裂纹长度在 x 轴上投影的 Paris 方程来表示。初始裂纹角 β_0 有 20° 、 30° 、 45° 、 60° 、 80° 、 90° 等各种角度, 裂纹尖端有经预制疲劳裂纹尖端与未经预制疲劳裂纹尖端两种情况, 比较了这两种情况下疲劳扩展轨迹及疲劳扩展速率。

符 号 与 名 称

K_I ——张开型应力强度因子	a_x ——斜裂纹半长投影到 x 轴上的长度
K_{II} ——滑移型应力强度因子	ΔS ——应变能密度因子幅度
K_{III} ——撕开型应力强度因子	μ ——剪切模量
ΔK ——应力强度因子幅度	ν ——波桑比
Δk ——Sih 方程中的应力强度因子幅度	β ——裂纹角
ΔK_x ——投影到 x 轴上长度的应力强度因子幅度	β_0 ——初始裂纹角
ΔK_{th} ——应力强度因子幅度阈值	a_{ij} ——应变能密度因子方程式中的各变量
$\Delta\sigma$ ——应力幅度	Δa ——裂纹增量
θ_0 ——断裂角	da/dN ——裂纹扩展速率
γ ——裂纹轨迹上一点的方向与水平方向的夹角	C, m ——Paris 方程中的常数
a ——斜裂纹半长	da_x/dN ——在 x 轴方向的裂纹扩展速率
	$f(\beta_0)$ ——与裂纹角有关的函数

一、前 言

线弹性断裂力学已日益广泛应用到工程问题。对于 I 型裂纹, 即裂纹垂直于加载方向的情况, 断裂的准则是 $K_I \geq K_{Ic}$, 而疲劳扩展速率通常用 Paris 方程表示, 即 $da/dN = C(\Delta K_I)^{m(1)}$ 。只要应力强度因子幅度 ΔK_I 大于阈值 ΔK_{th} , 裂纹便沿着原裂纹面方向扩

* 钱伟长推荐。

展。I型问题是研究得比较成熟的问题。但实际的裂纹往往处于与加载方向成一角度的情况，是I型裂纹与II型裂纹的组合，如图1所示斜裂纹情况；也有些情况是I型、II型、III型的组合。处理混合型裂纹的断裂准则，必须解决两个问题。首先是裂纹将沿哪个方向扩展，其次是在什么条件下开始扩展。Erdogan和Sih的最大拉应力理论^[2]认为，裂纹将在垂直于最大拉应力 σ_0 的方向 θ_0 平面内扩展，并且当 σ_0 的最大值达到临界值时，裂纹开始失稳扩展。这个理论经过许多实验证实有一定正确性。但对于斜裂纹情况，当初始裂纹角 β_0 较小时，实验结果与最大拉应力理论不符。近年来，Sih提出一种基于局部应变能密度场的断裂概念^[3]。他以应变能密度因子 S 作为基本参量，认为裂纹将沿着应变能密度因子最小的方向开始扩展，并且当应变能密度因子 S 达到临界值 S_0 时，裂纹开始扩展。

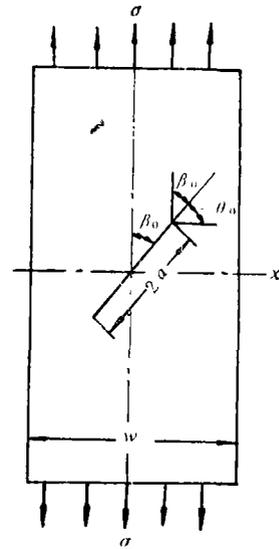


图1 斜裂纹的扩展

关于混合型裂纹的疲劳扩展问题，由于扩展后的裂纹形状为不规则裂纹，裂纹尖端的应力强度因子难以知道。这方面的工作进行得较少。Iida和Kobayashi^[4]曾用有限元法计算斜裂纹扩展后的应力强度因子，指出了 K_{II} 的存在对扩展速率产生的影响。即使只有很小的 K_{II} 值，也将显著增加裂纹扩展速率。Sih和Barthelemy^[5]等人以当量斜裂纹来代表扩展中的裂纹，用 ΔS 作为基本参量来描述斜裂纹的扩展速率，预测了斜裂纹扩展轨迹与疲劳寿命。最近，Patel和Pandey^[6]提出一个计算混合型裂纹疲劳扩展速率的方法，他们把静态加载的Sih应变能密度因子和I型裂纹循环加载的Paris方程联系起来考虑，得到扩展速率方程为

