

论修正的 Castigliano 定理*

付宝连

(东北重型机械学院, 1983年3月23日收到)

摘 要

本文给出了修正的 Castigliano 定理, 与经典的 Castigliano 定理相比较, 修正的 Castigliano 定理应用方便而且广泛。

对经典 Castigliano 定理的修正是在两个方面, 第一个修正是在外载荷与影响函数乘积的表达式代替经典 Castigliano 定理中余能密度对集中力偏导数的表达式, 这一修正为我们在复杂载荷作用下的计算带来极大的简便; 第二个修正是在经典 Castigliano 定理中引入了非齐次边界位移与影响函数乘积的表达式, 这一修正为求解复杂边界条件的问题提供了理论基础。

我们还说明了如何应用修正的 Castigliano 定理求解表面结构力学问题的方法。

最后, 作为修正的 Castigliano 定理的应用算例, 我们求解了两邻边固定另两邻边自由的矩形板的挠曲面方程。

一、引 言

最小势能原理与最小余能原理是变形体力学中的两个重要原理, 它们在求解变形体力学问题中发挥着巨大的作用。然而, 一般来说, 迄今为止最小余能原理还不如最小势能原理应用方便和广泛。为推广最小余能原理的应用, 我们提出修正的 Castigliano 定理。

自从 Alberto Castigliano 在 1873 年发现 Castigliano 定理以来, 为求解梁一类构件的挠度曾给出下述几个定理:

1. 经典 Castigliano 定理

$$\Delta = \int_0^l \frac{\partial}{\partial P} \left[\frac{1}{2EJ} M^2(x) \right] dx \quad (1.1)$$

2. Maxwell-Mohr 定理

$$\Delta = \int_0^l \frac{1}{EJ} M(x) M_1(x) dx \quad (1.2)$$

3. 部分修正的 Castigliano 定理^[5]

$$\Delta(\xi) = \int_0^l \frac{1}{EJ} M(x) M_1(x, \xi) dx + \left[\frac{d\bar{w}}{dx} M_1 - \bar{w} Q_1 \right]_{0, \xi}^l \quad (1.3)$$

* 钱伟长推荐。

比较(1.1)、(1.2)和(1.3)可以看出, 定理(1.1)是最基本的, 定理(1.2)是从定理(1.1)导出的, 而定理(1.3)是从定理(1.2)导出的.

由于单位虚载荷的概念被引入定理(1.2)中, 梁的弯矩对集中力 P 的偏导数就具有明瞭的力学意义, 于是定理(1.2)能用于求解梁的任意一点的挠度.

经典 Castigliano 定理曾在两方面被部分修正^[5], 一方面, 在定理(1.2)中单位虚载荷的作用点被看成一流动变量; 另一方面, 非齐次边界位移被引入定理(1.1)中, 于是得到了定理(1.3). 定理(1.3)是直梁挠曲轴的一般方程.

以前, 经典 Castigliano 定理或 Maxwell-Mohr 定理只用于求解像梁一类构件的挠度, 在论文[5]中, 我们推广定理(1.3)的概念到弹性薄板, 于是平板部分修正的 Castigliano 定理被给出如下的形式

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \iint_{\Omega} [M_x M_{x_1} + M_y M_{y_1} - \nu(M_x M_{y_1} + M_y M_{x_1}) \\ & + 2(1+\nu) M_{xy} M_{xy_1}]_{(x, y; \xi, \eta)} dx dy - \int_{c_w} \left(Q_{n_1} + \frac{\partial M_{n_1}}{\partial s} \right)_{(\xi, \eta)} \bar{w} ds \\ & + \int_{c_a} M_{n_1} \bar{\varphi}_{n_1(\xi, \eta)} ds + \sum_{k=1}^n \mathcal{A}(M_{n_1})_{k(\xi, \eta)} \bar{w}_k \end{aligned} \quad (1.4)$$

