应用数学和力学，第5卷第2期（1984年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

Fuzzy映象的不动点定理*

张 石 生

（四川大学数学系，1983年6月收到）

摘 要

Fuzzy 映象的不动点理论是不分明数学理论和应用研究中的一个重要方面．本文对更一般的 Fuzzy 映象给出了几个新的不动点定理，发展了 Heilpern 的结果[3]．此外还部分回答了引文[1]中提出的一个未解决的问题．

一、引 言

Fuzzy 映象的不动点理论是不分明数学理论和应用研究中的一个重要方面．

Fuzzy 映象不动点理论的研究最早开始于 Butnariu 的工作[1，2]和 Heilpern 的工作[3]．在这些工作中，作者们分别讨论了一类 Fuzzy 映象不动点的存在性问题，把熟知的 Banach 不动点原理、Brouwer 不动点定理和 Kakutani 不动点定理推广到 Fuzzy 映象的情形，同时还给出其对 Fuzzy 对策理论的应用．本文的目的是对更一般的 Fuzzy 映象给出几个新的不动点定理．这些结果本质上改进和发展了 Heilpern[3]中的结果．另外本文还部分回答了引文[1]中提出的一个未解决的问题．

二、准 备 知 识

本文以下处处假定 (X, d) 是一完备的线性度量空间．

我们称A是X中的 **Fuzzy 集**，如果 A 是 X 到[0，1]的实值函数；并称A在 $x\in X$ 的值 $A(x)$ 为 x在A中的**隶属度**．

以后我们用$\mathscr{F}(X)$表X中一切 Fuzzy 集的集合族．

我们称映X到$\mathscr{F}(X)$的映象F为X上的 **Fuzzy 映象**；也就是说，F是X上的 Fuzzy 映象，如果对每一$x\in X$，$F(x)$（以后记为 F_x）是 $\mathscr{F}(X)$中的 Fuzzy集．

设 x，y 是 X 中的任意二点，F是X上的 Fuzzy 映象，我们用 $F_x(y)$ 表 y 在 Fuzzy 集 F_x 中的隶属度．

设F是X上的任一 Fuzzy 映象，对此映象F，我们可作一映象$\tilde{F}:X\to 2^X$ 如下：

$$\tilde{F}_x=\{y\in X;F_x(y)=\max_{u\in X}F_x(u)\}\qquad \forall x\in X \tag{2.1}$$

* 周谟仁推荐．

定义 1 设F是X上的 Fuzzy 映象. 我们称 $x_* \in X$是F的不动点，如果

$$(F_{x_*})(x_*) \geqslant (F_{x_*})(x) \quad \forall x \in X$$

由上面的定义看出，对X上给定的 Fuzzy 映象的不动点的存在性问题，是经典的多值映象不动点的存在性问题的推广. 事实上，设 G 是 $X \to 2^X$ 的多值映象，则 x_* 是 G 的不动点，即 $x_* \in G(x_*)$，当而且仅当 x_* 是Fuzzy映象 F：$F_x = \chi_{G(x)}$，$\forall x \in X$的不动点，这里χ_A表X的通常集 A 的特征函数，且 $F_{x_*} \neq \varnothing$.

设 A，$B \in \mathscr{F}(X)$，$C = A \cap B$，当且仅当

$$C(x) = \min\{A(x),\ B(x)\} \qquad \forall x \in X$$

本文以下处处用$CB(X)$表X中一切非空有界闭集的集合族，并用 H 表由度量 d 导出的 Hausdorff 度量. 即对任意 M，$N \in CB(X)$，有

$$H(M,\ N) = \max\{\sup_{a \in M} d(a,\ N),\ \sup_{b \in N} d(b,\ M)\}$$

其中
$$d(x,\ E) = \inf_{y \in E} d(x,\ y)，E \text{ 是 } CB(X) \text{ 中的任一集.}$$

以后我们用 $\mathscr{W}(X)$ 表 $\mathscr{F}(X)$ 中这样的子族. 对每一 $A \in \mathscr{W}(X)$，由下式定义的集合 $\tilde{A} \in CB(X)$：

$$\tilde{A} = \{x \in X:\ A(x) = \max_{u \in X} A(u)\}$$

引理 1 (Nadler [4]) 设 A，$B \in CB(X)$，则对任一 $a \in A$，和任一数 $\beta > 1$，必存在 $b \in B$，使得

$$d(a,\ b) \leqslant \beta H(A,\ B)$$

三、主 要 结 果

定理 1 设 F，G 是 $X \to \mathscr{W}(X)$ 的 Fuzzy 映象. 设存在 $q \in (0,\ 1)$，使得对任意的 x，$y \in X$ 有

$$H(\tilde{F}_x,\ \tilde{G}_y) \leqslant q \max\{d(x,\ y),\ d(x,\ \tilde{F}_x),\ d(y,\ \tilde{G}_y),\ \frac{1}{2}[d(x,\ \tilde{G}_y) + d(y,\ \tilde{F}_x)]\} \tag{3.1}$$