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{4\pi\mu}{1-2\nu} \Delta S \right)^{m/2}$$

式中 $\Delta S = a_{11}(\Delta k_I)^2 + 2a_{12}(\Delta k_I)(\Delta k_{II}) + a_{22}(\Delta k_{II})^2 + a_{33}(\Delta k_{III})^2$ ， Δk_I ， Δk_{II} ， Δk_{III} 分别相当于I型，II型和III型的应力强度因子幅度。其定义为

$$\Delta k_I = \frac{\Delta K_I}{\sqrt{\pi}}, \quad \Delta k_{II} = \frac{\Delta K_{II}}{\sqrt{\pi}}, \quad \Delta k_{III} = \frac{\Delta K_{III}}{\sqrt{\pi}}$$

$$\text{而 } a_{11} = \left(\frac{1}{16\mu} \right) [(3-4\nu - \cos \theta)(1 + \cos \theta)], \quad a_{12} = \left(\frac{1}{16\mu} \right) \{2 \sin \theta [\cos \theta - (1-2\nu)]\}$$

$$a_{22} = \left(\frac{1}{16\mu} \right) [4(1-\nu)(1 - \cos \theta) + (1 + \cos \theta)(3 \cos \theta - 1)], \quad a_{33} = \frac{1}{4\mu}$$

对于斜裂纹的疲劳扩展，应力强度因子幅度的表达式为

$$\Delta K_I = \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta_0, \quad \Delta K_{II} = \Delta \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta_0 \cos \beta_0$$

所以扩展速率方程可写成

$$\frac{da}{dN} = C \left(\frac{4\pi\mu}{1-2\nu} \right)^{m/2} [\Delta \sigma^2 a (a_{11} \sin^2 \beta_0 + 2a_{12} \sin \beta_0 \cos \beta_0 + a_{22} \cos^2 \beta_0) \sin^2 \beta_0]^{m/2}$$

Patel和Pandey以此式作为斜裂纹的疲劳扩展速率表达式，并编制出一个以设计应力和初始裂纹角为函数的计算机程序，计算循环寿命和裂纹在不断扩展过程中的扩展速率。认为计算结果与实验观察相一致。

此式虽是一个明确的表示速率的数学方程式，但方程式还比较繁复，手算更需化费大量时间。我们试图用最大拉应力理论来建立一个速率表达式，并在此基础上，把裂纹投影到 x 轴，以找到一个简单的计算方法。

二、斜裂纹的疲劳扩展速率

裂纹尖端附近区域应力的极分量为 (图 2)

$$\sigma_{\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I(1 + \cos \theta) - 3K_{II} \sin \theta] \quad (2.1a)$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} [K_I \sin \theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1)] \quad (2.1b)$$

根据 Erdogan 和 Sih 的最大拉应力理论提出的假设，裂纹将在 θ_0 方向开始开裂。由式 (2.1a) 对 θ 求导，并令 $\partial\sigma_{\theta}/\partial\theta=0$ ，可确定最大 σ_{θ} 所在的方位角 θ_0 ， θ_0 称为断裂角。断裂角方程为

$$K_I \sin \theta_0 + K_{II}(3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (2.2)$$

对如图 1 所示斜裂纹，以应力强度因子值

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} \sin^2 \beta_0 \quad (2.3a)$$

$$K_{II} = \sigma \sqrt{\pi a} \sin \beta_0 \cos \beta_0 \quad (2.3b)$$

代入式 (2.2) 得

$$\sin \theta_0 + (3 \cos \theta_0 - 1) \operatorname{ctg} \beta_0 = 0 \quad (2.4)$$

经三角函数变换，得到以显函数形式的断裂角方程

$$\operatorname{tg} \frac{\theta_0}{2} = \frac{\operatorname{tg} \beta_0 - \sqrt{\operatorname{tg}^2 \beta_0 - 8}}{2}$$

将 $\theta = \theta_0$ 代入式 (2.1a)，得到开裂面上的应力为

$$\begin{aligned} \sigma_{\theta_0} &= \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta_0}{2} [K_I(1 + \cos \theta_0) - 3K_{II} \sin \theta_0] \\ \therefore K_e &= \sigma_{\theta_0} \cdot (2\pi r)^{1/2} \end{aligned}$$