对于矩形弹性板, 我们得到了

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b [M_x M_{x_1} + M_y M_{y_1} - \nu(M_x M_{y_1} + M_y M_{x_1}) \\ & + 2(1+\nu) M_{xy} M_{xy_1}]_{(x, y; \xi, \eta)} dx dy + \left[\int_0^b M_{x_1} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} \right) dy \right]_{0, \xi, \eta}^a \\ & + \left[\int_0^a M_{y_1} \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} \right) dx \right]_{0, \xi, \eta}^b - \left[\int_0^b \left(\frac{\partial M_{x_1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right) \bar{w} dy \right]_{0, \xi, \eta}^a \\ & - \left[\int_0^a \left(\frac{\partial M_{y_1}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial x} \right) \bar{w} dx \right]_{0, \xi, \eta}^b + [(2M_{xy_1}) \bar{w}]_{0, \xi, \eta}^{a, b} - [(2M_{xy_1}) \bar{w}]_{0, \xi, \eta}^{a, 0} \end{aligned} \quad (1.5)$$

在论文[5]中, 我们曾给出部分修正的 Castigliano 定理的上述方程(1.3), (1.4)和(1.5), 而在下面我们将给出完全修正的 Castigliano 定理.

二、对经典 Castigliano 定理的两个修正和它们的应用

1. 第一个修正

在式(1.4)和(1.5)中余能密度对集中力 P 偏导数的表达式或实际内力矩与由单位集中力所引起的内力矩乘积的表达式应该修正, 这是由于它是迂回的和繁琐的.

为说明这一判断, 让我们应用式(1.5)去求解如图 1(a)所示, 在均布载荷作用下简支矩形板的挠曲面方程. 在这种情况下, 式(1.5)成为

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = & \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b [M_x M_{x_1} + M_y M_{y_1} - \nu(M_x M_{y_1} + M_y M_{x_1}) \\ & + 2(1+\nu) M_{xy} M_{xy_1}]_{(x, y; \xi, \eta)} dx dy \end{aligned} \quad (2.1)$$

我们假设, 如图 1(b)所示, 在 (ξ, η) 点作用一单位集中载荷的同一简支矩形板的内弯矩和扭矩可用最小余能原理求出, 并且它们分别用 $M_{x_1}(x, y; \xi, \eta)$, $M_{y_1}(x, y; \xi, \eta)$ 和 $M_{xy_1}(x,$

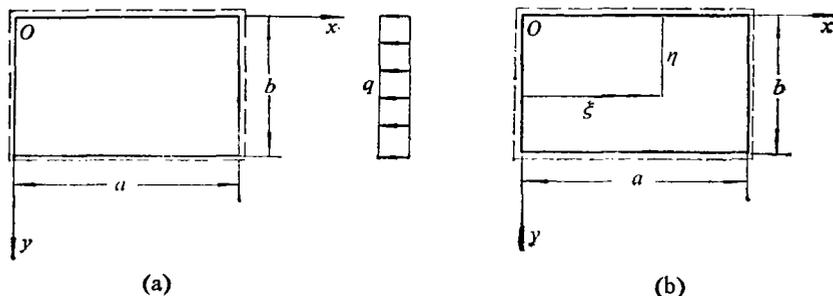


图 1

$y; \xi, \eta)$ 来表示. 我们还可用同一方法求得在均布载荷作用下简支矩形板的内矩 $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$ 和 $M_{xy}(x, y)$.

将上述结果 $M_{x_1}(x, y; \xi, \eta)$, $M_{y_1}(x, y; \xi, \eta)$, $M_{xy_1}(x, y; \xi, \eta)$; $M_x(x, y)$, $M_y(x, y)$ 和 $M_{xy}(x, y)$ 代入式(2.1)中, 并对式(2.1)进行计算, 则我们得到在均布载荷作用下简支矩形板的挠曲方程

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \frac{1}{D(1-\nu^2)} \int_0^a \int_0^b \{ M_x(x, y) M_{x_1}(x, y; \xi, \eta) + M_y(x, y) M_{y_1}(x, y; \xi, \eta) \\ &\quad - \nu [M_x(x, y) M_{y_1}(x, y; \xi, \eta) + M_y(x, y) M_{x_1}(x, y; \xi, \eta)] \\ &\quad + 2(1+\nu) M_{xy}(x, y) M_{xy_1}(x, y; \xi, \eta) \} dx dy \\ &= \int_0^a \int_0^b q w_1(x, y; \xi, \eta) dx dy \end{aligned} \quad (2.2)$$

这里 $w_1(x, y; \xi, \eta)$ 是由作用于点 (ξ, η) 处的单位集中载荷所产生的挠曲面方程.

