应用数学和力学，第5卷第1期（1984年1月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

泛系识别理论与大系统泛系运筹学的研究与应用（Ⅰ）

吴　学　谋

（中国数字工程研究所，1983年6月8日收到）

摘　　要

在泛系方法论的框架下，本工作发展一种识别理论与大系统运筹的新研究．我们给出一组关于泛系关系的定理，从事物机理中广义的系统、转化与对称的角度探讨交缘学科的一些基本问题．它们与数理系统科学、思维科学、生物生态医学以及力学基础的方法论研究有着密切的关系，本文给出100个泛系定理．

一、引言，泛系方法论及其发展

泛系方法论是事物机理中广义的系统-转化-对称的一种横断性研究，它和数理科学、系统科学、生物医学、生态学以及思维科学有着密切的联系，着重于泛系关系——一些广义的关系——的数学研究以及这些关系间内、外转化的探讨：宏微、动静、局整、形影、因果、观控、串并、模拟、集散、异同、生克、主次．

泛系方法论是1976年提出来的，现在已经得到了许多专业性发展，形成了诸如泛系逻辑、泛系网络分析、泛系生态学和泛系医学等具体的研究方向．所得到的具体结果涉及控制论、动态规划、动态博奕、模拟理论、聚类分析、图论、自动机、逼近转化论、模糊集论、泛代数、超复变函数、数理逻辑、网络分析、科学方法论、经济学、生物生态医学等学科．

泛系方法论的发展为模式识别和大系统的研究提供了新的框架．本文的目的在于发展这一研究及其应用．在此基础上，我们不仅能讨论识别和大系统的运筹机制，而且可以导出许多重要的有助于我们分析和构造某些力学模型和数学物理模型的数学定理．泛系识别理论和大系统的泛系运筹研究的主要任务是建立有关的对象问题和泛系关系的内、外转化的数学联系，所以，它不同于现有的一些有关的研究．

二、典型的二元关系，δ-算子，泛系模拟

设G是一个给定的集合，$P(G)$表示G的幂集，定义$I=I(G)=\{(x,x)\mid x\in G\}$为$P(G^2)$的一个元素．如果$f,\ g\in P(G^2)$，则定义$f\vee g=f\cup g$，$f\wedge g=f\cap g$，$f^{-1}=\{(y,x)\mid (x,y)\in f\}$，$\bar{f}=G^2-f$，$f\circ g=\{(x,y)\mid \exists t\in G,\ (x,t)\in f,\ (t,y)\in g\}$，$f\leqslant g$表示$f\subset g$．定义$f^{(0)}=I$，

$f^{(1)}=f,\ f^{(2)}=f\circ f,\ f^{(n+1)}=f^{(n)}\circ f, f^t=\bigvee f^{(n)}\ \ (n=1,2,\cdots)$.

G上的典型二元关系定义如下：

$R[G]=\{f|f\in P(G^2), I\leqslant f\}$, $S[G]=\{f|f\in P(G^2), f=f^{-1}\}$, $S_a[G]=\{f|f\in P(G^2), f^{-1}\wedge f\leqslant I\}$, $T[G]=\{f|f\in P(G^2), f^{(2)}\leqslant f\}$, $E_s[G]=R[G]\cap S[G]$, $L_s[G]=R[G]\cap T[G]$, $E[G]=E_s[G]\cap T[G]$, $L[G]=S_a[G]\cap L_s[G]$.

$E_s[G]$, $E[G]$, $L[G]$分别被称为G上的半等价关系、等价关系和半序关系。

只要$f_1\circ f_2\circ\cdots$有意义，我们将把它简写为$(\circ)$-Πf_i，并且定义$\overset{t}{\bigvee} f_i=(\bigvee f_i)^t$。

δ-算子是一组定义如下的ε_i-算子和δ_i-算子。

$\varepsilon_1(g)=g\vee g^{-1}\vee I$, $\varepsilon_2(g)=\varepsilon_1(g\wedge g^{-1})$, $\varepsilon_3(g)=\varepsilon_1(g^t\wedge g^{-t})$, $\varepsilon_4(g)=\varepsilon_1(g\circ g^{-1})$, $\varepsilon_5(g)=\varepsilon_1(g^{-1}\circ g)$, $\varepsilon_{i+5}(g)=\varepsilon_i(\bar{g})\ \ (i=1, 2, \cdots, 5)$, $\delta_j(g)=(\varepsilon_j(g))^t\ \ (j=1, 2, \cdots, 10)$, $\delta_0(g)=\max\{\delta|\delta\in E[G], \delta\leqslant g\}$（只要上式有意义），$\delta_{11}(g)=\delta_0(\varepsilon_2(g))$, $\delta_{12}(g)=\delta_{11}(\bar{g})$。

这些算子与其论域G是有关的，显然，我们有：

定理1. $\varepsilon_i(g)\in E_s[G]$, $\delta_i(g)\in E[G]$。

定理2. 若$\varepsilon_\sigma\in E_s[G]$，那么$\wedge\varepsilon_\sigma$, $\vee\varepsilon_\sigma$, ε_σ^{-1}, $\varepsilon_\sigma^{(n)}\in E_s[G]$，若$\varepsilon_\sigma$对复合是可交换的话，则$(\circ)$-$\Pi\varepsilon_\sigma\in E_s[G]$。

定理3. 若$\delta_\sigma\in E[G]$，那么$\wedge\delta_\sigma$, $\overset{t}{\bigvee}\delta_\sigma$, δ_σ^{-1}, $\delta_\sigma^{(n)}\in E[G]$，当$\delta_\sigma$相对于复合可交换时，还有$(\circ)$-$\Pi\delta_\sigma\in E[G]$。

定理4. 如果$\varepsilon\in E_s[G]$，则$\varepsilon^t\in E[G]$，$\bar{\varepsilon}\vee I\in E_s[G]$。

定理5. 如果$g\in R[G]$，那么对任意的整数$m,n\geqslant 0$，都成立$g^{(n)}\leqslant g^{(n+m)}$，$g^t=\bigvee g^{(i+k)}$ $(i=1,2,\cdots)$，k是任意的非负整数。

证明 因为$I\leqslant g$，所以$g^{(n)}\leqslant g^{(n+1)}$。不断地应用这个不等式，即可得到定理的证明。

注1. 直观地讲，这个定理说明，如果$g\in R[G]$，那么g^t可以用$g^{(n)}$来逼近，$g^{(n)}\to g^t\ (n\to\infty)$. 特别地，若$g\in E_s[G]$，则$g^{(n)}$将趋近于$G$的一个等价关系. 当$G$的基数$|G|$为有限时，若$n$取值$|G|$，则$g^{(n+1)}=g^{(n+m)}=g^t$.

注2. 对于其它的一些典型二元关系，也存在类似于定理2、3的一些结果.

定理6. 如果$g\in A[G]$, $Q\subset G$，则$g\wedge Q^2\in A[Q]$，这里$A\in\{R,S,S_a,T,E_s,L_s,E,L\}$。

证明 因为$I(G)\leqslant g$蕴含着$I(Q)=I(G)\wedge Q^2\leqslant g\wedge Q$. 所以，上面的命题对$R[G]$成立。另外，$(g\wedge Q^2)^{-1}=g^{-1}\wedge Q^2$, $(g\wedge Q^2)^{-1}\wedge(g\wedge Q^2)=g^{-1}\wedge g\wedge Q^2$, $(g\wedge Q^2)^{(2)}\leqslant g^{(2)}\wedge Q^2\wedge g\circ Q^2\wedge Q^2\circ g$，这些式子说明上面的定理对$S[G]$, $S_a[G]$, $T[G]$都是成立的。定理证毕。

如果$f\subset G\times G'$是集合G和G'间的一个二元关系，并且f可以表示为$f=g_1\circ g_2^{-1}$，这里g_1: $G\to g_1(G)$，g_2: $G'\to g_2(G')$, $g_1(G)=g_2(G')$，那么f称为G和G'间的硬模拟（有时也称之为E-模拟）.

如果$x\circ f$, $f\circ y\neq\varnothing$, $(x\in G, y\in G')$，则称f为G和G'间的半硬模拟（E_s-模拟或隐模拟），这里$x\circ f=\{y|(x,y)\in f\}$, $f\circ y=\{x|(x,y)\in f\}$。

定理7. E-模拟是一种特殊的E_s-模拟。

证明 事实上，此时我们有$x\circ f=g_2^{-1}(g_1(x))$, $f\circ y=g_1^{-1}(g_2(y))$，均不是空集。

定理8. 若$f\subset G\times G'$是一个E_s-模拟，则存在一个集合G^*，使得f可表示为$f=g_1^{-1}\circ g_2$，这里g_1: $G^*\to g_1(G^*)=G$，g_2: $G^*\to g_2(G^*)=G'$。并且其逆命题也是正确的。

证明 令f就是所要求的集合G^*，定义g_1, g_2如下：若$(x,y)\in f$，则$g_1(x,y)=x$，$g_2(x,y)=y$。显然，它们满足定理的要求。反过来，若$f=g_1^{-1}\circ g_2$，则$x\circ f=g_2(g_1^{-1}(x))$，

$f\circ y=g_1(g_2^{-1}(y))$，均不是空集．证毕．

定理 9． 若$f\subset G\times G'$，则f是$f\circ G'$和$G\circ f$间的一个E_s-模拟，这里$f\circ G'=\{x|(x,y)\in f,\ y\in G'\}$，$G\circ f=\{y|(x,y)\in f,\ x\in G\}$．

证明是显然的．

定理10． 若$f\subset G\times G'$是一个E_s-模拟，则$f\circ f^{-1}\in E_s[G)$，$f^{-1}\circ f\in E_s[G')$．

证明 由$(x,y)\in f$可推出$(y,x)\in f^{-1}$，所以，$(x,x)\in f\circ f^{-1}$，$\forall x\in G$，于是有$I(G)\leqslant f\circ f^{-1}$．

另外，如果$(x,x')\in f\circ f^{-1}$，则存在$y\in G'$，使得$(x,y)\in f$，$(y,x')\in f^{-1}$，于是$(y,x)\in f^{-1}$，$(x',y)\in f$，这意味着$(x',x)\in f\circ f^{-1}$．即$f\circ f^{-1}\in S[G)$．