则相应的应力强度因子为

$$K_e = \frac{1}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} [K_I(1 + \cos \theta_0) - 3K_{II} \sin \theta_0] \quad (2.5)$$

由于裂纹扩展方向在 $\sigma_{\theta} = \sigma_{\theta_0}$ 的裂纹面上，所以可用 Paris 方程式。因此，斜裂纹的疲劳扩展速率可表示为

$$da/dN = C_{\theta} (\Delta K_e)^{m_{\theta}} \quad (2.6)$$

以式 (2.5) 代入，并以 ΔK 代替 K ，得：

$$da/dN = C_{\theta} \left\{ \frac{1}{2} \cos \frac{\theta_0}{2} [\Delta K_I(1 + \cos \theta_0) - 3\Delta K_{II} \sin \theta_0] \right\}^{m_{\theta}} \quad (2.7)$$

常数 C_{θ} 及 m_{θ} 用下述方法求取。当 $\beta_0 = 90^\circ$ 时， $\theta_0 = 0$ ，那么式 (2.7) 成为

$$da/dN = C_0 (\Delta K_I)^{m_0}$$

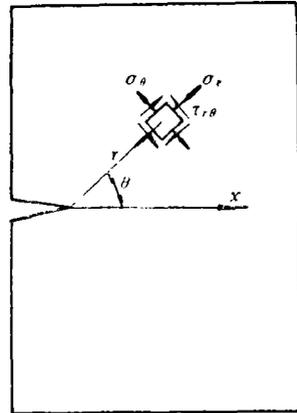


图2 裂纹尖端应力的极分量

此式即为 Paris 方程, 于是可知

$$C_\theta = C \text{ 和 } m_\theta = m \tag{2.8}$$

式中 C 与 m 为 Paris 方程中两个决定于材料的常数。

对于受单轴向拉伸循环载荷的贯穿斜裂纹

$$\Delta K_I = \Delta K_I \text{ctg } \beta$$

以断裂角方程式 (2.4) 代入, 得

$$\Delta K_I = - \Delta K_I \frac{\sin \theta_0}{3 \cos \theta_0 - 1} \tag{2.9}$$

将式(2.8)、式(2.9)代入式(2.7), 并经简化后得到修正的 Paris 方程:

$$da/dN = C[f(\beta_0)\Delta K_x]^m \tag{2.10}$$

式中

$$f(\beta_0) = \sin^{3/2} \beta_0 \frac{\cos \theta_0 + 1}{3 \cos \theta_0 - 1} \cdot \cos \frac{\theta_0}{2} \tag{2.11}$$

$$\Delta K_x = \Delta \sigma \sqrt{\pi a_x} \tag{2.12}$$

$$a_x = a \sin \beta_0 \tag{2.13}$$

式(2.10)的意义是, 斜裂纹的疲劳扩展速率可用修正的 Paris 方程来表示。 ΔK_x 为裂纹长度投影到垂直于加载方向 x 轴时的应力强度因子幅度, $f(\beta_0)$ 是裂纹角 β_0 的函数。此式为无限宽板时的速率表达式, 对于有限宽板, 计算 K_I 和 K_{II} 值时 均需乘以板宽修正系数。为简单易用起见, 就我们所定的式 (2.10) 意义, 对式 (2.12) 进行宽度修正, 修正系数可见文献 [7], 则

$$\Delta K_x = \Delta \sigma \sqrt{\pi a_x} f\left(\frac{a_x}{W}\right) \tag{2.12}'$$

式中 W 为板宽。

三、计 算 方 法

1. 利用修正的 Paris 方程 (2.10) 进行计算

式(2.10)中材料常数 C 及 m 由实验测定, 测定方法可参考有关文献 [8], [9]。 β_0 与 θ_0 间相互关系由式(2.4) 给出, 绘成曲线如图3。通过式(2.11)的计算以得到 $f(\beta_0)$, 计算结果绘成曲线, 示于图3。