从前述过程可以看到, 应用式(2.1)去求解挠曲方程 $w(\xi, \eta)$ 是迂回的, 繁琐的. 如果我们不是用式(2.1)去求解该方程, 而是直接用式(2.2), 即直接用外载荷 q 与影响函数 $w_1(x, y; \xi, \eta)$ 乘积的表达式, 那将是非常简单的. 于是, 我们得出下述结论: 在经典 Castigliano 定理中, 余能密度对集中载荷偏导数的表达式应被外载荷与影响函数的乘积来代替. 这就是对经典 Castigliano 定理的第一个修正.

我们还要指出, 对于梁, 特别是对于在复杂载荷作用下的梁, 这第一修正也是必要的.

2. 第二个修正

对经典 Castigliano 定理的第二个修正是由我们在论文[5]中完成的, 但是该文并未给出它的应用, 而这一应用是非常重要的. 下面我们将说明它的应用.

第二个修正说明了非齐次边界位移对挠曲方程的影响. 对于平板, 如果根据边界的特点而预先假设其边界位移, 那么在式(1.4)和(1.5)中引入的第二个修正则给出了这一边界位移对该板挠曲面方程的贡献.

Rayleigh-Ritz 法有一个主要缺点, 这一缺点就是在复杂边界条件下难于预先假设其挠曲面方程. 用广义变分原理^[2]可以克服这一缺点, 用修正的 Castigliano 定理也可以克服这一缺点.

最后, 我们将说明, 在复杂边界条件下应用修正的 Castigliano 定理求解矩形弹性薄板弯曲的方法.

根据 Saint-Venant 原理易知, 任何复杂的边界条件均可转化为一简单的边界条件和相应的边界力和边界位移. 对于矩形板, 如果我们取一简支边作为简单边界条件, 那么, 任何

其它边界条件均可转化为此简支边和相应的边界力及边界位移。

下面,我们将分别讨论三种情况:

(1) 第一种情况就是一邻边固定另一邻边简支(或固定)的情况,如图2(a)所示。

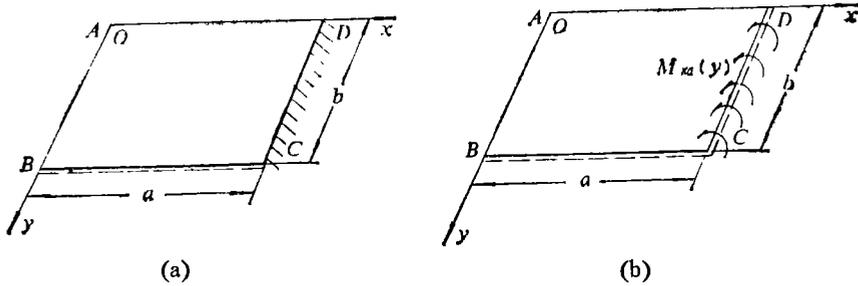


图 2

解除固定边 CD 的弯曲约束,这一约束被分布的弯矩 $M_{xa}(y)$ 所代替,取这一弯矩为级数形式

$$M_{xa}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.3)$$

(2) 第二种情况就是一邻边固定(或简支)另一邻边为自由的情况,如图3(a)所示。像以前一样,解除固定边 CD 的弯曲约束并代以弯矩 $M_{xa}(y)$;同时,在自由边 BC 施以