综上所述，我们得到$f\circ f^{-1}\in E_s[G)$，利用相同的方法可以证明$f^{-1}\circ f\in E_s[G')$．证毕．

定理11． 若f：$G\to f(G)$，则$f\circ f^{-1}\in E[G)$，$f^{-1}\circ f=I(G')$．

证明 因为映射是一种特殊的E_s-模拟，所以，$f\circ f^{-1}\in E_s[G)$．于是，我们只需要证明$f\circ f^{-1}$满足传递性．事实上，若(x,x')，$(x',x'')\in f\circ f^{-1}$，则存在$y,y'\in f(G)$，使得$(x,y)$，$(x',y')\in f$（这里$f$被看作是$G\times f(G)$的一个子集）且$(y,x')$，$(y',x'')\in f^{-1}$，所以，我们有$(x,y)$，$(x',y)$，$(x',y')$，$(x'',y')\in f$，由映射的定义，$y=f(x)=f(x')$，$y'=f(x')=f(x'')$，所以$f(x'')=f(x)=y=y'$，即$(x,y)\in f$，$(y,x'')\in f^{-1}$，于是有$(x,x'')\in f\circ f^{-1}$．至此就证明了$f\circ f^{-1}\in E[G)$．

反过来，如果$(y,y')\in f^{-1}\circ f$，则存在$x\in G$，使得$(y,x)\in f^{-1}$，$(x,y')\in f$，即$y=f(x)$，$y'=f(x)$，于是有$f^{-1}\circ f\leqslant I(G')$，我们已经证明过$f^{-1}\circ f\geqslant I(G')$，所以$f^{-1}\circ f=I(G')$．证毕．

定理12． 若$f\subset G\times G'$是G和G'间的E_s-模拟，n是任意给定的正的奇数，那么，存在G和G'间的一个E_s-模拟$\varphi\subset G\times G'$，使得$\varphi\circ\varphi^{-1}=(f\circ f^{-1})^{(n)}$，$\varphi^{-1}\circ\varphi=(f^{-1}\circ f)^{(n)}$．

证明 设$n=2r+1$，则$\varphi=(f\circ f^{-1})^{(r)}\circ f$满足定理的要求．

定理13． 若$f\subset G\times G'$是G和G'间的一个E_s-模拟，则$\varphi=(f\circ f^{-1})^t\circ f\subset G\times G'$是$G$和$G'$间的一个$E$-模拟．

证明是显然的．

定理14． 若$f\subset G\times G'$是一个E_s-模拟，$\theta=f\circ f^{-1}$，$\varphi=f^{-1}\circ f$，则$\theta=\bigvee(f\circ y)^2(y\in G')$，$\varphi=\bigvee(x\circ f)^2\ (x\in G)$．

证明 因为$(x,x')\in\theta$等价于存在$y\in G'$，使得(x,y)，$(x',y)\in f$，所以$(x,x')\in(f\circ y)^2$．于是，$\theta\leqslant\bigvee(f\circ y)^2$．反过来，若$(x,x')\in\bigvee(f\circ y)^2$，则对某个$y$，有$(x,x')\in(f\circ y)^2$，即$(x,y)$，$(x',y)\in f$，也就是$(x,x')\in\theta$．所以，$\bigvee(f\circ y)^2\leqslant\theta$．综合上面两个不等式，即得到$\theta=\bigvee(f\circ y)^2$．同类似的方法，我们也可证明第二个关系式．

定理15． 在上面定理的条件下，我们可以得到$f^{-1}\circ\theta^{(n)}\circ f=\varphi^{(n+1)}$，$f^{-1}\circ\theta^t\circ f=\varphi^t$，$f\circ\varphi^{(n)}\circ f^{-1}=\theta^{(n+1)}$，$f\circ\varphi^t\circ f^{-1}=\theta^t$．

证明 事实上，$f^{-1}\circ\theta\circ f=f^{-1}\circ f\circ f^{-1}\circ f=\varphi^{(2)}$，$f\circ\varphi\circ f^{-1}=f\circ f^{-1}\circ f\circ f^{-1}=\theta^{(2)}$，利用数学归纳法即可证明$f^{-1}\circ\theta^{(n)}\circ f=\varphi^{(n+1)}$，$f\circ\varphi^{(n)}\circ f^{-1}=\theta^{(n+1)}$．

另外，$f^{-1}\circ\theta^t\circ f=f^{-1}\circ(\bigvee\theta^{(n)})\circ f=\bigvee f^{-1}\circ\theta^{(n)}\circ f=\bigvee\varphi^{(n+1)}=\varphi^t$，$f\circ\varphi^t\circ f^{-1}=f\circ(\bigvee\varphi^{(n)})\circ f^{-1}=\bigvee f\circ\varphi^{(n)}\circ f^{-1}=\bigvee\theta^{(n+1)}=\theta^t$．证毕．

定理16． 若$f\subset G\times G'$是一个E_s-模拟，$\theta\in E_s[G)$，则$f^{-1}\circ\theta\circ f\in E_s[G)$．

证明 因为$I(G)\leqslant\theta$，所以$f^{-1}\circ f\leqslant f^{-1}\circ\theta\circ f$．利用定理 10，我们有$I(G')\leqslant f^{-1}\circ f$．所

以，$f^{-1}\circ\theta\circ f\in R[G']$．另外，我们有 $(f^{-1}\circ\theta\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ\theta^{-1}\circ f=f^{-1}\circ\theta\circ f$，所以，$f^{-1}\circ\theta\circ f\in S[G']$．综上所述，我们就得到了定理的证明．

定理17． E_s-模拟$f\subset G\times G'$ 是赋形当且仅当下面几个条件之一成立：$f^{-1}\circ\bar{A}[G]\circ f\subset\bar{A}[G']$ $(A=E_s$或R，$\bar{A}[G]=\{\delta|\bar{\delta}\in A[G]\})$，$f^{-1}\circ\overline{I(G)}\circ f\leqslant\overline{I(G')}$，$f\circ f^{-1}=I(G)$，$(x\circ f)\cap(y\circ f)=\varnothing(\forall x\neq y)$．

对于投影也成立与之类似的结果．更进一步，我们容易证明：

定理18． 设$f\subset G\times G'$是一个赋形，$\theta\in P(G^2)$，则$f^{-1}\circ\theta^{(n)}\circ f=(f^{-1}\circ\theta\circ f)^{(n)}$，$f^{-1}\circ\theta^t\circ f=(f^{-1}\circ\theta\circ f)^t$．若$f$是一个投影，则$f^{-1}\circ\varepsilon_1(\theta)\circ f=\varepsilon_1(f^{-1}\circ\theta\circ f)$．

定理19． 若$f\subset G\times G'$是一个赋形，$\theta\in P(G^2)$，则当$\delta=\delta_i,\varepsilon_i$，$i=1,2,\cdots,5,\theta\in R[G]$时，$f^{-1}\circ\delta(\theta)\circ f=\delta(f^{-1}\circ\theta\circ f)$．

定理20． 若 $f\subset G\times G'$ 是一个一般二元关系，$\theta\in P(G^2)$，则 $f^{-1}\circ\varepsilon_1(\theta)\circ f\vee I(G')=\varepsilon_1(f^{-1}\circ\theta\circ f)\vee f^{-1}\circ f$，$f^{-1}\circ\varepsilon_2(\theta)\circ f\leqslant\varepsilon_2(f^{-1}\circ\theta\circ f)\vee f^{-1}\circ f$．

证明　事实上，$f^{-1}\circ(\theta\vee\theta^{-1}\vee I(G))\circ f\vee I(G')=f^{-1}\circ\theta\circ f\vee f^{-1}\circ\theta^{-1}\circ f\vee f^{-1}\circ f\vee I(G')=\varepsilon_1(f^{-1}\circ\theta\circ f)\vee f^{-1}\circ f$．$f^{-1}\circ[(\theta\wedge\theta^{-1})\vee I(G)]\circ f=f^{-1}\circ(\theta\wedge\theta^{-1})\circ f\vee f^{-1}\circ f\leqslant(f^{-1}\circ\theta\circ f)\wedge(f^{-1}\circ\theta^{-1}\circ f)\vee I(G')\vee f^{-1}\circ f=\varepsilon_2(f^{-1}\circ\theta\circ f)\vee f^{-1}\circ f$．

定理21． 若 $f\subset G\times G'$是一个E_s-模拟，那么 $f^{-1}\circ\varepsilon_1(\theta)\circ f\geqslant\varepsilon_1(f^{-1}\circ\theta\circ f)$，$f^{-1}\circ\theta^{(n)}\circ f\leqslant(f^{-1}\circ\theta\circ f)^{(n)}$，$f^{-1}\circ\theta^t\circ f\leqslant(f^{-1}\circ\theta\circ f)^t$ 对 $\theta\in P(G^2)$ 成立，且当 $\theta\in R[G]$，$\delta=\varepsilon_i,\delta_i$，$i=1,2,\cdots,5$时，$f^{-1}\circ\delta(\theta)\circ f\leqslant\delta(f^{-1}\circ\theta\circ f)$．

证明　事实上，$f^{-1}\circ\varepsilon_1(\theta)\circ f=f^{-1}\circ\theta\circ f\vee f^{-1}\circ\theta^{-1}\circ f\vee f^{-1}\circ f\geqslant\varepsilon_1(f^{-1}\circ\theta\circ f)$．

$f^{-1}\circ\theta^{(n)}\circ f\leqslant f^{-1}\circ\theta\circ f\circ f^{-1}\circ\cdots\circ f(n\text{次})\leqslant(f^{-1}\circ\theta\circ f)^{(n)}$．

$f^{-1}\circ\theta^t\circ f=f^{-1}\circ(\vee\theta^{(n)})\circ f=\vee f^{-1}\circ\theta^{(n)}\circ f\leqslant\vee(f^{-1}\circ\theta\circ f)^{(n)}=(f^{-1}\circ\theta\circ f)^t$．

有了这些关系式，就可很容易地证明上面关于δ的几个不等式．证毕．

定理22． 对$\theta\in P(G^2)$，我们有$\delta_1(\varepsilon_i(\theta))=\delta_i(\theta)$，$i=1,2,\cdots,10$，$\delta_{11}(\theta)\leqslant\varepsilon_2(\theta)$，$\delta_{12}(\theta)\leqslant\varepsilon_7(\theta)$．

证明　事实上，$\delta_1(\varepsilon_i(\theta))=(\varepsilon_i(\theta))^t$，$\delta_{11}(\theta)=\delta_0(\varepsilon_2(\theta))\leqslant\varepsilon_2(\theta)$，$\delta_{12}(\theta)=\delta_{11}(\bar{\theta})\leqslant\varepsilon_2(\bar{\theta})=\varepsilon_7(\theta)$．