这里及以后，我们处处记

$$\tilde{F}_x = \{z \in X;\ F_x(z) = \max_{u \in X} F_x(u)\} \qquad \forall x \in X$$

$$\tilde{G}_y = \{w \in X;\ G_y(w) = \max_{u \in X} G_y(u)\} \qquad \forall y \in X$$

则 F，G 在 X 中存在公共不动点 x_*，即存在 $x_* \in X$，使得

$$(F_{x_*} \cap G_{x_*})(x_*) = \max_{u \in X} (F_{x_*} \cap G_{x_*})(u)$$

证 对任一 $x_0 \in X$，取 $x_1 \in \tilde{F}_{x_0}$. 由引理1，对任一 β：$1 < \beta < \frac{1}{q}$，存在 $x_2 \in \tilde{G}_{x_1}$，使得

$$d(x_1,\ x_2) \leqslant \beta H(\tilde{F}_{x_0},\ \tilde{G}_{x_1})$$

又由引理 1，存在 $x_3 \in \tilde{F}_{x_2}$，使得

$$d(x_2,\ x_3) \leqslant \beta H(\tilde{G}_{x_1},\ \tilde{F}_{x_2})$$

继续这一程序，可得一序列 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$，使得

$$\left.\begin{array}{ll} x_{2n+1}\in\widetilde{F}x_{2n},\ x_{2n+2}\in\widetilde{G}x_{2n+1} & (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \\ d(x_{2n+1},\ x_{2n})\leqslant\beta H(\widetilde{F}x_{2n},\ \widetilde{G}x_{2n-1}) & (n=1,\ 2,\ \cdots) \\ d(x_{2n+2},\ x_{2n+1})\leqslant\beta H(\widetilde{G}x_{2n+1},\ \widetilde{F}x_{2n}) & (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

下证$\{x_n\}$是一 Cauchy 序列.

事实上，对任意的正整数n，我们有

$$\begin{aligned} d(x_{2n+1},x_{2n})&\leqslant\beta H(\widetilde{F}x_{2n},\ \widetilde{G}x_{2n-1})\leqslant\beta q\max\{d(x_{2n},\ x_{2n-1}), \\ &\quad d(x_{2n},\ \widetilde{F}x_{2n}),d(x_{2n-1},\widetilde{G}x_{2n-1}),\frac{1}{2}[d(x_{2n},\ \widetilde{G}x_{2n-1})+d(x_{2n-1},\ \widetilde{F}x_{2n})]\} \\ &\leqslant\beta q\max\{d(x_{2n},\ x_{2n-1}),\ d(x_{2n},\ x_{2n+1}),\ d(x_{2n-1},\ x_{2n}), \\ &\quad \frac{1}{2}[d(x_{2n},\ x_{2n})+d(x_{2n-1},\ x_{2n+1})]\} \\ &\leqslant\beta q\max\{d(x_{2n},\ x_{2n-1}),\ d(x_{2n},\ x_{2n+1}), \\ &\quad \frac{1}{2}[d(x_{2n-1},\ x_{2n})+d(x_{2n},\ x_{2n+1})]\} \\ &=\beta q\max\{d(x_{2n},\ x_{2n-1}),\ d(x_{2n},\ x_{2n+1})\} \end{aligned}$$

因$\beta q<1$，故得

$$d(x_{2n+1},\ x_{2n})\leqslant\beta q d(x_{2n},\ x_{2n-1}) \tag{3.3}$$

同理可证，对一切非负整数n有

$$d(x_{2n+2},\ x_{2n+1})\leqslant\beta q d(x_{2n+1},\ x_{2n}) \tag{3.4}$$

由(3.3)，(3.4)，对一切正整数n有

$$d(x_n,\ x_{n+1})\leqslant\beta q d(x_{n-1},\ x_n)\leqslant\cdots\leqslant(\beta q)^n d(x_0,\ x_1) \tag{3.5}$$