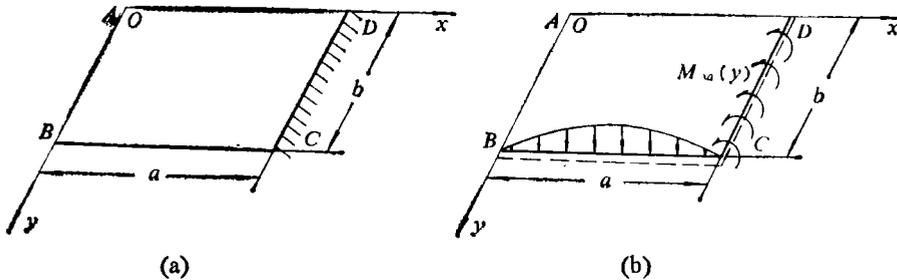


图 3

相应的边界等效切力和相应的边界位移 $w_b(x)$,于是自由边 BC 转化为图3(b)所示的简支边 BC 。

当 $x=0$ 边为简支时,我们取 $y=b$ 边的位移方程为级数形式

$$w_b(x) = \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.4)$$

当 $x=0$ 边为自由时,我们取 $y=b$ 边的位移方程为

$$w_b(x) = \frac{(a-x)}{a} k_b + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.5)$$

同时,在角点 $(0,b)$ 应施以相应的集中力。

(3) 第三种情况就是两邻边自由的情况,如图4(a)所示。

在 $x=a$ 自由边上施以相应的边界等效切力和相应的位移 $w_a(y)$,则该自由边就转化为如图4(b)所示的简支边 CD ,

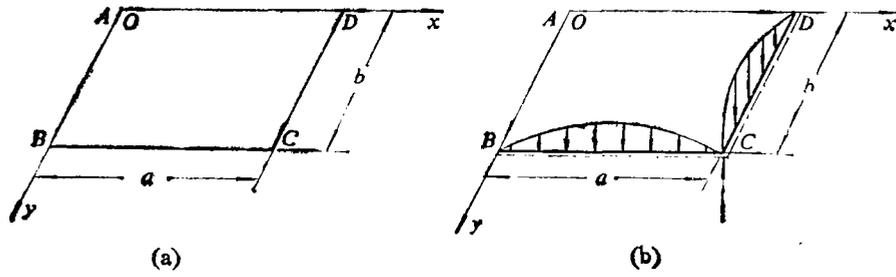


图 4

当 $y=0$ 边为简支时, $x=a$ 自由边的位移方程取为

$$w_a(y) = \frac{y}{b} k_o + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.6)$$

同时, 在角点 (a,b) 应施以相应的集中力.

当 $y=0$ 边为自由时, $x=a$ 自由边的位移方程取为

$$w_a(y) = k_d + \frac{(k_o - k_d)}{b} y + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.7)$$

同时, 在角点 (a,b) 和 $(a,0)$ 均应施以相应的集中力.

在 $y=b$ 自由边上施以相应的边界等效切力和相应的位移 $w_b(x)$, 则该自由边就能转化为如图 4 (b) 所示的简支边 BC .

当 $x=0$ 边为简支时, $y=b$ 自由边的位移方程取为

$$w_b(x) = \frac{x}{a} k_o + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.8)$$

当 $x=0$ 边为自由时, $y=b$ 自由边的位移方程取为

$$w_b(x) = k_b + \frac{(k_o - k_b)}{a} x + \sum_{m=1}^{\infty} w_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (2.9)$$

同时, 在角点 $(0,b)$ 应施以相应的集中力.

三、修正的 Castigliano 定理的推导

在小变形情况下, 我们导出了⁽⁶⁾

$$\Delta(\xi, \eta, \zeta) = \iiint_V \frac{\partial V_o}{\partial P} dV - \iint_{\Omega_u} (\bar{u} p_{x_1} + \bar{v} p_{y_1} + \bar{w} p_{z_1}) d\Omega \quad (3.1)$$

这里 $\Delta(\xi, \eta, \zeta)$ 是沿虚载荷 P 方向的实际挠曲方程, V_o 是余能密度; p_{x_1} , p_{y_1} 和 p_{z_1} 分别表示 $\frac{\partial p_x}{\partial P}$, $\frac{\partial p_y}{\partial P}$ 和 $\frac{\partial p_z}{\partial P}$; \bar{u} , \bar{v} 和 \bar{w} 是在规定表面 Ω_u 上的已知位移分量.