定理23． 对任意给定的$\theta\in P(G^2)$，我们有$\varepsilon_3(\theta)=\delta_3(\theta)$．

证明　因为$\theta^t\wedge\theta^{-t}\leqslant\theta^t$，$\theta^{-t}$，所以，$(\theta^t\wedge\theta^{-t})^{(2)}\leqslant\theta^t$，$\theta^{-t}$，于是，$(\theta^t\wedge\theta^{-t})^{(2)}\leqslant\theta^t\wedge\theta^{-t}$．根据$(\varepsilon_3(\theta))^{(2)}\leqslant\varepsilon_3(\theta)$，我们有$\varepsilon_3(\theta)\in E[G]$．所以，$\delta_3(\theta)=(\varepsilon_3(\theta))^t=\varepsilon_3(\theta)$．

定理24． 若$g_\sigma\in P(G^2)$，则$\varepsilon_i(Ag_\sigma)=A\varepsilon_i(g_\sigma)$，$i=1,2$，$A=\wedge,\vee$．

证明　事实上，$\varepsilon_1(\wedge g_\sigma)=(\wedge g_\sigma)\vee(\wedge g_\sigma)^{-1}\vee I=(\wedge g_\sigma)\vee(\wedge g_\sigma^{-1})\vee I=\wedge(g_\sigma\vee g_\sigma^{-1}\vee I)$．

同样可以证明其它的关系式．

定理25． 任给 $g\in P(G^2)$，我们有 $\delta_1(g)=\delta_1(g)^t=\vee\{\vee(\circ)\text{-}\Pi g_i\ (i=1,2,\cdots,n;\ g_i\in\{g,g^{-1},I\})\}\ (n=0,1,2,\cdots)$．

证明　根据 $\delta_1(g)$ 的定义，我们有 $\delta_1(g)=(\varepsilon_1(g))^t=\vee\varepsilon_1(g)^{(n)}$，而 $\varepsilon_1(g)^{(n)}=\vee(\circ)\text{-}\Pi g_i\ (i=1,2,\cdots,m;\ m\leqslant n)$．于是定理得证．

定理26． 任给$g\in P(G^2)$，我们有$\varepsilon_6(\varepsilon_1(g))=\varepsilon_7(g)$，$\varepsilon_6(\varepsilon_2(g))=\varepsilon_6(g)$．

证明　$\varepsilon_6(\varepsilon_1(g))=\varepsilon_1(\bar{\theta})=\bar{\theta}\vee\bar{\theta}^{-1}\vee I=\bar{\theta}\vee I=(\bar{g}\wedge\bar{g}^{-1}\wedge\bar{I})\vee I=(\bar{g}\wedge\bar{g}^{-1})\vee I=\varepsilon_2(\bar{g})=\varepsilon_7(g)$，这里$\theta=\varepsilon_1(g)$。类似地可以证明$\varepsilon_6(\varepsilon_2(g))=\varepsilon_6(g)$．

定理27. 任给$\theta \in E_s[G]$，若$\theta' = \varepsilon_6(\theta)$，则$\varepsilon_6(\theta') = \theta$.

证明 事实上，$\varepsilon_6(\theta') = \varepsilon_5(\bar{\theta}') = \bar{\theta}' \vee I = (\theta \wedge \bar{I}) \vee I = \theta$. 证毕.

下面我们讨论相应于半等价关系的商集，它和模糊聚类以及泛系关系的内外转化有着密切的关系，对于识别问题和大系统问题的研究将提供新的理论工具.

如果$\varepsilon \in E_s[G]$，设$G_i = \max\{Q | Q \subset G, Q^2 \leqslant \varepsilon\}$，记作$G_i \subset G(d\varepsilon)$. 上式的所有解的全体$\{G_i\}$记作$G/\varepsilon$，称之为相应于$\varepsilon$的$G$的商系统，简记为$G = \bigcup G_i\ (d\varepsilon)$，并且记$\|\varepsilon\| = |G/\varepsilon|$，$\sigma(\varepsilon) = \{i\}$. 更进一步，我们定义$\varepsilon$的自然诱导为$G$和$G/\varepsilon$间的$E_s$-模拟：$f_\varepsilon \subset G \times G/\varepsilon$，$(x, G_i) \in f_\varepsilon$当且仅当$x \in G_i \subset G(d\varepsilon)$.

定理28. 若$G = \bigcup G_i(d\varepsilon)$，则$G = \bigcup G_i$.

证明 首先，因为$G_i \subset G$，所以$\bigcup G_i \subset G$，若$x \in G$，则$(x,x) \in I(G) \leqslant \varepsilon$，记$P_x = \{Q | Q^2 \in P(G^2), Q^2 \leqslant \varepsilon, (x,x) \in Q^2\}$，显然，$P_x \neq \varnothing$，且形成$P(G)$的子集，令$E$是$P_x$中的某一极大元，则$x \in E$. 所以，$G \subset \bigcup G_i$. 综合这两个式子，即得到定理的证明.

定理29. 若$G = \bigcup G_i(d\varepsilon)$，且对某个$i \in \sigma(\varepsilon)$，$x, y \in G_i$，则$(x,y) \in \varepsilon$. 如果$\neg \exists i(x, y \in G_i)$，则$(x,y) \in \bar{\varepsilon}$. 即$\exists i(x,y \in G_i)$等价于$(x,y) \in \varepsilon$.

证明 事实上，从G_i为满足$G_i^2 \leqslant \varepsilon$的极大集可以容易地得出证明.

定理30. 若$G = \bigcup G_i\ (d\varepsilon)$，则$\vee G_i^2 = \varepsilon$.

证明 由定义，我们有$G_i^2 \leqslant \varepsilon$，所以$\vee G_i^2 \leqslant \varepsilon$. 另一方面，根据定理28，$G = \bigcup G_i$.所以，$\vee G_i^2 \in E_s[G]$. 如果$(x, y) \in \varepsilon - \bigcup G_i^2$，则对任意的$i$，$(x, y) \bar{\in} G_i^2$，即$\neg \exists i(x, y \in G_i)$. 由定理29，可得$(x,y) \bar{\in} \varepsilon$. 与$(x,y) \in \varepsilon$的前提矛盾. 证毕.

定理31. 若$\varepsilon \in E_s[G]$，则$f_\varepsilon \circ f_\varepsilon^{-1} = \varepsilon$，$f_\varepsilon^{-1} \circ f_\varepsilon = \{(G_i, G_j) | G_i, G_j \subset G(d\varepsilon), G_i \cap G_j \neq \varnothing\}$.

证明 由诱导和复合的定义，根据定理29，即可得证.

定理32. 若$G = \bigcup G_i(d\varepsilon)$，$\varepsilon \in E[G]$，则$G_i$两两不相交.

证明 假若$x \in G_i \cap G_j$，则对任意$x_i \in G_i, x_j \in G_j$，我们有$(x,x_i), (x,x_j) \in \varepsilon$，由$\varepsilon$的对称性，可以得出$(x_i,x), (x,x_j) \in \varepsilon$. 根据$\varepsilon$的传递性，我们有$(x_i,x_j) \in \varepsilon$. 所以$(G_i \cup G_j)^2 \subset \varepsilon$，和$G_i, G_j$的极大性矛盾. 证毕.

定理33. 若$G = \bigcup G_i(d\varepsilon)$，$\varepsilon \in E[G]$，$x \in G_i$，则$x \circ \varepsilon = \varepsilon \circ x = G_i$是包含$x$的等价类.

证明 事实上，若$y \in x \circ \varepsilon$，则$(x,y) \in \varepsilon$，所以$(y,x) \in \varepsilon$，$x \in y \circ \varepsilon$，$y \in \varepsilon \circ x$. 根据$G_i$的极大性，我们有$y \in G_i$，即$x \circ \varepsilon = \varepsilon \circ x \subset G_i$. 另外，$G_i^2 \subset \varepsilon$（即$G_i^2 \leqslant \varepsilon$）蕴含$G_i = x \circ G_i^2 \subset x \circ \varepsilon$. 综上所述，定理得证.

定理34. 若$G = \bigcup G_i(d\varepsilon)$，$\varepsilon \in E[G]$，则$x, y \in G_i$蕴含$(x, y) \in \varepsilon$，$x \in G_i$，$y \in G_j$，$i \neq j$蕴含$(x,y) \bar{\in} \varepsilon$，反之亦然.

证明 由定理29，32，即得证此定理.

定理35. 设$f = \varphi \circ \theta^{-1} \subset G \times G'$是一个硬模拟，则$f \circ f^{-1} \in E[G]$，$f^{-1} \circ f \in E[G']$，$\|f \circ f^{-1}\| = \|f^{-1} \circ f\|$，$G = \bigcup G_i(d f \circ f^{-1})$，$G' = \bigcup G_i \circ f(d f^{-1} \circ f)$，$G_i \circ f = \theta^{-1}(\varphi(G_i))$，$\varphi(G_i) = \theta(G_i \circ f) \in \varphi(G) = \theta(G')$，$f \circ (G_i \circ f) = G_i$.

证明 因为$f \circ f^{-1} = \varphi \circ \theta^{-1} \circ \theta \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1}$，所以，$f \circ f^{-1} \in E[G]$，类似地，$f^{-1} \circ f = \theta \circ \theta^{-1} \in E[G']$. 设$G = \bigcup G_i(d f \circ f^{-1})$，$x, y \in G_i$，则$(x,y) \in f \circ f^{-1}$，$x \circ f = y \circ f$，$(x \circ f) \circ f^{-1} = (y \circ f) \circ f^{-1}$. 所以，$x', y' \in G_i \circ f$蕴含$x' \circ f^{-1} = y' \circ f^{-1}$，自然就有$G_i \circ f \subset G'\ (d f^{-1} \circ f)$，即$G' = \bigcup G_i \circ$

$f(df^{-1}\circ f)$. 所以，$\|f\circ f^{-1}\|=\|f^{-1}\circ f\|$. 由 f 的可逆性，我们有 $f\circ(G_i\circ f)=G_i$. 从定义可直接推出关系式 $G_i\circ f=\theta^{-1}(\varphi(G_i))$，于是 $\varphi(G_i)=\theta(G_i\circ f)\subset\varphi(G)=\theta(G')$. 根据 $G_i^2\leqslant f\circ f^{-1}=\varphi\circ\varphi^{-1}$，且 φ 是映射，可得 $\varphi(G_i)$ 退化为 $\varphi(G)$ 中的一个点. 证毕.

