应用数学和力学，第 5 卷第 1 期（1984年 1 月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

固体内任意元素的边界积分变分定理——任意裂纹开展时能量释放率的计算*

牛 庠 均

（北京工业大学，1982 年4 月 26 日收到）

摘 要

根据[1～2]中提出的离散型固体力学及其变分原理的基础上，本文形成四种类型的元素的边界积分变分定理．当进行断裂分析时，可用它们计算沿裂纹边界法线方向的能量释解率；在有孔洞时，当在孔洞边界存在或不存在外力作用的情况下，可用它们计算沿孔洞边界法线方向的能量改变量；当进行离散分析时，也可以用来建立离散方程，以便求解待解函数值．并且由本文分析可知，在[3]中提出的 J 积分形式是不确切的．

一、引 言

在[1～2]中所讨论的离散型固体力学及其变分原理是考虑到介质具有间断性，即在固体内产生裂纹，或存在孔洞的情况，所以待解函数就具有各种不同的间断性；是考虑到由于变形的原因，定义域是变动的，即定义域具有边界可动性．由此得到的泛函的一阶变分可由二部分组成，一部分是由于区域固定而待解函数的改变而产生的，另一部分是由于区域的变动而产生的．所以，自然可以用来解决固体内部裂纹开展时能量释放率的问题，以及存在孔洞情况时，沿孔洞边界的能量改变量的问题．

1. 基于势能函数的情况

由[1～2]可知，变形固体体系其总势能，为

$$\Pi(a)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a(a)}\Pi_0(\xi_i(a),\ u_i(\xi_i,a),\ u_{i,j}(\xi_i,a))dV(\xi_i)\right.$$

$$\left.-\iint\limits_{\Gamma_a(a)\cap\partial\Omega_1(a)}\bar{P}_i u_i(\xi_i,\ a)\,dr(\xi_i)\right\} \tag{1.1}$$

其中 $\Pi_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\,\varepsilon_{ij}\,\varepsilon_{kl}-F_iu_i$

* 钱伟长推荐.

方程(1.1)的一阶变分为零的形式，为

$$\delta\Pi(a)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a}-(\sigma_{ij,j}+F_i)\delta u_i dV+\iint\limits_{\Gamma}\sigma_{ij}l_j\delta u_i dr\right.$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_a}[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]\delta n dr+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr$$

$$\left.+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_{\Pi}-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n]dr\right\}=0 \tag{1.2}$$

其中 $P_{\Pi}=\Pi_0\delta n-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j\neq i}$

由此式可知，泛函的变分是由二部分组成，一部分是由于区域固定而待解函数的改变而产生的；另一部分是由于区域的变动而产生的。

对于从固体内剖割的任意元素S_a而言，当待解函数在元素S_a上，满足几何方程、平衡方程和整体几何边界条件时，则方程(1.2)成为

$$J_{\Pi}=\iint\limits_{\Gamma_a}[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]\delta n dr+\iint\limits_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\delta u_i dr$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_{\Pi}-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n]dr$$

$$\left.+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr\right\}=0 \tag{1.3}$$

为了便于分析，元素S_a的边界 Γ_a，可写为

$$\Gamma_a=\Gamma_{ab}\cup\Gamma_{ah}\cup\Gamma_{a\partial\Omega_1}\cup\Gamma_{a\partial\Omega_2}$$

$$\Gamma_{ab}=\Gamma_a\cap\Gamma_b,\qquad \Gamma_{ah}=\Gamma_a\cap\Gamma_h$$

$$\Gamma_{a\partial\Omega_1}=\Gamma_a\cap\partial\Omega_1,\quad \Gamma_{a\partial\Omega_2}=\Gamma_a\cap\partial\Omega_2$$

这里Γ_b为与元素S_a具有公共边界的元素S_b的边界；Γ_h 为与元素S_a具有公共边界的裂纹或孔洞的边界；$\partial\Omega_1$为整个固体的力的作用边界；$\partial\Omega_2$为整个固体的几何边界。

1）当在元素的边界Γ_a上，δu_i 与$\delta n(\delta x_i)$为相互无关时，则方程(1.3)的各积分项有下面几种情况：

A．在元素边界Γ_{ab}上，有

$$J_{\Pi,ab}=\iint\limits_{\Gamma_{ab}}\left\{[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}+0}-[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}-0}\right\}\delta n dr$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)_{\Gamma_{ab}+0}-(\sigma_{ij}l_j)_{\Gamma_{ab}-0}]\delta u_i dr \tag{1.4a}$$