对于线性弹性体, 余能密度 V_o 等于势能密度 U , 于是我们有

$$\frac{\partial V_o}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial U}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial P} + \frac{\partial U}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial P} + \dots = (\sigma_x e_{x_1} + \sigma_y e_{y_1} + \dots) \quad (3.2)$$

这里 e_{x_1} , e_{y_1} , \dots 是由作用于点 (ξ, η, ζ) 处的单位虚载荷在点 (x, y, z) 处所产生的应变分量; σ_x , σ_y , \dots 是真实应力分量.

将式(3.2)代入式(3.1)右端第一项,同时注意到平衡方程,静力边界条件和应力应变关系,且应用 Green 公式,我们有

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial V_o}{\partial P} dV = \iiint_V \frac{\partial U_p}{\partial P} dV = \iiint_V (f_x u_1 + f_y v_1 + f_z w_1) dV \\ + \iint_{\Omega} (p_x \bar{u}_1 + p_y \bar{v}_1 + p_z \bar{w}_1) d\Omega \end{aligned} \quad (3.3)$$

将式(3.3)代入式(3.1),最后我们得到

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(\xi, \eta, \xi) = \iiint_V (f_x u_1 + f_y v_1 + f_z w_1) dV + \iint_{\Omega} (p_x \bar{u}_1 + p_y \bar{v}_1 + p_z \bar{w}_1) d\Omega \\ - \iint_{\Omega} (\bar{u} p_{x1} + \bar{v} p_{y1} + \bar{w} p_{z1}) d\Omega \end{aligned} \quad (3.4)$$

这就是弹性力学三维问题的修正的 Castigliano 定理. 这里 f_x , f_y 和 f_z 表示体积力分量; p_x , p_y 和 p_z 是指定的外力分量. u_1 , v_1 和 w_1 是单位载荷系统的位移分量而 \bar{u}_1 , \bar{v}_1 和 \bar{w}_1 表示单位载荷系统的表面位移分量.

对于具有曲线边界的弹性薄板,修正的 Castigliano 定理成为

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = \iint_{\Omega} q(x, y) w_1(x, y; \xi, \eta) dx dy + \sum_{i=1}^m P_i w_1(x_i, y_i; \xi, \eta) \\ + \sum_{j=1}^n M_{xj} \frac{\partial}{\partial x} w_1(x_j, y_j; \xi, \eta) + \sum_{k=1}^r M_{yk} \frac{\partial}{\partial y} w_1(x_k, y_k; \xi, \eta) \\ + \oint_c (Q_n + \frac{\partial M_{ns}}{\partial s}) w_1(x, y; \xi, \eta) ds - \oint M_n \frac{\partial}{\partial n} w_1(x, y; \xi, \eta) ds \\ - \oint_{c_e} (Q_{n1} + \frac{\partial M_{ns1}}{\partial s}) \bar{w}(x, y) ds + \oint_{c_e} M_{n1} \frac{\partial}{\partial n} \bar{w}(x, y) ds \\ + \sum_{r=1}^s \mathcal{A}(M_{ns1}, r) \bar{w}_r(x_r, y_r) \end{aligned} \quad (3.5)$$

对于矩形弹性薄板,取单位集中载荷作用的简支矩形板的解作为影响函数,则修正的 Castigliano 定理成为

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) = \int_0^a \int_0^b q(x, y) w_1(x, y; \xi, \eta) dx dy + \sum_{i=1}^m P_i w_1(x_i, y_i; \xi, \eta) \\ + \sum_{j=1}^n M_{xj} \frac{\partial}{\partial x} w_1(x_j, y_j; \xi, \eta) + \sum_{k=1}^r M_{yk} \frac{\partial}{\partial y} w_1(x_k, y_k; \xi, \eta) \\ - \left[\int_0^b M_x(y) \frac{\partial}{\partial x} w_1(x, y; \xi, \eta) dy \right]_0^a - \left[\int_0^a M_y(x) \frac{\partial}{\partial y} w_1(x, y; \xi, \eta) dx \right]_0^b \\ - \left[\int_0^b \left(\frac{\partial M_{x1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy1}}{\partial y} \right) \bar{w}(y) dy \right]_0^a - \left[\int_0^a \left(\frac{\partial M_{y1}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy1}}{\partial x} \right) \bar{w}(x) dx \right]_0^b \\ + [2M_{xy1}(x, y; \xi, \eta) \bar{w}(x, y)]_{0,0}^{a,b} - [2M_{xy1}(x, y; \xi, \eta) \bar{w}(x, y)]_{0,0}^{a,0} \end{aligned} \quad (3.6)$$