定理36. 设 $\delta\in E[G]$，$\delta'\in E[G']$，$\|\delta\|=\|\delta'\|$，那么，可以找出 G，G' 间的一个硬模拟 $f\subset G\times G'$，使得 $f\circ f^{-1}=\delta$，$f^{-1}\circ f=\delta'$.

证明 因为 $\|\delta\|=\|\delta'\|$，我们可以找出一个一一映射 φ: $G/\delta\to G'/\delta'$，令 $f=f_\delta\circ\varphi\circ f_{\delta'}^{-1}$，则显然有 f 满足定理的要求.

定理37. 若 $\varepsilon\in E_s[G)$，$\delta\in E_s[G')$，$\varphi\subset(G/\varepsilon)\times(G'/\delta)$ 是一个 E_s-模拟，则 $f=f_\varepsilon\circ\varphi\circ f_\delta^{-1}\subset G\times G'$ 是 G 和 G' 间的 E_s-模拟，且 $f\circ f^{-1}=\bigcup(f_\varepsilon\circ\varphi\circ G_i')\times(f_\varepsilon\circ\varphi\circ G_j')$ $(G_i', G_j'\subset G'(d\delta), G_j'\cap G_i'\neq\varnothing)\geqslant\varepsilon$.

证明 根据复合的定义及定理31，即可证明此定理.

定理38. 设 $\varepsilon\in E_s[G)$，$\delta\in E_s[G')$，令 $G=\bigcup G_i(d\varepsilon)$，$G'=\bigcup G_j'(d\delta)$，$f_{ij}=G_i\times G_j'$，$g\subset\sigma(\varepsilon)\times\sigma(\delta)$ 是 $\{i\}$，$\{j\}$ 间的一个 E_s-模拟，则 $f(g)=\bigvee f_{ij}((i,j)\in g)$ 是 G,G' 间 E_s-模拟，且 $f(g)\circ f(g)^{-1}\geqslant\varepsilon=\bigvee f_{ij}\circ f_{ij}^{-1}((i,j)\in g)=\bigvee G_i^2$，$f(g)^{-1}\circ f(g)\geqslant\delta=\bigvee f_{ij}^{-1}\circ f_{ij}((i,j)\in g)=\bigvee(G_j')^2$. 更进一步，对 $Q\subset G$，我们有 $Q\circ f(g)=\bigcup G_j'((i,j)\in g, Q\cap G_i\neq\varnothing)$，$f(g)^{-1}\circ Q^2\circ f(g)=\bigcup G_j'\times G_l'((i,j),(k,l)\in g; Q\cap G_i; Q\cap G_k\neq\varnothing)$.

证明 设 $x\in G$，则存在某个 $i_0\in\sigma(\varepsilon)$ 使得 $x\in G_{i_0}\subset G(d\varepsilon)$，所以，对某个 j，$x\circ f(g)=\bigvee x\circ f_{ij}\supset x\circ f_{i_0j}$，$x\circ f_{i_0j}=x\circ(G_{i_0}\times G_j')=G_j'\neq\varnothing$，类似地，对任意 $y\in G'$，$f(g)\circ y\neq\varnothing$. 所以，$f(g)$ 是 G,G' 间的 E_s-模拟.

令 $G'(j,m)=G_j'\cap G_m'$. 显然，$f(g)\circ f(g)^{-1}=\bigvee G_i\times G_l(G'(j,m)\neq\varnothing, (i,j), (l,m)\in g)\geqslant\varepsilon$. 类似地，可以证明 $f(g)^{-1}\circ f(g)\geqslant\delta$. 定理的第三部份可由直接计算得出. 证毕.

定理39. 在上面定理的假设下，若 $\sigma(\varepsilon)=\sigma(\delta)$，$g=I(\sigma(\varepsilon))$ 且 $\varepsilon\in E[G)$，$\delta\in E[G')$，则 $f(g)$ 退化为硬模拟.

证明 本定理是上面定理的直接推论.

定理40. 设 $f\subset G\times G'$ 是 E_s-模拟，$\delta\in E_s[G)$，$G=\bigcup G_i(d\delta)$，则 $(G_i\circ f)^2\subset f^{-1}\circ\delta\circ f$，$G'=\bigcup G_i\circ f$，$\bigvee(G_i\circ f)^2=f^{-1}\circ\delta\circ f$.

证明 事实上，若 $y,y'\in G_i\circ f$，则存在 $x,x'\in G_i$，使得 $(x,y),(x',y')\in f$. 所以 $(x,x')\in\delta$，$(y,y')\in f^{-1}\circ\delta\circ f$，即 $(G_i\circ f)^2\subset f^{-1}\circ\delta\circ f$.

对任意给定的 $y\in G'$，选取 G_i 使得 $G_i\cap(f\circ y)\neq\varnothing$，则 $y\in G_i\circ f$. 所以 $G'\subset\bigcup G_i\circ f$. 而其反包含关系是显然成立的.

若 $(y,y')\in f^{-1}\circ\delta\circ f$，则存在 $(x,x')\in\delta$，使得 (x,y)，$(x',y')\in f$. 所以，存在某个 i，$y,y'\in G_i\circ f$. 于是 $f^{-1}\circ\delta\circ f\leqslant\bigvee(G_i\circ f)^2$. 其反不等式可由 $G'=\bigcup G_i\circ f$ 直接导出. 证毕.

定理41. 设 $f\subset G\times G'$ 是 E_s-模拟，令 $\varepsilon=f\circ f^{-1}$，$\delta=f^{-1}\circ f$，$G=\bigcup G_i(d\varepsilon^t)$，则我们有 $G'=\bigcup G_i\circ f(d\delta^t)$，且存在1—1映射 φ: $G/\varepsilon^t\to G'/\delta^t$ 使得 $\varphi(G_i)=G_i\circ f$，且当 $Q\subset G$ 时，$(Q\circ a)\circ f=(Q\circ f)\circ b=(Q\circ\delta_1(f))\cap G'$，$h(f)=f_a\circ\varphi\circ f_b^{-1}\subset G\times G'$ 是硬模拟，其观控水平为 G/a 或 G'/b，这里 $a=\varepsilon^t$，$b=\delta^t$，$\delta_1(f)=(f\vee f^{-1}\vee I(G\cup G'))^t\in E[G\cup G')$.

证明 该定理可由定理 13，14，15，35 推出.

定理42. 在定理41的条件下，我们有 $a=\delta_1(f)\cap G^2$，$b=\delta_1(f)\cap(G')^2$，$\delta_1(f)=a\overset{t}{\vee}b$，$G\cup G'=\bigcup Q_i(d\delta_1(f))$，$Q_i=G_i\cup G_i\circ f$，$G_i=(x\circ\delta_1(f))\cap G(x\in G_i\cup G_i\circ f)$，$G_i\circ f=(x\circ\delta_1(f)$

$\cap G'$ $(x \in G_i \cup G_i \circ f$，这里$\delta_1(f)=(f \vee f^{-1} \vee I(G \cup G'))^t \in E[G \cup G')$.

证明　容易看出，Q_i是由那些通过f或者f^{-1}的道路连接起来的点所组成的连通块．根据ε和δ的定义，a,b分别是$\delta_1(f)$在G，G'中的那一部分．由此即得出定理．证毕．

定理43．　若$G=\bigcup G_i(d\delta)$，$\delta \in E[G)$，则$\delta=\vee G_i^2$，$\overset{t}{\vee} G_i^2=\wedge \bar{g}_{ij}$，$g_{ij}=G_i \times G_j, i \neq j$.

证明　事实上，$\vee G_i^2=\delta=\delta^t=\overset{t}{\vee} G_i^2$．另外，若$(x,y) \bar{\in} \delta$，则$\exists ij$ $(i \neq j$，$x \in G_i$，$y \in G_j)$，即$\exists ij$ $(i \neq j$，$(x,y) \in g_{ij})$，反之亦然．所以，$\bar{\delta}=\vee g_{ij}$ $(i \neq j)$，$\delta=\wedge \bar{g}_{ij}(i \neq j)$．证毕．

由定理29，我们可推出一组容易证明但很重要的定理．

定理44．　设$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_1(g^a))$，$g \in P(G^2)$，$a \in \{(n),t\}$则$\exists i(x,y \in G_i)$等价于$x=y$,或者$(x,y) \in g^a$，或者$(x,y) \in g^{-a}$．所以$\neg \exists i(x,y \in G_i)$等价于$x \neq y,(x,y) \bar{\in} g^a$并且$(x,y) \bar{\in} g^{-a}$.

定理45．　设$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_2(g^a))$，则$\exists i(x,y \in G_i)$等价于$x=y$或者$((x,y) \in g^a$且$(x,y) \in g^{-a})$．所以，$\neg \exists i(x,y \in G_i)$等价于$x \neq y$并且$((x,y) \bar{\in} g^a$或者$(x,y) \bar{\in} g^{-a})$.

定理46．　若$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_7(g^a))$,则$\exists i(x,y \in G_i)$等价于$x=y$或者$((x,y) \bar{\in} g^a$并且$(x,y) \bar{\in} g^{-a})$．所以，$\neg \exists i(x,y \in G_i)$等价于$x \neq y$，且$((x,y) \in g^a$或者$(x,y) \in g^{-a})$.

定理47．　设$G=\bigcup G_i(d\delta)$，$\delta \in E[G)$，$\varepsilon \in P(G^2)$．若$\delta \leqslant \varepsilon$，则$\exists i(x,y \in G_i)$蕴含$(x,y) \in \varepsilon$．若$\varepsilon \leqslant \delta$，则$\exists ij(i \neq j$，$x \in G_i$，$y \in G_j)$蕴含$(x,y) \bar{\in} \varepsilon$.

定理48．　设$G=\bigcup G_i(d\delta)$，$\delta \in E[G)$，$g \in P(G^2)$，$a \in \{(n),t\}$，若$\delta \leqslant \varepsilon_1(g^a)$,则$\exists i(x,y \in G_i)$蕴含$x=y$，或者$(x,y) \in g^a$，或者$(x,y) \in g^{-a}$．若$\varepsilon_1(g^a) \leqslant \delta$，则$\exists ij(i \neq j$，$x \in G_i$，$y \in G_j)$蕴含$x \neq y$，$(x,y) \bar{\in} g^a$，且$(x,y) \bar{\in} g^{-a}$.