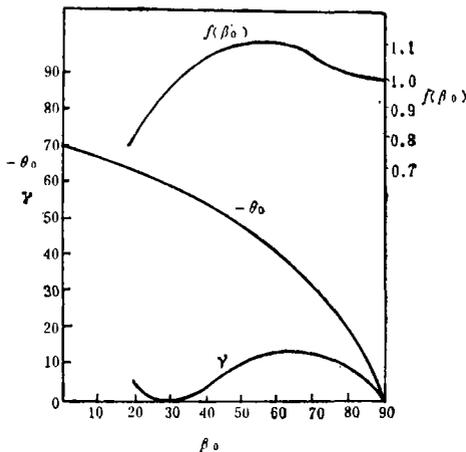


图3 θ_0 , $f(\beta_0)$, γ 与 β_0 的关系

由于裂纹不断扩展, 扩展后形成不规则裂纹形状, 一般常用当量斜裂纹代表, 如文献 [5], [6] 所做的那样。经扩展 Δa_1 后, 相应的裂纹角成为 β_1 , 裂纹长度成为 a_1 。裂纹角 β 与裂纹长度 a 在扩展前后的关系由图 4 几何图形得到。

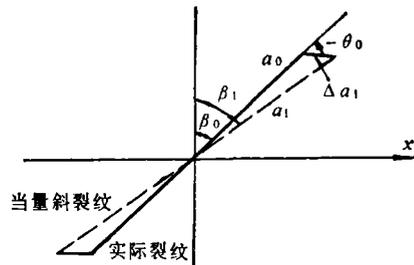


图4 裂纹扩展前后的几何关系

$$\beta_1 = \beta_0 + \frac{\Delta a_1 \sin \theta_0}{a_0 + \Delta a_1 \cos \theta_0}$$

及

$$a_1 = a_0 + \frac{\Delta a_1 + a_0 \cos \theta_0}{a_0 + \Delta a_1 \cos \theta_0} \Delta a_1$$

根据已知初始裂纹角 β_0 ，由式(2.4)得到断裂角 θ_0 。再确定一个微小扩展量 Δa_1 值，可按上式求得扩展后的 β_1 与 a_1 值。然后再确定一个微小量 Δa_2 ，求得 β_2 与 a_2 值。依次而确定不同 β 角时的裂纹半长 a ，从而预测疲劳扩展轨迹，如图5。这样也就知道扩展至任一点时， a ， β 与 a_0 ， β_0 之间的关系。代入式(2.10)就可得到该点的速率。如果速率以 x 方向的长度表示，则需将式(2.10)乘以 $\cos \gamma$ 。 γ 为 β 角与 θ_0 角二角绝对值之和与 90° 角的差角，即

$$\gamma = 90^\circ - (|\beta| + |\theta_0|) \quad (3.1)$$

其值描绘于图3中。那么，裂纹在 x 方向的速率表达式为

$$da_x/dN = C \{f(\beta_0) \cdot \Delta K_x\}^m \cdot \cos \gamma \quad (3.2)$$

2. 利用投影法进行计算

由图3，认为 $f(\beta_0) = 1$ 及 $\cos \gamma = 1$ ，则式(3.2)成为

$$da_x/dN = C (\Delta K_x)^m \quad (3.3)$$

此式的意义为斜裂纹在 x 轴方向的扩展速率，可用裂纹在 x 轴上的投影长度的Paris方程来表示。

在本文中，将以式(3.2)与式(3.3)两种表达式进行计算，以预测裂纹扩展速率，并用实验结果与之比较。

四、实验结果与预测值比较

实验用材料为L3铝板，其化学成分与机械性能如下：含硅0.17%，含铁0.22%，含铜0.015%；抗拉强度 $\sigma_b = 11.1 \text{ kg/mm}^2$ ，伸长率 $\delta_5 = 10.3\%$ 。

采用中心贯穿斜裂纹试样，初始裂纹角为 20° ， 30° ， 45° ， 60° ， 80° ， 90° 各种角度。初始裂纹角为 90° 的试样是作为测试材料常数 C ， m 之用。

裂纹分预制疲劳裂纹与未经预制疲劳裂纹两种，以观察二者的扩展轨迹及扩展速率有何区别。预制疲劳裂纹的试样分两步制成，如图6所示。先按实线试样进行制疲，然后按虚线位置切割成斜裂纹试样。

试验机为红山试验机厂生产的10吨电磁共振式高频疲劳试验机，产生本试验交变载荷的频率约为每秒157次。裂纹的扩展长度由长春光学仪器厂生产的JXD-2型30倍读数显微镜读出。