若 $(\sigma_{ij}l_j)_{\Gamma_{ab}+0}=(\sigma_{ij}l_j)_{\Gamma_{ab}-0}$

$$\therefore\quad J_{\Pi,ab}=\iint\limits_{\Gamma_{ab}}\left\{[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}+0}-[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}-0}\right\}\delta n dr \tag{1.4b}$$

B. 在元素边界Γ_{ah}上，有

$$J_{\Pi,ah}=\iint_{\Gamma_{ah}}[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]\delta ndr \qquad (\sigma_{ij}l_j=\bar{P}_i=0) \tag{1.4c}$$

若在边界Γ_{ah}上有外力$\bar{P}_i$作用时，则有

$$J_{\Pi,ah}=\iint_{\Gamma_{ah}}[P_\Pi-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta ndr+\iint_{\Gamma_{ah}}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr \tag{1.4d}$$

C. 在元素边界$\Gamma_{a\partial\Omega_1}$上，有

$$J_{\Pi,\partial\Omega_1}=\iint_{\Gamma_{a\partial\Omega_1}}[P_\Pi-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta ndr+\iint_{\Gamma_{a\partial\Omega_1}}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr \tag{1.4d}$$

D. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_2}$ 上，有

$$J_{\Pi,\partial\Omega_2}=0 \qquad (u_i=\bar{u}_i) \tag{1.4e}$$

2) 当在元素的边界Γ_a上，δu_i 与 $\delta n(\delta x_i)$ 相关时，且令 $u_i=R_i$，$\delta u_i=\delta R_i=R_{i,k}\delta x_k=R_{i,n}\delta n$ 时，则方程(1.3)的各积分项有下面几种情况：

A. 在元素边界Γ_{ab}上，有

$$J_{\Pi,ab}=\iint_{\Gamma_{ab}}\Big\{[\Pi_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j]_{\Gamma_{ab}+0}$$

$$-[\Pi_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j]_{\Gamma_{ab}-0}\Big\}\delta ndr \tag{1.5a}$$

B. 在元素边界Γ_{ah}上，有

$$J_{\Pi,ah}=\iint_{\Gamma_{ah}}[\Pi_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j]\delta n\,dr \tag{1.5b}$$

若在Γ_{ah}上有外力$\bar{P}_i$作用时，则

$$J_{\Pi,ah}=\iint_{\Gamma_{ah}}[P_\Pi+(R_{i,n}-u_{i,n})(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta n]dr \tag{1.5c}$$

C. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_1}$ 上，有

$$J_{\Pi,\partial\Omega_1}=\iint_{\Gamma_{a\partial\Omega_1}}[P_\Pi+(R_{i,n}-u_{i,n})(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta n]dr \tag{1.5c}$$

D. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_2}$ 上，有

$$J_{\Pi,\partial\Omega_2}=0 \qquad (u_i=\bar{u}_i) \tag{1.5d}$$

于是方程(1.3)可写为

$$J_\Pi=J_{\Pi,ab}+J_{\Pi,ah}+J_{\Pi,\partial\Omega_1}=0 \tag{1.6}$$

2. 基于余能函数的情况

由[1～2]可知，变形固体体系其总余能，为

$$\mathscr{L}(a)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a(a)}\mathscr{L}_0(\xi_i(a),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\ a))\,dV(\xi_i)\right.$$

$$\left.-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}(\xi_i,\ a)l_j\,dr\right\} \tag{1.7}$$

其中

$$\mathscr{L}_0=\frac{1}{2}b_{ijkl}\,\sigma_{ij}\,\sigma_{kl}$$

方程(1.7)的一阶变分为零的形式，为

$$\delta\mathscr{L}(a)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a}(e_{ij}-u_{i,j})\delta\sigma_{ij}dV+\iint\limits_{\Gamma}u_i\delta\sigma_{ij}l_jdr\right.$$

$$\left.+\iint\limits_{\Gamma_i}[\mathscr{L}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]\delta ndr+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jdr\right\}$$

$$=0 \tag{1.8}$$

对于从固体内部割的任意元素 S_a 而言，当待解函数在元素 S_a 上，满足几何方程、平衡方程和整体力的边界条件时，则方程(1.8)变为

$$J_{\mathscr{L}}=\iint\limits_{\Gamma}[\mathscr{L}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]\delta ndr+\iint\limits_{\Gamma_a}u_i\delta\sigma_{ij}l_jdr$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jdr=0 \tag{1.9}$$