定理49．　设$G=\bigcup G_i(d\delta)$，$\delta \in E[G)$，$g \in P(G^2)$，$a \in \{(n),t\}$．若$\delta \leqslant \varepsilon_2(g^a)$，则$\exists i(x,y \in G_i)$蕴含$x=y$或者$((x,y) \in g^a$且$(x,y) \in g^{-a})$．若$\varepsilon_2(g^a) \leqslant \delta$，则$\exists ij(i \neq j$，$x \in G_i$，$y \in G_j)$蕴含$x \neq y$且$((x,y) \bar{\in} g^a$或$(x,y) \bar{\in} g^{-a})$.

定理50．　设$G=\bigcup G_i(d\delta)$，$\delta \in E[G)$，$g \in P(G^2)$，$a \in \{(n),t\}$．若$\delta \leqslant \varepsilon_7(g^a)$，则$\exists i(x,y \in G_i)$蕴含$x=y$或者$((x,y) \bar{\in} g^a$且$(x,y) \bar{\in} g^{-a})$．若$\varepsilon_7(g^a) \leqslant \delta$，则$\exists ij(i \neq j$，$x \in G_i$，$y \in G_j)$蕴含$x \neq y$并且$((x,y) \in g^a$或$(x,y) \in g^{-a})$.

定理51．　若$G=\bigcup G_i(d\varepsilon)$，$\varepsilon \in E_s[G)$，则$\varepsilon=\vee G_i^2$，$\bar{\varepsilon}=\wedge \overline{G_i^2}$.

定理52．　若$\varepsilon \in E_s[G)$且$G=\bigcup G_i(d\delta_0(\varepsilon))$，则$\exists i(x,y \in G_i)$蕴含$(x,y) \in \varepsilon$．若$G=\bigcup G_i(d\delta_1(\varepsilon))$，则$\exists ij(i \neq j$，$x \in G_i$，$y \in G_j)$蕴含$(x,y) \bar{\in} \varepsilon$.

若$G=\bigcup G_i(d\delta)$，$\delta \in E[G)$，$g \in P(G^2)$且x，$y \in G_i$蕴含$x=y$或者$(x,y) \bar{\in} (g \vee g^{-1})^a$，$a \in \{(n),t\}$，那么$G$称为可$a$-着色．这一概念是著名的着色问题的推广．对于这一问题，我们有如下的泛系原则．

定理53．　设图$S=(G,g)$，则分划$G=\bigcup G_i(d\delta_0(\varepsilon_7((g \vee g^{-1})^a)))$是一种$a$-着色．

由此定理可得推论如下：

定理54．　设$S=(G,g)$是平面图，则$\min\|\delta_{12}(g)\| \leqslant 5$．若四色猜想成立，则$\min\|\delta_{12}(g)\| \leqslant 4$.

定理55．　设图$S=(G,g)$，若$\delta \in E[G)$，$\delta \leqslant I \vee \bar{\theta}$，$\theta=(g \vee g^{-1})^a$，$a \in \{(n),t\}$，则分划$G=\bigcup G_i(d\delta)$实现一个$a$-着色．

定理56．　设图$S=(G,g)$，若$\delta \in E[G)$，$\delta \leqslant I \vee \bar{\theta}$，$\theta=\varepsilon_1(g)^{(n)}$，则分划$G=\bigcup G_i(d\delta)$实现任意的$(m)$-着色，$m \leqslant n$.

三、泛系集散分析

在半等价关系的泛系研究中，我们探讨了集散关系．下面的讨论是上面工作的继续和推广．事实上，许多其它的泛系关系常常可以转化成一定的集散关系．特别是，连通与解耦关系、邻域关系、渐变和突变关系、辨异和求同关系，以及某些矛盾关系都可通过泛系集散关系来分析．与大系统运筹紧密相关的是匹配问题、分解问题和单向显化问题的应用．

定理57． 若$\delta\in E_s[G]$，$G=\bigcup G_i(d\delta)$，$G=\bigcup G'_j(d\varepsilon_\sigma(\delta))$，则$\exists j(x,y\in G'_j)$等价于$x=y$或$\neg\exists i(x,y\in G_i)$，对$\delta\in E[G]$，它等价于$x=y$或$\exists ik(i\neq k,x\in G_i,\ y\in G_k)$．类似地，$\exists i(x,y\in G_i)$等价于$x=y$或$\neg\exists j(x,y\in G'_j)$（或$\exists jm(j\neq m,\ x\in G'_j,\ y\in G'_m)$对$\varepsilon_6(\delta)\in E[G]$）．

这个定理的另一个重要形式是下面的原理．

定理58． 设$g\in P(G^2)$，$a\in\{(n),t\}$，$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_1(g^a))=\bigcup G'_j(d\varepsilon_7(g^a))$．若$\exists j(x,y\in G'_j)$，则$x=y$或$\neg\exists i(x,y\in G_i)$，即$x=y$或$((x,y)\bar{\in}g^a$且$(x,y)\bar{\in}g^{-a})$．相似地，若$\exists i(x,y\in G_i)$，则$x=y$或$\neg\exists j(x,y\in G'_j)$，即$x=y$或$(x,y)\in g^a$或$(x,y)\in g^{-a}$．

对于不同的连通解耦关系，我们引入下面的几个定义．

连通：$(x,y)\in g^t\vee g^t\vee I$；强解耦：$(x,y)\in(\overline{g^t}\wedge\overline{g^t})\vee I$；$N$步连通：$(x,y)\in\varepsilon_1(g^{(n)})$；$N$步解耦：$(x,y)\in\varepsilon_7(g^{(n)})$；直接连通：1步连通；直接解耦（独立）：1步解耦；强连通：$(x,y)\in\varepsilon_3(g)$；弱解耦：$(x,y)\in\overline{g^t}\vee\overline{g^{-t}}\vee I$；$N$步强连通：$(x,y)\in\varepsilon_2(g^{(n)})$；$N$步弱解耦：$(x,y)\in\varepsilon_6(g^{(n)})$；链连通；$g\in L[G]$，$(x,y)\in\varepsilon_1(g)$；反链解耦：$g\in L[G]$，$(x,y)\in\varepsilon_7(g)$；$E$型弱连通：$(x,y)\in\delta_1(g)$；$E$型直接解耦（$E$型独立）：$(x,y)\in\delta_{12}(g)$；$E$型直接连通：$(x,y)\in\delta_0(\varepsilon_1(g))$；$E$型弱解耦：$(x,y)\in\delta_6(g)$．

由这些定义我们可以得到下面的结果．

定理59． 若$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_3(g))=\bigcup G'_j(d\varepsilon_6(\varepsilon_3(g)))$，则$G_i$是强连通，$G'_j$是弱解耦．

定理60． 若$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_1(g^{(n)}))=\bigcup G'_j(d\varepsilon_7(g^{(n)})$，则$G_i$是$n$步连通，$G'_j$是$n$步解耦．

定理61． 若$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_1(g^t))=\bigcup G'_j(d\varepsilon_7(g^t))$，则$G_i$是连通的并且$G'_j$是强解耦．

定理62． 若$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_2(g^{(n)}))=\bigcup G'_j(d\varepsilon_6(g^{(n)}))$，则$G_i$是$n$步强连通并且$G'_j$是$n$步弱解耦．

定理63． 若$G=\bigcup G_i(d\delta_1(g))=\bigcup G'_j(d\delta_{12}(g))$，则$G_i$是$E$型弱连通并且$G'_j$是$E$型直接解耦．

定理64． 若$G=\bigcup G_i(d\delta(\varepsilon_1(g))=\bigcup G'_j(d(\delta_6(g))$，则$G_i$是$E$型直接连通并且$G'_j$是$E$型弱解耦．

定理65． 若$g\in L[G]$，$G=\bigcup G_i(d\varepsilon_1(g))=\bigcup G'_j(d\varepsilon_7(g))$，则$G_i$是一个链，$G'_j$是一个反链．

由这些定理我们可以得到下面称为泛系连通解耦原理的重要结论．

定理66． 若$Q(\in G/\varepsilon_m(g))$有某种连通解耦性，则$Q'(\in G/\delta_0(\varepsilon_m(g)))$有相同的$E$型连通解耦性，$Q''(\in G/\delta_m(g))$有某种$E$型$(\varepsilon_m(g))^{(n)}$连通解耦性，$Q'''(\in G/\varepsilon_6(\varepsilon_m(g)))$有相应对立的连通解耦性．而且$G$可以对$\delta(g)$作连通解耦分解的充要条件是$\delta(g)\neq G^2$，这里$\delta(g)\in\{\varepsilon_m(g),\delta_0(\varepsilon_m(g)),\delta_m(g),\varepsilon_6(\varepsilon_m(g))\}$．

定理67. 若$f \subset G \times G'$是G和G'之间的E_s-模拟，并且$G_i \subset G(d\varepsilon_7(f \circ f^{-1}))$，$f_i = f \cap (G_i \times G')$，则对于$x, x' \in G_i, x \neq x'$，我们有$(x \circ f_i) \cap (x' \circ f_i) = \varnothing$。

证明 因为$(x, x') \in G_i^2$且$(x, x') \bar{\in} f \circ f^{-1}$，若$t \in (x \circ f_i) \cap (x' \circ f_i)$，则$(x, t), (x', t) \in f$，这导至了矛盾。

定理68. 在上面定理的条件下，f_i是赋形，f_i^{-1}：$G_i \circ f \to G_i$并且$f_i \circ f_\delta$，$f_\delta^{-1} \circ f_i^{-1}$是两个1—1对应，$f_i \circ f_\delta$：$G_i \to (G_i \circ f)/\delta$；$f_\delta^{-1} \circ f_i^{-1}$：$(G_i \circ f)/\delta \to G_i$，这里$\delta = f_i^{-1} \circ f_i$，$f_\delta$是自然诱导，$f_\delta$：$G_i \circ f \to (G_i \circ f)/\delta$。

类似地，若$G'_i \subset G'(d\varepsilon_7(f^{-1} \circ f))$，则$g_i = f \cap (G \times G'_i)$是一映射，$g_i$：$f \circ G'_i \to G'_i$。

记$\overset{*}{\varepsilon}_7(f \circ f^{-1}) = \max|G_i|$，则我们有

定理69. 若$f \subset G \times G'$是G和G'之间的E_s-模拟，则我们可以用f不混淆地从G发射$\overset{*}{\varepsilon}_7(f \circ f^{-1})$种信息到$G'$。

设$G(\sigma)$，$G'(\sigma)$ $(\sigma \in B)$ 是一些给定的集合，$f_\sigma \subset G(\sigma) \times G'(\sigma)$，$G = \Pi G(\sigma)$，$G' = \Pi G'(\sigma)$，通过改变坐标分量的秩序，得到1—1映射$\varphi$，$\varphi$：$\Pi(G(\sigma) \times G'(\sigma)) \to G \times G'$，记$f_\sigma$的合取积$\hat{\Pi} f_\sigma = \varphi(\Pi f_\sigma)$。