1. 裂纹轨迹比较

通过上述计算式可预测裂纹的疲劳扩展轨迹，而实际轨迹由试板直接观察。一般，实际

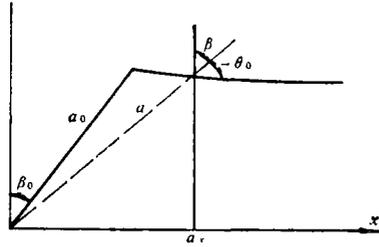


图5 疲劳扩展轨迹的预测

轨迹更趋水平, 如图 7. 当斜裂纹经预制疲劳而使尖端很尖锐时, 发现裂纹先沿初始裂纹方向扩展一定距离(本试验中这个距离约为 1mm 左右, β_0 角小时, 距离要大些), 然后逐渐折向趋于水平方向, 如图 7b. Otsuka 等人也观察到这种现象^[10].

2. 裂纹扩展速率比较

裂纹扩展速率分别由式 (3.2) 式 (3.3) 预测.

首先按文献[8]或[9]的方法测得 Paris 方程中的材料常数 C 与 m . 如图 8, 把实验点子用最小二乘方法回归成一直线, 该直线的斜率即为 m , 直线的截距即为 C . 经计算, 得到 $C=5.80 \times 10^{-10}$, $m=3.07$.

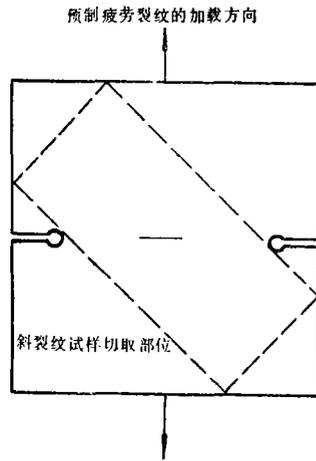


图 6 斜裂纹试板的制取

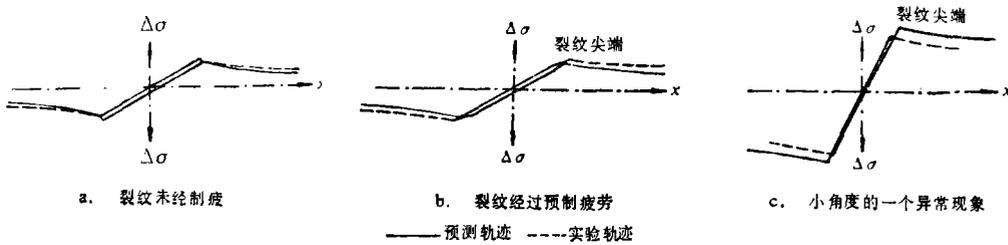


图 7 轨迹比较

随着裂纹扩展的过程, 把不同角度 β_0 , 不同 a_x 时的预测扩展速率绘成曲线, 而实测的数值用点子标绘. 图 9 为已产生预制疲劳裂纹后的疲劳扩展情况, 包括初始裂纹角 β_0 为 $20^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ 五种角度. 图 10 为线切割裂纹直接进行试验的情况, 包括 β_0 为 $45^\circ, 60^\circ, 80^\circ$ 三种角度. 图中实线为用式 (3.3) 即投影法描绘的曲线, 而虚线为用式 (3.2) 即修正的 Paris 方程描绘的曲线.

五、讨 论

疲劳扩展后的轨迹如图 7 所示, 无论是经制疲裂纹或未经制疲裂纹, 裂纹扩展方向总是力争向垂直于加载方向扩展. 因此, 在不要求精确轨迹时, 不妨假定裂纹沿 x 方向扩展. 在试验中, 产生一个异常现象, 在一块经制疲的 $\beta_0=20^\circ$ 试样, 裂纹并不在尖端扩展, 而是在线切割端点趋向水平扩展, 见图 7c, 估计是由于在制疲时, 这里已萌生出一条微裂纹的缘故.