于是对任意的正整数i，j有

$$\begin{aligned} d(x_i,\ x_{i+j})&\leqslant\sum_{n=i}^{i+j-1}d(x_n,\ x_{n+1})\leqslant\left(\sum_{n=i}^{i+j-1}(\beta q)^n\right)d(x_0,\ x_1) \\ &\leqslant(\beta q)^i d(x_0,\ x_1)/(1-\beta q) \end{aligned}$$

上式表明$\{x_n\}$是X中的 Cauchy 序列. 因X完备，设$x_n\to x_*\in X$.

现证x_*是F，G在X中的公共不动点. 事实上，因

$$\begin{aligned} d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*})&\leqslant d(x_*,x_{2n})+d(x_{2n},\ \widetilde{F}_{x_*}) \\ &\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+H(\widetilde{F}_{x_*},\ \widetilde{G}_{x_{2n-1}}) \\ &\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+q\max\{d(x_*,\ x_{2n-1}),\ d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*}), \\ &\quad d(x_{2n-1},\ \widetilde{G}_{x_{2n-1}}),\ \frac{1}{2}[d(x_*,\ \widetilde{G}_{x_{2n-1}})+d(x_{2n-1},\ \widetilde{F}_{x_*})]\} \\ &\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+q\max\{d(x_*,\ x_{2n-1}),\ d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*}),\ d(x_{2n-1},\ x_{2n}), \\ &\quad \frac{1}{2}[d(x_*,\ x_{2n})+d(x_{2n-1},\ x_*)+d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*})]\} \end{aligned}$$

于上式右端让$n\to\infty$，取极限得

$$d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*})\leqslant q d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*})$$

因$q<1$，故$d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*})=0$. 因$\widetilde{F}_{x_*}$是非空闭集，故$x_*\in\widetilde{F}_{x_*}$，即

$$x_* \in \{z \in X:\ F_{x_*}(z) = \max_{u \in X} F_{x_*}(u)\}$$

因而有

$$F_{x_*}(x_*) = \max_{u \in X} F_{x_*}(u)$$

即 x_* 是 F 的不动点.

同理可证

$$G_{x_*}(x_*) = \max_{u \in X} G_{x_*}(u)$$

即 x_* 是 G 的不动点. 因而有

$$(F_{x_*} \cap G_{x_*})(x_*) = \max_{u \in X} \{(F_{x_*} \cap G_{x_*})(u)\}$$

即 x_* 是 F. G 的公共不动点.

定理证毕.

由定理 1 可得如下推论:

推论 1 设 F 是 $X \to \mathscr{W}(X)$ 的 Fuzzy 映象. 设存在 $q \in (0, 1)$, 使得对任意的 x, $y \in X$ 有

$$H(\widetilde{F}_x, \widetilde{F}_y) \leqslant q \max\{d(x, y),\ d(x, \widetilde{F}_x),\ d(y, \widetilde{F}_y),\ \frac{1}{2}[d(x, \widetilde{F}_y) + d(y, \widetilde{F}_x)]\} \tag{3.6}$$

则 F 在 X 中存在不动点.

推论 2 设 F, G 是 $X \to \mathscr{W}(X)$ 的 Fuzzy 映象. 设存在常数 a, b, $c \geqslant 0$, $a+2b+2c<1$, 使得对任意的 x, $y \in X$ 有

$$H(\widetilde{F}_x, \widetilde{G}_y) \leqslant ad(x, y) + b\{d(x, \widetilde{F}_x) + d(y, \widetilde{F}_y)\} + c\{d(x, \widetilde{G}_y) + d(y, \widetilde{F}_x)\} \tag{3.7}$$

则 F, G 在 X 中存在不动点.

证 令 $q = a+2b+2c<1$, 于是由(3.7)得知条件(3.1)成立, 故结论由定理 1 得之.

注 Heilpern[3]中的结果是推论 2 当 $b=c=0$, $F=G$ 时的特例 另推论 1 部分回答了[1]中提出的一个问题.

在给出下面的定理之前, 我们先引出一个符号.