定理70. 设$f_\sigma \subset G(\sigma) \times G'(\sigma)$是$E_s$-模拟，$f = \hat{\Pi} f_\sigma$，$Q(\sigma) \subset G(\sigma)$，$Q(\sigma)^2 \leqslant \varepsilon_7(f_\sigma \circ f_\sigma^{-1})$，则$(\Pi Q(\sigma))^2 \leqslant \varepsilon_7(f \circ f^{-1})$。而且，$\overset{*}{\varepsilon}_7(f \circ f^{-1}) \geqslant \Pi \overset{*}{\varepsilon}_7(f_\sigma \circ f_\sigma^{-1})$。

证明 若$x, x' \in \Pi Q(\sigma)$，并且$(x, x') \bar{\in} \varepsilon_7(f \circ f^{-1})$，则$(x, x') \bar{\in} \overline{f \circ f^{-1}} \vee I$。即是说$(x, x') \in f \circ f^{-1} \wedge \bar{I}$或$x \neq x'$且$(x, x') \in f \circ f^{-1}$。因此，存在$y \in G'$使得$(x, y), (x', y) \in f$。所以对所有的$\sigma$我们有$(x_\sigma, y_\sigma), (x'_\sigma, y_\sigma) \in f_\sigma$或者$(x_\sigma, x'_\sigma) \in f_\sigma \circ f_\sigma^{-1}$。这就同$Q(\sigma)^2 \leqslant \varepsilon_7(f_\sigma \circ f_\sigma^{-1})$矛盾。证毕。

基于赋形守恒性，定理 67,68 可导出下面的结果。

定理71. 在定理68的条件下，若$\delta \in A[G_i]$，$A \in \{R, S, S_a, T, E_a, E, L_s, L\}$，则$f^{-1} \circ \delta \circ f \in A[G_i \circ f]$。

定理72. 在定理 68 的条件下，若 $\theta \in P(G_i^2)$，则$f^{-1} \circ \theta^{(n)} \circ f = (f^{-1} \circ \theta \circ f)^{(n)}$，$f^{-1} \circ \theta^t \circ f = (f^{-1} \circ \theta \circ f)^t$。

定理73. 在定理68的条件下，若$\theta \in R[G_i]$，δ，δ'是分别定义在G_i和$G_i \circ f$上的δ_i或ε_i $(i = 1, \cdots, 5)$，则$f^{-1} \circ \delta(\theta) \circ f = \delta'(f^{-1} \circ \theta \circ f)$。

定理74. 在定理68的条件下，定义在G_i上的自返性，对称性，反对称性，传递性，半等价性，等价性，半序性，拟半序关系，反半等价关系，辨异关系，不同的泛系连通解耦关系，串并关系，求逆和补关系在转化f下具有守恒性。

同样地，由投影守恒性和定理18，我们有

定理75. 在定理68的条件下，如果$\theta \in P((f \circ G'_i)^2)$。$\delta$和$\delta'$分别是定义在$f \circ G'_i$和$G'_i$上的$\varepsilon_1$算子，则$f^{-1} \circ \delta(\theta) \circ f = \delta'(f^{-1} \circ \theta \circ f)$。

对于泛系因果分析，容易证明

定理76. 在定理68的条件下，若f代表因果关系，则G_i使我们能从结果求得唯一的原因，而G'_i使我们能由原因求得唯一的结果。

对于整个G上的一般守恒性，可以得到

定理77. 串并关系、E_s-关系、求同关系、各种泛系连通性、反关系、具有自返性的ε_i，δ_i $(i = 1, 2, \cdots, 5)$ 关系在E_s-模拟下都是守恒的，反E_s-辨异关系、等价关系、补关系、

各种泛系解耦关系都是赋形守恒的.

四、同态定理和泛系观控性

同态定理是群论和泛代数中的基本定理. 在文献[1]的定理 6, 10, 11, 17, 31, 35～39中, 我们给出了同态定理的若干推广形式. 这里, 我们给出另外的几个新结果.

设ε, $\delta\in E_s[G]$, $\varepsilon\leqslant\delta$, $G=\bigcup G_i(d\varepsilon)=\bigcup G'_j(d\delta)$, 定义$f_{\delta/\varepsilon}$如下: $(G_i,G'_j)\in f_{\delta/\varepsilon}$表示$G_i\subset G'_j$. 定义$\delta/\varepsilon=f_{\delta/\varepsilon}\circ f^{-1}_{\delta/\varepsilon}$. 容易证明下面诸命题.

定理78. $f_{\delta/\varepsilon}$是G/ε和G/δ间的E_s-模拟, $\delta/\varepsilon\in E_s[G/\varepsilon)$, $(G_i,G_k)\in\delta/\varepsilon$的充要条件是$\exists j(G_i,G_k\subset G'_j)$. 进一步, $G/\varepsilon=\bigcup Q_j(d\delta/\varepsilon)$, 这里$Q_j=\{G_i\}(G_i\subset G'_j)$, $\delta/\varepsilon=\bigvee Q^2_j=\bigvee[\{G_i\}(G_i\subset G'_j)]^2$, 若$\varepsilon,\delta\in E[G)$, 则$f_{\delta/\varepsilon}$退化为映射$f_{\delta/\varepsilon}$: $G/\varepsilon\to G/\delta$.

由该定理可得出如下同态定理.

定理79. 设$\delta_\sigma\in E_s[G)$, $\delta=\bigvee\delta_\sigma$, $\varepsilon=\bigwedge\delta_\sigma$, 那么的二元关系都是$E_s$-模拟: $f_{\delta_\sigma}\subset G\times(G/\delta_\sigma)$, $f_\delta\subset G\times(G/\delta)$, $f_\varepsilon\subset G\times(G/\varepsilon)$, $f_{\delta/\delta_\sigma}\subset(G/\delta_\sigma)\times(G/\delta)$, $f_{\delta_\sigma/\varepsilon}\subset(G/\varepsilon)\times(G/\delta_\sigma)$. 如果$\delta_\sigma\in E[G)$, $\delta=\overset{t}{\bigvee}\delta_\sigma$, 则上面的$E_s$-模拟都退化为相应的满同态.

定理80. 设$g_\sigma=G\times G_\sigma$是一些$E_s$-模拟, 且$\delta_\sigma=g_\sigma\circ g^{-1}_\sigma$, $\delta=\bigvee\delta_\sigma$, $\varepsilon=\bigwedge\delta_\sigma$, 则我们有下列的$E_s$-模拟: $f^{-1}_{\delta_\lambda}\circ g_\sigma\subset(G/\delta_\lambda)\times G_\sigma$, $f^{-1}_\sigma\circ g_\sigma\subset(G/\delta)\times G_\sigma$, $f^{-1}_\varepsilon\circ g\subset(G/\varepsilon)\times G_\sigma$, $f_{\delta/\delta_\lambda}\circ f^{-1}_\delta\circ g_\sigma\subset(G/\delta_\lambda)\times G_\sigma$, 等.

定理81. 设$\delta',\delta'',\delta\in E_s[G)$, 并且$\delta'\leqslant\delta''\leqslant\delta$, $G=\bigcup G_i(d\delta)=\bigcup G'_j(d\delta')=\bigcup G''_k(d\delta'')$, 则$(\delta/\delta')/(\delta''/\delta')$等价于$\delta/\delta'$和$\delta/\delta''$, 以及$[(G/\delta')/(\delta''/\delta')]/[(\delta/\delta')/(\delta''/\delta')]$, $(G/\delta')/(\delta/\delta')$, $(G/\delta'')/(\delta/\delta'')$实际上是1—1对应的, 这些等价性和对应关系表示在下列对应中:

$G/\delta'=\bigcup A_i(d\delta/\delta')$, $A_i=\{G'_j\}$ $(G'_j\subset G_i)$;

$G/\delta'=\bigcup B_k(d\delta''/\delta')$, $B_k=\{G'_j\}$ $(G'_j\subset G''_k)$;

$G/\delta''=\bigcup C_i(d\delta/\delta'')$, $C_i=\{G''_k\}$ $(G''_k\subset G_i)$;

$(G/\delta')/(\delta''/\delta')=\bigcup D_i(d(\delta/\delta')/(\delta''/\delta'))$; $D_i=\{B_k\}(B_k\subset A_i)$.

在[1]中, 我们已经把布尔差分原理发展成为泛系差分原理, 它描述了从一个影系统到另一个影系统的一定的可观性. 泛系差分原理被认为是泛系观控性研究的一个组成部分. 现在我们给出另外几个新的形式.

定理82. 若$f\subset G\times G'$, $g\subset G\times G''$是两个给定的E_s-模拟, 那么$\varphi=f^{-1}\circ g\subset G'\times G''$也是一个$E_s$-模拟, 并且$(f^{-1}\circ g\circ g^{-1}\circ f)^t\circ f^{-1}\circ g\subset G'\times G''$是$G'$与$G''$之间的一个硬模拟, 而且它导致一个从$G'$到$G''/(g^{-1}\circ f\circ f^{-1}\circ g)^t$上的映射$\varphi^*$. 因而$(g^{-1}\circ f\circ f^{-1}\circ g)^t=(G'')^2$, $I(G'')$分别表示类黑箱和类白箱的可观性.

定理83. 设ε, $\delta\in E_s[G)$, 则$f^{-1}_\delta\circ f_\varepsilon\subset(G/\delta)\times(G/\varepsilon)$是$E_s$-模拟, $(f^{-1}_\delta\circ\varepsilon\circ f_\delta)^t\circ f^{-1}_\delta\circ f_\varepsilon\subset(G/\delta)\times(G/\varepsilon)$是一个硬模拟, 后者导致一个从$G/\delta$到$(G/\varepsilon)/(f^{-1}_\varepsilon\circ\delta\circ f_\varepsilon)^t$上的映射. 最后, $(f^{-1}_\varepsilon\circ\delta\circ f_\varepsilon)^t=(G/\varepsilon)^2$, $I(G/\varepsilon)$分别对应于类黑箱与类白箱的可观性.