这里 $q(x, y)$ —— 分布载荷集度; P_i —— 作用于点 (x_i, y_i) 的集中载荷; M_{x_j} —— 作用于点 (x_j, y_j) 沿 x 方向的外弯矩; M_{y_k} —— 作用于点 (x_k, y_k) 沿 y 方向的外弯矩, 其它符号与通用的相同. 它们均作用于实际系统.

$w_1(x, y; \xi, \eta)$ 是由作用于点 (ξ, η) 处的单位集中载荷所引起的简支矩形板的挠曲面方程; M_{x_1} , M_{y_1} 和 M_{xy_1} 是由单位集中载荷所产生的内弯矩和扭矩.

在直梁的情况下, 取作用于流动坐标点 ξ 处的单位集中载荷的简支梁的解为影响函数, 则实际直梁的挠曲轴方程成为

$$w(\xi) = \int_0^l q(x) w_1(x, \xi) dx + \sum_{i=1}^m P_i w_1(x_i, \xi) + \sum_{j=1}^n M_j \frac{d}{dx} w_1(x_j, \xi) - \left[M \frac{d}{dx} w_1(x, \xi) \right]_0^l - [Q_1(x, \xi) w]_0^l \quad (3.7)$$

必须指出, 公式(3.5)~(3.7)和论文[6]中的相应公式相同.

四、应用修正的 Castigliano 定理求解如图5所示两邻边固定另两邻边自由的矩形板的弯曲

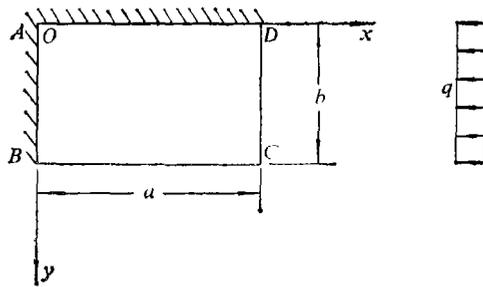


图 5

在这种情况下, 修正的 Castigliano 公式(3.6)成为

$$w(\xi, \eta) = \int_0^a \int_0^b q w_1(x, y; \xi, \eta) dx dy + \int_0^a M_{y_0}(x) \frac{\partial}{\partial y} w_1(x, 0; \xi, \eta) dx + \int_0^b M_{x_0}(y) \frac{\partial}{\partial x} w_1(0, y; \xi, \eta) dy - \int_0^b \left(\frac{\partial M_{x_1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right)_{(a, y; \xi, \eta)} \bar{w}_a(y) dy - \int_0^a \left(\frac{\partial M_{y_1}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial x} \right)_{(x, b; \xi, \eta)} \bar{w}_b(x) dx + 2 M_{xy_1}(a, b; \xi, \eta) \bar{w}(a, b) \quad (4.1)$$

该式必须满足下述边界条件

$$\left. \begin{aligned} (w)_{\xi=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_{\xi=0} = 0, & \quad (w)_{\eta=0} = \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = 0 \\ \left[\frac{\partial^3 w}{\partial \xi^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \xi \partial \eta^2} \right]_{\xi=a} = 0, & \quad \left[\frac{\partial^3 w}{\partial \eta^3} + (2-\nu) \frac{\partial^3 w}{\partial \eta \partial \xi^2} \right]_{\eta=b} = 0 \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right)_{\xi=a} = 0, & \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial \xi^2} \right)_{\eta=b} = 0, & \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \xi \partial \eta} \right)_{\xi=a} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