混合型裂纹的静态断裂准则给出了裂纹的断裂角, 一般认为, 较小裂纹角的断裂准则与实验结果不符. 小角度裂纹角的疲劳试验由于制疲困难及可能产生上述异常现象, 因此较难进行. 本文虽对小角度的裂纹角 ($\beta_0=20^\circ, 30^\circ$) 作了实验, 但从图 9 可以看出, 两种计算方法均与实验结果有很大误差. 在 $\beta>30^\circ$ 的各种情况, 两种计算方法均与实验结果有较好的吻合. 至于两种计算方法间的比较, 利用修正的 Paris 方程式 (3.2) 计算的结果比利用投影法式 (3.3) 计算的结果, 在数值上要稍大些. 就计算方法的简繁而言, 后者方法要简易得多.

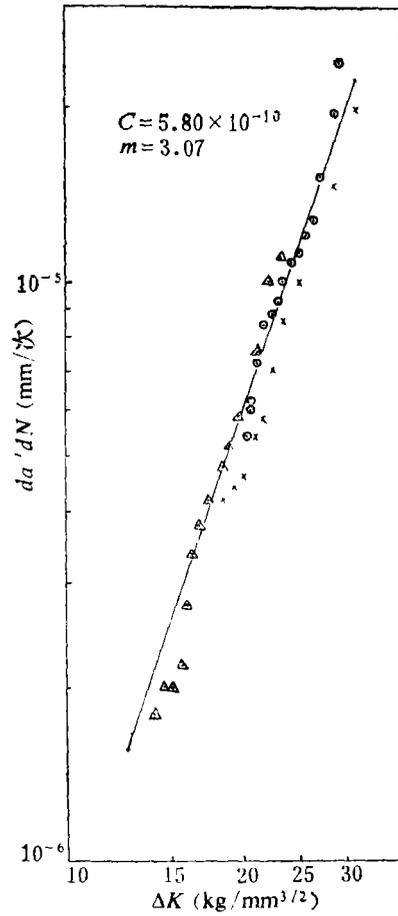


图8 L3铝板的 Paris 方程

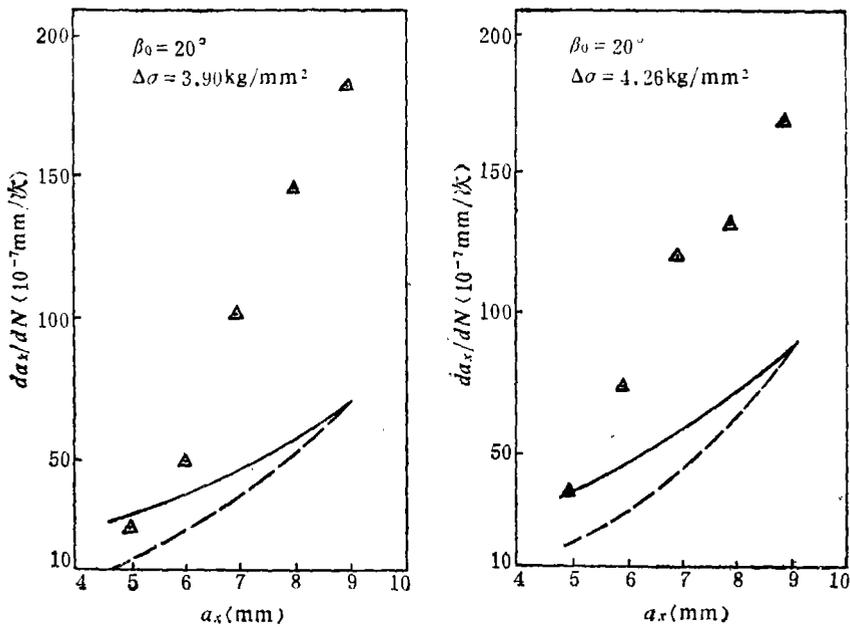


图9 (a)

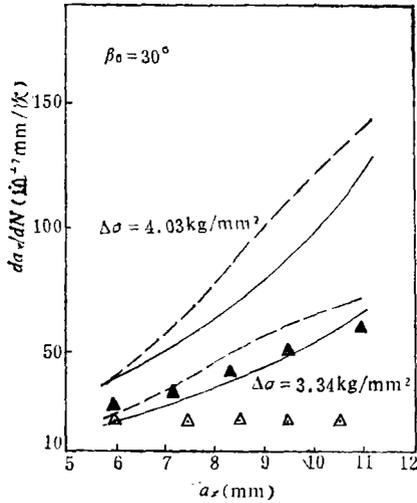


图 9 (b)