以后, 我们记

$$\delta(A, B) = \sup_{a \in A,\ b \in B} d(a, b) \qquad \forall A,\ B \in CB(X)$$

定理 2 设 F 是 $X \to \mathscr{W}(X)$ 的 Fuzzy 映象. 设存在 $q \in (0, 1)$, 使得

$$\delta(\widetilde{F}_x, \widetilde{F}_y) \leqslant q \max\{d(x, y),\ \delta(x, \widetilde{F}_x),\ \delta(y, \widetilde{F}_y),\ d(x, \widetilde{F}_y),\ d(y, \widetilde{F}_x)\} \qquad \forall x,\ y \in X \tag{3.8}$$

则 F 在 X 中存在不动点 x_*, 而且对任一 $x_0 \in X$, 迭代序列 $\{x_n = T^n x_0\}$ 收敛于这一不动点 x_*.

证 对任一给定的 $\alpha \in (0, 1)$, 因 $q \in (0, 1)$, 故 q^α, $q^{1-\alpha} \in (0, 1)$. 现定义单值映象 T 如下:

对任一 $x \in X$, 令 $Tx \in \widetilde{F}_x$, 满足

$$d(x, Tx) \geqslant q^\alpha \delta(x, \widetilde{F}_x) \tag{3.9}$$

于是 T 是 $X \to X$ 的单值映象, 且满足

$$d(Tx, Ty) \leqslant \delta(\widetilde{F}_x, \widetilde{F}_y)$$
$$\leqslant q \cdot q^{-\alpha} \max\{q^\alpha d(x, y),\ q^\alpha \delta(x, \widetilde{F}_x),$$

$$q^a\delta(y,\ \widetilde{F}_y),\ q^a d(x,\ \widetilde{F}_y),\ q^a d(y,\ \widetilde{F}_x)\}$$
$$\leqslant q^{1-a}\max\{d(x,\ y),\ d(x,\ Tx),\ d(y,\ Ty),$$
$$d(x,\ Ty),\ d(y,\ Tx)\}\qquad \forall x,\ y\in X$$

故按 Rhoades[5] 的分类法，T是属于第(24)类压缩型映象，因而由 Rhoades[5]的定理5，知 T 在 X 中存在唯一不动点 x_*，而且对任一 $x_0\in X$，迭代序列$\{x_n=T^n x_0\}_{n=1}^{\infty}$收敛于$x_*$.

因$x_*=Tx_*$，且$Tx_*\in\widetilde{F}_{x_*}$，故$x_*\in\widetilde{F}_{x_*}$. 于是有

$$x_*\in\{z\in X:\ F_{x_*}(z)=\max_{u\in X}F_{x_*}(u)\}$$

故

$$F_{x_*}(x_*)=\max_{u\in X}F_{x_*}(u)$$

即 x_* 是 F 的不动点.

定理证毕.

注　由定理 2 的证明过程还可看出，$\widetilde{F}_{x_*}$只含x_*这一点. 事实上，由条件(3.8)知

$$\delta(\widetilde{F}_{x_*},\ \widetilde{F}_{x_*})\leqslant q\delta\ (x_*,\ \widetilde{F}_{x_*})$$

因 $q<1$，上式仅当 $\widetilde{F}_{x_*}=\{x_*\}$时才可能成立.

定理 3　设 F，G 是 $X\rightarrow\mathscr{W}(X)$ 的 Fuzzy 映象，设存在 $q\in(0,\ 1)$，使得

$$\delta(\widetilde{F}_x,\ \widetilde{G}_y)\leqslant q\max\{d(x,\ y),\ \delta(x,\ \widetilde{F}_x),\ \delta(y,\ \widetilde{G}_y),$$
$$\frac{1}{2}[d(x,\ \widetilde{G}_y)+d(y,\ \widetilde{F}_x)]\}\qquad \forall x,\ y\in X \tag{3.10}$$

则 F，G 在 X 中存在公共不动点 x_*.