我们假设, AD 和 AB 边的弯矩分别为

$$M_{y_0}(x) = \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (4.3)$$

$$M_{x_0}(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.4)$$

而 BC 和 CD 边的位移方程分别为

$$w_b(x) = \frac{x}{a} k_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (4.5)$$

$$w_a(y) = \frac{y}{b} k_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (4.6)$$

将式(4.3)~(4.6)代入式(4.1)并合并含 k_0 的常数项, 我们得到

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \int_0^a \int_0^b q w_1(x, y; \xi, \eta) dx dy \\ &+ \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{\partial}{\partial y} w_1(x, 0; \xi, \eta) dx \\ &+ \int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{b} \frac{\partial}{\partial x} w_1(0, y; \xi, \eta) dy \\ &- \int_0^a \left(\frac{\partial M_{y_1}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial x} \right)_{(x, b; \xi, \eta)} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{a} dx \\ &- \int_0^b \left(\frac{\partial M_{x_1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right)_{(a, y; \xi, \eta)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ &- \left[\int_0^a \left(\frac{\partial M_{y_1}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial x} \right)_{(x, b; \xi, \eta)} \frac{x}{a} dx \right. \\ &\left. + \int_0^b \left(\frac{\partial M_{x_1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right)_{(a, y; \xi, \eta)} \frac{y}{b} dy - 2 M_{xy_1}(a, b; \xi, \eta) \right] k_0 \quad (4.7) \end{aligned}$$

注意到式(4.7)右端第一项, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b q w_1(x, y; \xi, \eta) dx dy &= \frac{4qa^2}{\pi^5 D} \sum_{m=1,3}^{\infty} \frac{1}{m^5} \left\{ 1 + \frac{1}{2 \operatorname{ch} \frac{\beta_m}{2}} \left[\frac{\beta_m}{b} (\eta - \frac{b}{2}) \operatorname{sh} \frac{\beta_m}{b} (\eta - \frac{b}{2}) \right. \right. \\ &\left. \left. - \left(2 + \frac{\beta_m}{2} \operatorname{th} \frac{\beta_m}{2} \right) \operatorname{ch} \frac{\beta_m}{b} (\eta - \frac{b}{2}) \right] \right\} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \quad (4.8) \end{aligned}$$

注意到式(4.7)右端第二项, 我们得到

$$\begin{aligned} \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin \frac{m\pi x}{a} \frac{\partial}{\partial y} w_1(x, 0; \xi, \eta) dx &= \int_0^a \sum_{m=1}^{\infty} D_m \sin \frac{m\pi x}{a} \left\{ \frac{a^2}{\pi^3 D} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\beta_m}{b} \right) \right. \\ &\left. \cdot \left[\beta_m \operatorname{cth} \beta_m - \frac{\beta_m(b-\eta)}{b} \operatorname{cth} \frac{\beta_m(b-\eta)}{b} \right] \frac{1}{m^3 \operatorname{sh} \beta_m} \operatorname{sh} \frac{\beta_m(b-\eta)}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \right\} dx \end{aligned}$$

$$= -\frac{a^2}{2\pi^2 D} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_m}{m^2} \left[-\frac{1}{\text{sh}^2 \beta_m} \beta_m \text{sh} \frac{\beta_m \eta}{b} + \text{cth} \beta_m \left(\frac{\beta_m \eta}{b} \right) \text{ch} \frac{\beta_m \eta}{b} - \frac{\beta_m \eta}{b} \text{sh} \frac{\beta_m \eta}{b} \right] \sin \frac{m\pi \xi}{a} \quad (4.9)$$

注意到式(4.7)右端第三项, 我们得到

$$\int_0^b \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi y}{b} \left\{ \frac{b^2}{\pi^2 D} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha_n}{a} \right) \left[\alpha_n \text{cth} \alpha_n - \frac{\alpha_n(a-\xi)}{a} \text{cth} \frac{\alpha_n(a-\xi)}{a} \right] \frac{1}{n^3 \text{sh} \alpha_n} \right. \\ \left. \cdot \text{sh} \frac{\alpha_n(a-\xi)}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\} dy = \frac{b}{2\pi^2 D} \sum_{n=1}^{\infty} \left[-\frac{1}{\text{sh}^2 \alpha_n} \alpha_n \text{sh} \frac{\alpha_n \xi}{a} \right. \\ \left. + \text{cth} \alpha_n \left(\frac{\alpha_n \xi}{a} \right) \text{ch} \frac{\alpha_n \xi}{a} - \frac{\alpha_n \xi}{a} \text{sh} \frac{\alpha_n \xi}{a} \right] \frac{1}{n^2} A_n \sin \frac{n\pi \eta}{b} \quad (4.10)$$