定理84. 若$\delta\in E_s[G)$, $\delta'=\varepsilon_6(\delta)$, 那么$f^{-1}_\delta\circ\delta'\circ f_\delta=(f^{-1}_\delta\circ\delta'\circ f_\delta)^t=(G/\delta)^2$. 因而, 从

G/δ'到G/δ的可观性是类黑箱的．反之亦然．

这个定理的证明基于：

定理85． 如果$\delta\in E_s[G]$，那么$f_\delta^{-1}\circ\delta\circ f_\delta=\bigcup(x\circ f_\delta)\times(y\circ f_\delta)((x,y)\in\delta)=\{(G_i,G_j)\}(G_i\cap G_j\neq\varnothing,\ G_i,\ G_j\in G/\delta)=f_\delta^{-1}\circ f_\delta$．

定理84的证明 因为$(G/\delta)^2=\{(G_i,G_j)\mid G_i\cap G_j\neq\varnothing\}\cup\{G_i,G_j)\mid G_i\cap G_j=\varnothing\}=f_\delta^{-1}\circ\delta\circ f_\delta\vee\overline{f_\delta^{-1}\circ\delta\circ f_\delta}$，因此由$\overline{f_\delta^{-1}\circ\delta\circ f_\delta}\leqslant f_\delta^{-1}\circ\bar{\delta}\circ f_\delta$，我们有$(G/\delta)^2\leqslant f_\delta^{-1}\circ f_\delta\vee f_\delta^{-1}\circ\bar{\delta}\circ f_\delta=f_\delta^{-1}\circ\delta'\circ f_\delta$．相反的不等式是显然的．定理证毕．

在[1]中，我们引进了硬模拟的观控水平的概念，下面给出一个推广的定义．

模拟的E_s-观控水平：若$f\subset G\times G'$是E_s-模拟，则$l(f)=(\overline{f\circ f^{-1}},\ \overline{f^{-1}\circ f})$或者它在偏序集$P(G^2)\times P((G')^2)$中的位置称之为$f$的$E_s$-观控水平．

在[1]中，我们提出了在观控度，简单性和方便性各种因素之间进行合理运筹的泛系观控律的概念．在E_s-观控水平这一概念的基础上，我们把上述泛系观控律改写为下面的新的具体的形式．

E_s泛系观控律：设F是G与G'之间的一类E_s-模拟．如果F表示观控条件，那么，$l(f)$充分小的时候，$f(\in F)$将满足相关的运筹要求．如果F表示简单性、方便性条件，那么，$l(f)$充分大的时候，$f(\in F)$将满足相应的运筹要求．

显然，在定理82中，$l(\varphi)=(\overline{f^{-1}\circ g\circ g^{-1}\circ f},\ \overline{g^{-1}\circ f\circ f^{-1}\circ g})$，并且对于$\theta=(\varphi\circ\varphi^{-1})^t\circ\varphi$，我们有$l(\theta)=(\overline{(f^{-1}\circ g\circ g^{-1}\circ f)^t},\ \overline{(g^{-1}\circ f\circ f^{-1}\circ g)^t})$．在定理83中，令$\varphi=f_\delta^{-1}\circ f_\varepsilon$，$\theta=(\varphi\circ\varphi^{-1})^t\circ\varphi$，我们有$l(\varphi)=(\overline{f_\delta^{-1}\circ\varepsilon\circ f_\delta},\ \overline{f_\varepsilon^{-1}\circ\delta\circ f_\varepsilon})$，$l(\theta)=(\overline{(f_\delta^{-1}\circ\varepsilon\circ f_\delta)^t},\ \overline{(f_\varepsilon^{-1}\circ\delta\circ f_\varepsilon)^t})$．所以，当$E_s$-模拟显化为硬模拟时，其$E_s$-观控水平下降．

为了进一步讨论观控性，我们讨论可达性问题．

设$g\subset G\times G'$，$Q\subset G$，那么称Q对$R\subset\overset{\theta}{Q}\circ g$中的任意元都具有$(\theta,g)$可达性，$\theta\in\{\wedge,\vee\}$，这里，$\check{Q}\circ g=Q\circ g$，$\hat{Q}\circ g=\bigcap x\circ g(x\in Q)$．有时，称$(\vee,g)$-可达性为弱可达性，称$(\wedge,g)$-可达性为强可达性．类似地，对于$R\subset G'$，我们定义$g\circ\check{R}=g\circ R$，$g\circ\hat{R}=\bigcap g\circ y\ (y\in R)$．可以证明

定理86． $\overset{\theta}{Q}\circ g=g^{-1}\circ\overset{\theta}{Q}$，$\hat{Q}\circ g\subset\check{Q}\circ g\subset G$，$(\hat{Q}\circ g)^2\leqslant g^{-1}\circ g$．

定理87． 若$R=\hat{Q}\circ g\neq\varnothing$，则$Q\subset P=g\circ\hat{R}$，$Q\times R\leqslant g$，$Q^2\leqslant g\circ g^{-1}$，$R\subset\hat{P}\circ g$，且$R$对$Q$是$(\wedge,g^{-1})$-可达的，$Q$对$Q$是$(\wedge,g\circ g^{-1})$-可达的．

定理88． 若$g\subset G\times G'$，$Q\subset G$，$\check{Q}\circ g\neq\varnothing$，则$(Q\times\{y\})\cap g\neq\varnothing\ (\forall y\in\check{Q}\circ g)$．

我们把泛系运筹推广为下面基本运算的各种复合：$\vee$（析取，和，扩展），$\wedge$（合取，交，限定），$\neg$（非，补），P（投影），E（赋形），$\circ$（复合及其推广），T（直积的序转换）．

如果关系或泛结构g能够由f通过某些泛系运算而得到，则记作$f\overset{p}{\longmapsto}g$．

设$G_{\sigma\lambda}$是具有参量σ和λ的一族集，$G=\{G_{\sigma\lambda}\}$，$\theta_\lambda\subset\prod G_{\sigma\lambda}$，$\theta=\{\theta_\lambda\}$．那么$S=(G,\theta)$可以看作一种多能的和普适的系统．

设$S\overset{p}{\longmapsto}f_i,\ g_j$，这里$f_i\subset U_i\times V_i\times G_i^2\in G^4$，$g_j\subset U_j\times V_j\times G_j\times H_j\in G^4$，令$f=\{f_i\}$，$g=\{g_j\}$为一种有用的、普适的转换．自动机，控制系统，滤波模型，平滑模型，预测和对策模型都能转化为这种形式．有时，U_i，U_j可以解释为协同的输入空间，V_i，V_j为对立的输入空间，G_i，G_j为状态空间，H_j为输出或者观测空间．

设$Q_i\subset U_i$，$Q_j\subset U_j$，$R_i\subset V_i$，$R_j\subset V_j$，$(\check{Q}_i\times\hat{R}_i)\circ f_i=\bigcup(\bigcap(u,v)\circ f_i(v\in R_i))\ (u\in Q_i)$．

定理89. $(x,y)\in(\check{Q}_i\times\hat{R}_i)\circ f_i$ 表示对任意的矛盾输入 $v\in R_i$，我们都可找到协同输入 $u\in Q_i$使得x通过f到达y。

定理90. 若$(x,y)\in\varphi=(\hat{Q}_j\times\check{R}_j)\circ g_j\subset G_j\times H_j$，$\varphi$是$E_s$-模拟，则不论$R_j$多么复杂，我们都可以通过$g$在$Q_j$的所有元的协同作用确定$x\in\varphi\circ y$或则$x\in(\varphi\circ\varphi^{-1})^t\circ\varphi\circ y$。

定理91. 设 $I=\{I_k\}$是一集簇，记 $D^*=\bigcup D\uparrow I_k$。若$f\overset{?}{\longmapsto}\varphi_l$，$\varphi_l\subset E\times F^2$是$E_s$-模拟，$E$，$F\in\{D\uparrow I_k,D^*\}$，$D\in G$，则当 $(x,y)\in\varphi_l^{-1}\circ\varphi_l$或 $(x,y)\in B_m\subset F^2(d\varphi_l^{-1}\circ\varphi_l)$时，$f$可以使$x$转化成$y$。在各种各样的$l$的协同作用下，对一般状态偶$(x,y)\in A_n\subset F^2(d\bigvee\varphi_l^{-1}\circ\varphi_l)$ 或 $(x,y)\in\bigvee\varphi_l^{-1}\circ\varphi_l$而言，我们可以获得部分强化可控性。特别地，若$\bigvee\varphi_l^{-1}\circ\varphi_l=F^2$，我们可以获得完全可控性。这里一般的控制输入可从$E$中选择。

定理92. 若$f,g\overset{?}{\longmapsto}\theta_r$，$\theta_r\subset F\times E$是$E_s$-模拟，$E,F\in\{D\uparrow I_k,D^*\}$，$D\in G$，则由一般的观测$E$，我们可以确定出乏晰辖域 $C_?\subset F\ (d\theta_r\circ\theta_r^{-1})$中的一般状态，或则确定出$F/\theta_r\circ\theta_r^{-1}$的可观测性。在各种各样的$r$的协同作用下，我们可以获得部分强化可观测性$F_q\subset F\ (d\bigwedge\theta_r\circ\theta_r^{-1})$，或$F/\bigwedge\theta_r\circ\theta_r^{-1}$。特别地，若有$\bigwedge\theta_r\circ\theta_r^{-1}=I(F)$，则我们可以获得完全可观测性。

定理93. 设$g_1,g_2\in P(G^2),\delta\in E[G],G=\bigcup G_i(d\delta)$。若$(x,y)\in g_1$导致$\exists i(x,y\in G_i)$，$(x,y)\in\bar{g}_2((x,y)\in g_2)$ 导致 $\exists ij(i\neq j,x\in G_i,y\in G_j)$，则 $\delta_1(g_1)\leqslant\delta\leqslant\delta_0(g_2)$（对应地，$\delta_1(g_1)\leqslant\delta\leqslant\delta_{12}(g_2)$）。

定理94. 设$g_1,g_2\in P(G^2)$，$\delta\in E[G],G=\bigcup G_i(d\delta)$。若$\exists i(x,y\in G_i)$蕴含$(x,y)\in g_1$，$\exists ij(i\neq j,x\in G_i,y\in G_j)$蕴含$(x,y)\in\bar{g}_2((x,y)\in g_2)$，则$\delta_1(g_2)\leqslant\delta\leqslant\delta_0(g_1)$（对应地，$\delta_6(g_2)\leqslant\delta\leqslant\delta_0(g_1)$）。

若$\max\{\delta|\delta\in E_s[G],\delta\leqslant g\}$有意义，记之为$\varepsilon_0(g)$。我们可以容易地推广上面的两个定理成为下面的形式。