证　设 $a\in(0,\ 1)$. 于是仿定理 2 一样，可以定义单值映象 S，T: $X\rightarrow X$ 如下：对任一 $x\in X$，令 $Sx\in\widetilde{F}_x$，$Tx\in\widetilde{G}_x$ 使得

$$d(x,\ Sx)\geqslant q^a\delta(x,\ \widetilde{F}_x)$$
$$d(x,\ Tx)\geqslant q^a\delta(x,\ \widetilde{G}_x)$$

由 S，T 的定义和条件(3.10)知

$$d(Sx,\ Ty)\leqslant\delta(\widetilde{F}_x,\ \widetilde{G}_y)$$
$$\leqslant q^{1-a}\max\{q^a d(x,\ y),\ q^a\delta(x,\ \widetilde{F}_x),$$
$$q^a\delta(y,\ \widetilde{G}_y),\ \frac{1}{2}q^a[d(x,\ \widetilde{G}_y)+d(y,\ \widetilde{F}_x)]\}$$
$$\leqslant q^{1-a}\max\{d(x,\ y),\ d(x,\ Sx),\ d(y,\ Ty),$$
$$\frac{1}{2}[d(x,\ Ty)+d(y,Sx)]\}\qquad \forall x,\ y\in X$$

按 Rhoades[5]的分类法，S，T 是属于第(146)类的压缩型映象对. 故由 Rhoades[5] 的定理14知存在唯一点$x_*\in X$，使得

$$x_*=Tx_*=Sx_*$$

而且对任一 $x_0\in X$，序列$\{(ST)^n x_0\}$和序列$\{(TS)^n x_0\}$均收敛于x_*.

因$Tx_*\in\widetilde{G}_{x_*}$，$Sx_*\in\widetilde{F}_{x_*}$，故 $x_*\in\widetilde{F}_{x_*}\cap\widetilde{G}_{x_*}$，即

$$x_*\in\{z\in X: F_{x_*}(z)=\max_{u\in X}F_{x_*}(u)\}\cap\{w\in X: G_{x_*}(w)=\max_{u\in X}G_{x_*}(u)\}$$

故有

$$\{F_{x_*}\cap G_{x_*}\}(x_*)=\max_{u\in X}\{[F_{x_*}\cap G_{x_*}](u)\}$$

因而 x_* 是 F，G 的公共不动点.

定理证毕.

定理 4 设 F,G 是 $X\to\mathscr{W}(X)$ 的 Fuzzy 映象，设存在函数 $\Phi(t)$：$[0,\infty)\to[0,\infty)$，使得

(i) $\Phi(t)<t \quad \forall t>0$;

(ii) $H(\widetilde{F}_x,\ \widetilde{G}_y)\leqslant\Phi(d(x,\ y)) \quad \forall x,\ y\in X$.

再设 $\beta>1$，并设 $\{x_n\}$ 是由定理 1 中(3.2)式所定义的序列. 又设 $\{t_k\}_{k=0}^{\infty}$ 是由下式定义的非负实数序列：

$$t_{k+1}=t_k+\Phi(\beta(t_k-t_{k-1})),\quad t_0=0,\ t_1\geqslant d(x_1,\ x_0)\quad (k=1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.11}$$

并设 $t_k\to t_*<\infty$.

则 F 和 G 在 X 中存在公共不动点 x_*，而且 $\{x_n\}$ 收敛于这一不动点，并有如下的误差估计：

$$d(x_*,\ x_n)\leqslant\beta(t_*-t_n) \tag{3.12}$$

证 先用归纳法证明

$$d(x_j,\ x_{j-1})\leqslant\beta(t_j-t_{j-1})\quad (j=1,\ 2,\ \cdots) \tag{3.13}$$

事实上，当 $j=1$ 时显然成立. 设当 $j=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ 时(3.13)成立. 现证对 $k+1$ 也成立. 因

$$\begin{aligned} d(x_{k+1},\ x_k)&\leqslant\begin{cases}\beta H(\widetilde{F}_{x_k},\ \widetilde{G}_{x_{k-1}}), & \text{当 } k \text{ 为偶数}\\ \beta H(\widetilde{G}_{x_k},\ \widetilde{F}_{x_{k-1}}), & \text{当 } k \text{ 为奇数}\end{cases}\\ &\leqslant\beta\Phi(d(x_k,\ x_{k-1}))\leqslant\beta\Phi(\beta(t_k-t_{k-1}))\\ &=\beta(t_{k+1}-t_k)\end{aligned}$$

(3.13)式得证.