注意到式(4.7)右端第四项, 我们得到

$$-\int_0^a \left(\frac{\partial M_{y_1}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial x} \right)_{(x, b; \xi, \eta)} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin \frac{m\pi x}{a} dx \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\text{sh} \beta_m} \left[1 + \frac{1-\nu}{2} \left(\beta_m \text{cth} \beta_m - \frac{\beta_m \eta}{b} \text{cth} \frac{\beta_m \eta}{b} \right) \right] \text{sh} \frac{\beta_m \eta}{b} \sin \frac{m\pi \xi}{a} \quad (4.11)$$

注意到式(4.7)右端第五项, 我们得到

$$-\int_0^b \left(\frac{\partial M_{x_1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right)_{(a, y; \xi, \eta)} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \frac{n\pi y}{b} dy \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\text{sh} \alpha_n} \left[1 + \frac{1-\nu}{2} \left(\alpha_n \text{cth} \alpha_n - \frac{\alpha_n \xi}{a} \text{cth} \frac{\alpha_n \xi}{a} \right) \right] \text{sh} \frac{\alpha_n \xi}{a} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \quad (4.12)$$

注意到式(4.7)右端第六项, 我们得到

$$-\left[\int_0^a \left(\frac{\partial M_{y_1}}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial x} \right)_{(x, b; \xi, \eta)} \frac{x}{a} dx + \int_0^b \left(\frac{\partial M_{x_1}}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy_1}}{\partial y} \right)_{(a, y; \xi, \eta)} \frac{y}{b} dy \right. \\ \left. - 2M_{xy_1}(a, b; \xi, \eta) \right] k_0 = -\frac{xy}{ab} k_0 \quad (4.13)$$

式(4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.12) 和 (4.13) 分别和论文[4]的式(1), (7), (13), (19), (25)和(31)相同。

将式(4.8)~(4.13)代入挠曲面一般方程(4.7)中, 即得到全解, 由于得到的结果与[4]相同, 我们将不再进行数值计算。

参 考 文 献

- [1] 钱伟长、叶开沅, 《弹性力学》, 科学出版社, (1980).
- [2] 钱伟长, 《变分法及有限元》(上册), 科学出版社, (1980).
- [3] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, Second Edition, (1959).
- [4] 张福范, 两邻边固定两邻边自由的矩形板, (1980)
- [5] 付宝连, 求解位移方程的能量原理, 应用数学和力学, 2, 6 (1981), 697—707.
- [6] 付宝连, 应用功的互等定理求解具有复杂边界条件矩形板的挠曲面方程, 应用数学和力学, 3, 3 (1982), 315—325.

On the Modified Castigliano's Theorem

Fu Bao-lian

(Northeast Heavy Machinery Institute, Heilongjiang)

Abstract

This paper gives the modified Castigliano's theorem, which is more convenient and more extensive for applications than the classical Castigliano's theorem.

The modifications to the classical Castigliano's theorem are in the two respects, the first respect is that the expression of the partial derivative with respect to the concentrated load P of the complementary energy density in the classical Castigliano's theorem is replaced by the expression with the products of the external loads and influence functions, the modification brings us greatest simplicity and greatest convenience for calculations under various loads; the second is that the expressions with the products of the inhomogeneous boundary displacements and the influence functions are introduced into the classical Castigliano's theorem, the modification provides the theoretical fundamental for solving the problems of various boundary conditions.

We show also the method of how to apply the modified Castigliano's theorem to solve the problems of the surface structural mechanics.

Finally, as a calculated example of the application of the modified Castigliano's theorem we solved the equation of the deflection surface of the rectangular plate with two adjacent built-in edges and other two adjacent free edges.