定理95. 设$g_1,g_2\in P(G^2),\delta\in E_s[G],G=\bigcup G_i(d\delta)$。若$(x,y)\in g_1$可导出$\exists i(x,y\in G_i)$，$(x,y)\in\bar{g}_2((x,y)\in g_2)$可导出$\neg\exists i(x,y\in G_i)$，则$\varepsilon_1(g_1)\leqslant\delta\leqslant\varepsilon_0(g_2)$（对应地，$\varepsilon_1(g_1)\leqslant\delta\leqslant\varepsilon_0(\bar{g}_2)$）。若$\exists i(x,y\in G_i)$可导出$(x,y)\in g_1$，$\neg\exists i(x,y\in G_i)$可导出$(x,y)\in\bar{g}_2((x,y)\in g_2)$，则$\varepsilon_1(g_2)\leqslant\delta\leqslant\varepsilon_0(g_1)$（对应地，$\varepsilon_6(g_2)\leqslant\delta\leqslant\varepsilon_0(g_1)$）。

若其辨别力依赖于相关的模型，则容易证明下列定理。

定理96. 设$g_\sigma\subset F\times E_\sigma$是一组$E_s$-模拟，$\theta\in P(F^2),\theta_\sigma\in P(E_\sigma^2),x_\sigma\in x\circ g_\sigma,y_\sigma\in y\circ g_\sigma$，若 $g_\sigma\circ\theta_\sigma\circ g_\sigma^{-1}\leqslant\theta$（或者$\bigvee g_\sigma\circ\theta_\sigma\circ g_\sigma^{-1}\leqslant\theta$），则$(x_\sigma,y_\sigma)\in\theta_\sigma$蕴含$(x,y)\in\theta$。若$g_\sigma$均为投影，其条件可改写为$\theta_\sigma\leqslant g_\sigma^{-1}\circ\theta\circ g_\sigma$。若$g_\sigma^{-1}\circ\theta\circ g_\sigma\leqslant\theta_\sigma$，则$(x,y)\in\theta$可推出$(x_\sigma,y_\sigma)\in\theta_\sigma$。若$g_\sigma$均为赋形，则上面的条件又可改写为$\theta\leqslant g_\sigma\circ\theta_\sigma\circ g_\sigma^{-1}$（或者$\theta\leqslant\bigwedge g_\sigma\circ\theta\circ g_\sigma^{-1}$）。

定理97. 设 $f\subset G\times G'$是 E_s-模拟，$\theta\in E_s[G']$，$x\in f\circ x'$，$y\in f\circ y$，$\delta\in E_s[G]$，$G=\bigcup G_i(d\delta)$，则$\varepsilon_7(f\circ\theta\circ f^{-1})\leqslant\delta$，$\neg\exists i(x,y\in G_i)$蕴含$(x',y')\in\theta$。$\delta\leqslant\varepsilon_0(\bar{g}),g=f\circ\theta\circ f^{-1}$，$(x',y')\in\theta$蕴含$\neg\exists i(x,y\in G_i)$。

定理98. 设 $f\subset G\times G'$是 E_s-模拟，$\theta\in E_s[G]$，$x'\in x\circ f$，$y'\in y\circ f$，$\delta\in E_s[G]$，$G=\bigcup G_i(d\delta)$，则$f^{-1}\circ\bar{\delta}\circ f\leqslant\theta$，$\neg\exists i(x,y\in G_i)$蕴含$(x',y')\in\theta$。$\delta\leqslant\varepsilon_0(\bar{g})$，$g=f\circ\theta\circ f^{-1}$，$(x',y')\in\theta$蕴含$\neg\exists i(x,y\in G_i)$。

证明 因为$\neg\exists i(x,y\in G_i)$等价于$(x,y)\in\bar{\delta}$，所以，$(x',y')\in f^{-1}\circ\bar{\delta}\circ f$，于是$(x',y')\in\theta$。反之，若$(x',y')\in\theta$，则$(x,y)\in f\circ\theta\circ f^{-1}$，或者$(x,y)\bar{\in}\bar{g}$，所以$(x,y)\bar{\in}\delta$，$\neg\exists i(x,y\in G_i)$。

定理99. 设$f\subset G\times G'$是E_s-模拟，$\theta\in S[G')$，$x\in f\circ x'$，$y\in f\circ y'$，$(x',y')\in\theta$，$\delta\in E_s[G)$，$\delta\leqslant\varepsilon_7(f\circ\theta\circ f^{-1})$。若$x\neq y$，则$(x,y)\in\bar{\delta}$或$\neg\exists i(x,y\in G_i\subset G(d\delta))$。

证明 事实上，$(x',y')\in\theta$蕴含$(x,y)\in f\circ\theta\circ f^{-1}$，或者$(x,y)\bar{\in}\varepsilon_7(f\circ\theta\circ f^{-1})\wedge\overline{I(G)}$。所以$(x,y)\bar{\in}\delta\wedge\overline{I(G)}$。即$x\neq y$蕴含$(x,y)\in\bar{\delta}$。

定理99*. 设$f\subset G\times G'$是E_s-模拟，$\theta\in S[G')$，$x\in f\circ x'$，$y\in f\circ y'$，$\delta\in E_s[G)$，$\delta'\in E_s[G')$，$\delta\leqslant\varepsilon_7(f\circ\theta\circ f^{-1})$，$\delta'\leqslant\varepsilon_1(\theta)$。若$x\neq y$，$x'\neq y'$，则$\exists j(x',y'\in G'_j\subset G'(d\delta'))$蕴含$\neg\exists i(x,y\in G_i\subset G(d\delta))$。$\exists i(x,y\in G_i\subset G(d\delta))$蕴含$\neg\exists j(x',y'\in G'_j\subset G'(d\delta'))$。

定理99.** 在上面定理的条件下，我们有：

1) 若$x\neq y$，$x,y\in G_i$，则$(x\circ f)\cap(y\circ f)\cap G'_j=\varnothing$；

2) f在$G_i\times G'_j$上退化为部分赋形；

3) 若f表示某种因果关系，则对任意的结果$x'\in G'_j$，在G_i中仅存在唯一的原因：$G_i\cap f\circ x'\in G_i$。

类似地，我们可以得到下面的命题。

定理100. 设$f\subset G\times G'$是E_s-模拟，$\theta\in S[G)$，$x'\in x\circ f$，$y'\in y\circ f$，$(x,y)\in\theta$，$\delta'\in E_s[G')$，若$\delta'\leqslant\varepsilon_7(f^{-1}\circ\theta\circ f)$，则$(x',y')\bar{\in}\delta'\wedge\overline{I(G')}$。就是说，若$x'\neq y'$，则$\neg\exists j(x',y'\in G'_j\subset G'(d\delta'))$。

定理100*. 在上面定理的条件下，若$\delta\in E_s[G)$，$\delta\leqslant\varepsilon_1(\theta)$，$x\neq y$，$x'\neq y$，则$\exists i(x,y\in G_i\subset G(d\delta))$蕴含$\neg\exists j(x',y'\in G'_j\subset G'(d\delta'))$，$\exists j(x',y'\in G'_j\subset G'(d\delta'))$蕴含$\neg\exists i(x,y\in G_i\subset G(d\delta))$。

定理100.** 在上面定理的条件下，我们有：

1) 若$x'\neq y'$，$x',y'\in G'_j$，则$(f\circ x')\cap(f\circ y')\cap G_i=\varnothing$；

2) f在$G_i\times G'_j$上的限制退化为部分投影；

3) 若f表示某种因果关系，则对任意的原因$x\in G_i$，在G'_j中仅存在一个结果：$G'_j\cap x\circ f\in G'_j$。

定理67～77,93～100**发展了传统的识别原理，树搜索原理与隐函数定理。

参 考 文 献

[1] Wu Xue-mou, Pansystems methodology: Concepts, Theorems and applications(I)-(VI), *Science Exploration*, 1,2,4(1982),1,4(1983),etc.

[2] Wu Xue-mou, Pansystems analysis and fuzzy sets, *Busefal*, 10(1982).

[3] Wu Xue-mou, Pansystems methodology: A transfield Investigation of generalized system-transformation-symmetry, in *Fuzzy Information and Decision Processes* (M. M. Gupta and E. Sanchez eds.), North Holland Publishing Co. (1982).

[4] 吴学谋，泛系分析的研究与应用(I)～(IV)，武汉大学学报，3(1978)，1(1979)；湖北省力学会论文集，(1981)；科学探索，1(1981)；华中工学院学报（乏晰数学专辑），2(1980).

[5] 吴学谋，泛系分析与科学方法论，哲学研究，4,5(1981).

[6] 覃国光，泛系逻辑微积(I)～(III)，科学探索，3,4(1982),1(1983).

[7] 覃国光，泛图、泛系运筹投影原理在马尔柯夫过程及优化问题中的应用，科学探索，3(1981).

[8] 郭爱克，视觉机理与泛系重演性，科学探索，4(1981).

[9] 郭爱克，一类复杂系统的一种泛系描述，科学探索，1(1982).

[10] 郭爱克，泛系全息重演律，科学探索，4(1982).

[11] 李邦荣．关于对象排序算法的等效性．科学探索，1(1981)．
[12] 王平明．生物全息重演律：泛系方法论对生物时空结构泛对称的一种分析．科学探索，4(1981)．
[13] 沈祖樑．联想的一些简化泛系模型与计算机．科学探索，1(1982)．
[14] 朱绪鼎．等价关系的泛系模拟守恒性．科学探索，4(1982)．
[15] 朱绪鼎．等价性泛系分析的一些问题．科学探索，3(1982)．
[16] Zhu Xu-ding. Pansystems graph theory and (l,d)-stable graphs, *Science Exploration*, 2(1983).
[17] 兰　溅．智能科学的一些问题与泛系方法论．科学探索，2(1982)．
[18] 兰　溅．泛系模拟与科学方法．科学探索，3(1982)．
[19] 伍雪侠．从相图分割原理、键参数函数法到拟摩擦裂隙强度模型：按泛系观点的一些讨论．科学探索，2(1982)．

Investigation and Applications of Pansystems Recognition Theory and Pansystems-Operations Research of Large-Scale Systems (Ⅰ)

Wu Xue-mou
(*China Digital Engineering Institute, Wuhan*)

Abstract

In this work, a sort of recognition theory and operations research of large-scale systems are developed within the framework of pansystems methodology. We establish a series of theorems concerning pansystems relations, which discuss some fundamental problems of inter-disciplines from the viewpoint of generalized system-transformation-symmetry in things mechanism, and they are connected closely with mathematical physics systems sciences, thinking science, bioecological medical sciences and the methodological investigation of mechanical foundation. This paper offers 100 pansystems theorems.