因 $t_k\to t_*$，故由

$$d(x_{k+m},\ x_k)\leqslant\sum_{j=k}^{k+m-1}d(x_{j+1},\ x_j)\leqslant\beta\sum_{j=k}^{k+m-1}(t_{j+1}-t_j)=\beta(t_{k+m}-t_k) \tag{3.14}$$

得知 $\{x_n\}$ 是 X 中的 Cauchy 序列. 由 X 的完备性，设 $x_n\to x_*\in X$. 现证 x_* 是 F 的不动点. 设不然 x_* 不是 F 的不动点，因而 $x_*\notin\widetilde{F}_{x_*}$，故有 $d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*})>0$. 但因

$$\begin{aligned} d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*})&\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+d(x_{2n},\ \widetilde{F}_{x_*})\\ &\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+H(\widetilde{G}_{x_{2n-1}},\ \widetilde{F}_{x_*})\\ &\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+\Phi(d(x_{2n-1},\ x_*))\\ &\leqslant d(x_*,\ x_{2n})+d(x_{2n-1},\ x_*)\end{aligned}$$

于上式右端让 $n\to\infty$，即得 $d(x_*,\ \widetilde{F}_{x_*})=0$. 故 $x_*\in\widetilde{F}_{x_*}$，这是矛盾的. 由此矛盾，即知 $x_*\in\widetilde{F}_{x_*}$，即有

$$F_{x_*}(x_*)=\max_{u\in X}F_{x_*}(u)$$

即 x_* 是 F 的不动点.

同理可证 x_* 是 G 的不动点. 因而 x_* 是 F，G 的公共不动点.

于(3.14)中两端让 $m\to\infty$，即得(3.12)式所表述的误差估计.

定理证毕.

四、例　　子

下面我们给出一个例子，说明 X 上的 Fuzzy 映象 F 在满足一定的条件下，由它所定义的集

$$\widetilde{F}_x=\{z\in X; F_x(z)=\max_{u\in X}F_x(u)\} \qquad \forall x\in X$$

都是 X 中的有界非空的闭集.

定义 2　X上的 Fuzzy 映象 F 称为闭的，如果其隶属函数 $F_x(y)$ 作为 $X\times X$ 上的通常的实值函数是上半连续的.

例　设(X,d)是一紧致的度量空间，设F是X 上的闭 Fuzzy 映象. 则对每一 $x\in X$，由 F 定义的集

$$\widetilde{F}_x=\{z\in X;\ F_x(z)=\max_{u\in X}F_x(u)\}$$

是X中的非空有界闭集，因而也是 X 中的紧集.

事实上，对每一 $x\in X$，$F_x(y)$ 是 X 上的上半连续函数，故在 X 的某点 y_*，F_x 达到其在X上的极大值，即有

$$F_x(y_*)=\max_{u\in X}F_x(u)$$

故$y_*\in\widetilde{F}_x$，因而$\widetilde{F}_x\neq\varnothing$.

其次设 $\{x_n\}$ 是 $\widetilde{F}_x$ 中的任一序列，x_* 是其极限点. 于是有

$$F_x(x_n)\geqslant F_x(y) \qquad \forall y\in X,\ n=1,\ 2,\ \cdots$$

由 $F_x(y)$的上半连续性，故有

$$F_x(x_*)\geqslant\lim_{n\to\infty}\sup F_x(x_n)\geqslant F_x(y) \qquad \forall y\in X$$

故 $x_*\in\widetilde{F}_x$，即 $\widetilde{F}_x$ 是闭集，因X紧，故$\widetilde{F}_x$ 是X 中的紧集. 因而有界.

参 考 文 献

[1] Butnariu, D., Fixed points for fuzzy mappings, *Fuzzy Sets and Systems*, 7 (1982), 191—207.

[2] Butnariu, D., A fixed point theorem and its application to fuzzy games, *Revue Roumaine Math. Pures Appl.*, 24, 10 (1979), 1424—1432.

[3] Heilpern, S., Fuzzy mappings and fixed point theorem, *J. Math. Anal. Appl.*, 83 (1981), 566—569.

[4] Nadler, Jr., S. B., Multi-valued contraction mappings, *Pacific J. Math.*, 30 (1969), 475—488.

[5] Rhoades, B. E., A comparison of various definitions of contractive mappings, *Tran. Amer. Math. Soc.*, 226 (1977), 257—290.

Fixed Point Theorems for Fuzzy Mappings

Chang Shih-sen

(Department of Mathematics, Sichuan University, Chengdu)

Abstract

Fixed point theorems for fuzzy mappings are of fundamental importance in fuzzy mathematical theory and application investigation This paper presents some new fixed point theorems for fuzzy mapping, whose results generalize and improve the results of [3] and give a partial answer to the unsolved problem suggested in [1].