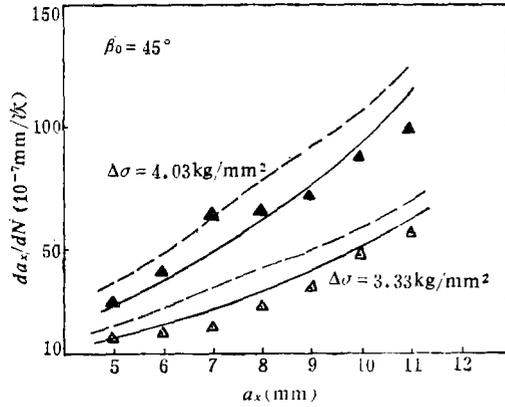


图 9 (c)

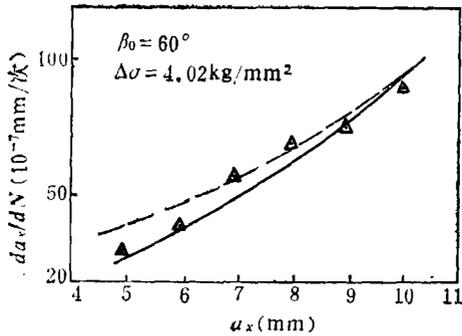


图 9 (d)

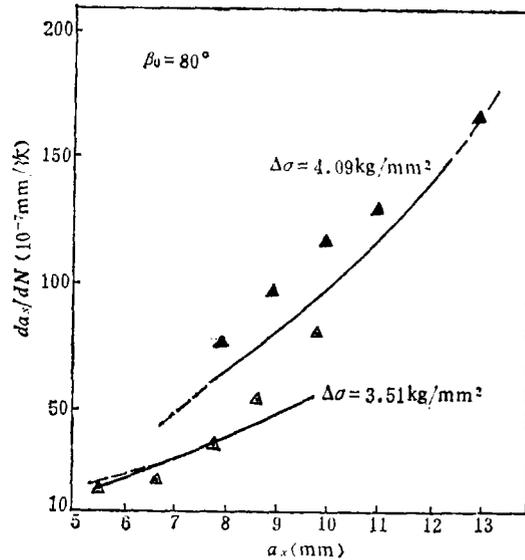


图 9 (e)

图 9 经制疲后裂纹的扩展速率

▲△实验数据 — 投影法, 式(3.3) ——修正的Paris方程, 式(3.2)

裂纹尖端的尖锐程度, 即线切割后未经制疲或是线切割后经制疲, 对疲劳裂纹扩展速率的影响, 由图10可知, 如果避开初始裂纹尖端附近区域, 那么, 裂纹尖端的形状对扩展速率没有影响, 仍可用这两种方法计算. 而对初始扩展速率的影响, 有待于进一步研究.

本文粗略地对受单轴向拉伸疲劳载荷的斜裂纹试板进行裂纹扩展的探讨, 但由于混合型裂纹的试验数据比较分散, 而且本文的试验数据也较少, 因此尚需更多的试验研究以证实本文方法的可靠性.

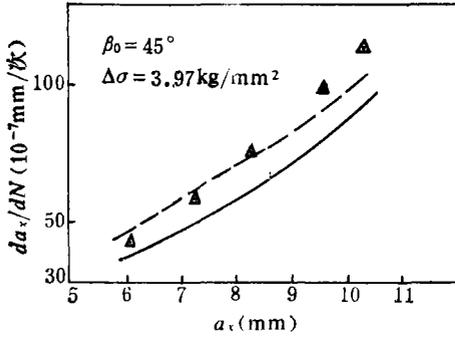


图10 (a)

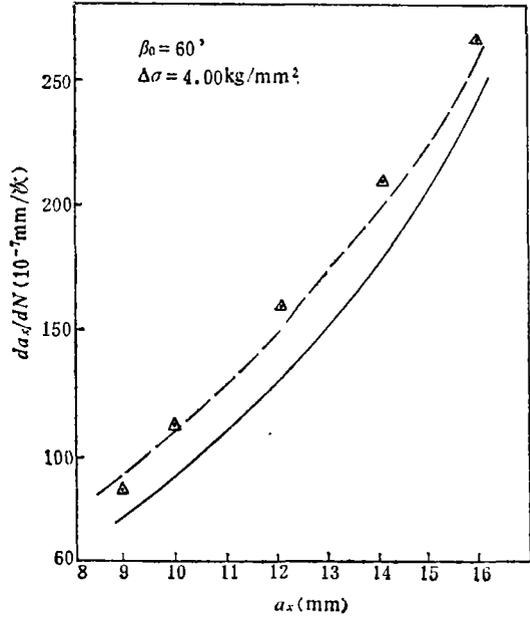


图10 (b)

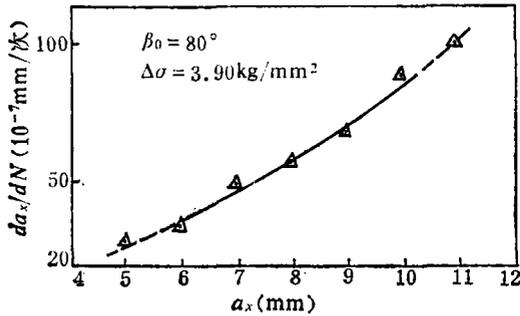


图10 (c)

图10 裂纹未经制疲的扩展速率

△实验数据； ——投影法，式(3.3)； ——修正的Paris方法，式(3.2)

六、结 论

1. 单轴向加载的斜裂纹疲劳扩展轨迹，在有限宽板时，认为是趋向于水平方向扩展。
2. 单轴向加载的斜裂纹疲劳扩展速率，在初始裂纹角 $\beta_0 > 30^\circ$ 时，用下式进行计算

$$da_x/dN = C(\Delta K_x)^m$$

3. 裂纹尖端的尖锐程度，只对初始扩展轨迹及初始扩展速率产生影响，对以后的扩展速率不产生影响。

谢启：参加本文试验工作的还有华东工学院化工机械专业1982年应届毕业生江世祥，左大经，马根林三人，特此致谢。

参 考 文 献

- [1] Paris, P. C. and F. Erdogan, A critical analysis of crack propagation laws, *J. Basic Eng.*, **85**(1963), 528—534.
- [2] Erdogan, F. and G. C. Sih, On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *J. Basic Eng.*, **85**(1963), 519—527.
- [3] Sih, G. C., Strain energy density factor applied to mixed mode crack problems, *Int. J. Fract.*, **10**(1974), 305—322.
- [4] Iida, S. and A. S. Kobayashi, Crack propagation rate in 7075-T6 plates under cyclic tensile and transverse shear loadings, *J. Basic Eng.*, **91**(1969), 764—769.
- [5] Sih, G. C. and B. M. Barthelemy, Mixed mode fatigue crack growth predictions, *Eng. Fract. Meth.*, **13**(1980), 439—451.
- [6] Patel, A. B. and R. K. Pandey, Fatigue crack growth under mixed mode loading, *Fatigue of Eng. Materials and Structures*, **4**(1981), 65—77.
- [7] 中国航空研究院主编, 《应力强度因子手册》, 科学出版社(1981), 128—129.
- [8] 褚武扬等编著, 《断裂韧性测试》, 第三章, 科学出版社(1979).
- [9] Proposed Method of Test for Fatigue Crack Growth Rates above 10^{-8} in/cycle, ASTM E647—78T(译文, 机械强度, No11(下)1980.1).
- [10] Otsuka, A., K. Mori and T. Miyata, The condition of fatigue crack growth in mixed mode condition, *Eng. Fract. Mech.*, **7**(1975), 429—439.

Fatigue Crack Propagation under Mixed Mode Loading

Cao Gui-xin Ju Ding-yi

*(Department of Mechanical Engineering, East China**Institute of Chemical Technology, Shanghai)*

Abstract

Mixed mode fatigue crack propagation is analyzed in this paper, using a center cracked plate geometry, loaded under uni-axial cyclic tension. Based on maximum principal stress criterion, a modified Paris expression of fatigue crack growth rate is derived in terms of ΔK and crack angle β_0 for an inclined crack. It is also shown that it is more convenient to express the Paris equation by means of crack length projected on the x -axis, a_x , rather than the actual length, a , itself. The crack trajectory due to cyclic loading is predicted. β_0 is varied from 20° to 90° . Experimental data on Type L3 aluminium agree fairly well with predicted values when β_0 exceeds 30° .