1) 当在元素的边界Γ_a上，$\delta\sigma_{ij}l_j$与$\delta n(\delta x_i)$为相互无关时，则方程(1.9)的各积分项有下面几种情况：

A．在元素边界 Γ_{ab} 上，有

$$J_{\mathscr{L},ab}=\iint\limits_{\Gamma_{ab}}\left\{[\mathscr{L}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{\Gamma_{ab}+0}-[\mathscr{L}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{\Gamma_{ab}-0}\right\}\delta ndr$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_{ab}}[(u_i)_{\Gamma_{ab}+0}-(u_i)_{\Gamma_{ab}-0}]\delta\sigma_{ij}l_jdr \tag{1.10a}$$

若 $(u_i)_{\Gamma_{ab}+0}=(u_i)_{\Gamma_{ab}-0}$

$$\therefore\quad J_{\mathscr{L},ab}=\iint\limits_{\Gamma_{ab}}\left\{[\mathscr{L}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{\Gamma_{ab}+0}\right.$$

$$\left.-[\mathscr{L}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{\Gamma_{ab}-0}\right\}\delta ndr \tag{1.10b}$$

B．在元素边界 Γ_{ah} 上，有

$$J_{\mathscr{L},ah}=\iint\limits_{\Gamma_{ah}}[\mathscr{L}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]\delta ndr \tag{1.10c}$$

$(\sigma_{ij}l_j=\bar{P}_i=0)$

C. 在元素边界$\Gamma_{a\partial\Omega_1}$上，有

$$J_{\mathscr{L},\partial\Omega_1}=0 \tag{1.10d}$$

（假定满足整体力的边界条件）

D. 在元素边界$\Gamma_{a\partial\Omega_2}$上，有

$$J_{\mathscr{L},\partial\Omega_2}=\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_2}}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jdr \tag{1.10e}$$

2) 当在元素边界Γ_a上，$\delta\sigma_{ij}l_j$与$\delta n(\delta x_i)$相互有关时，且令$\sigma_{ij}l_j=T_i$，$\delta(\sigma_{ij}l_j)=\delta T_i=T_{i,k}\delta x_k=T_{i,n}\delta n$时，则方程(1.9)的各积分项有下面几种情况：

A. 在元素边界Γ_{ab}上，有

$$J_{\mathscr{L},ab}=\iint\limits_{\Gamma_{ab}}\Big\{[\mathscr{L}_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]_{\Gamma_{ab}+0}-[\mathscr{L}_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]_{\Gamma_{ab}-0}\Big\}\delta ndr \tag{1.11a}$$

B. 在元素边界Γ_{ah}上，有

$$J_{\mathscr{L},ah}=\iint[\mathscr{L}_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]\delta ndr \tag{1.11b}$$

C. 在元素边界$\Gamma_{a\partial\Omega_1}$上，有

$$J_{\mathscr{L},\partial\Omega_1}=0 \tag{1.11c}$$

（假定满足整体力的边界条件）

D. 在元素边界$\Gamma_{a\partial\Omega_2}$上，有

$$J_{\mathscr{L},\partial\Omega_2}=\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_2}}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jdr \tag{1.11d}$$

于是方程(1.9)可写为

$$J_{\mathscr{L}}=J_{\mathscr{L},ab}+J_{\mathscr{L},ah}+J_{\mathscr{L},\partial\Omega_2}=0 \tag{1.12}$$

3. 基于广义势能函数的情况

由[1～2]可知，变形固体体系其总广义势能，为

$$U(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{S_a(\alpha)}U_0(\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\alpha),\ u_{i,j}(\xi_i,\alpha),\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))dV(\xi_i)-\iint\limits_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)}\bar{P}_iu_i(\xi_i,\ \alpha)dr(\xi_i)-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}l_jdr\Big\} \tag{1.13}$$

其中 $U_0=\Pi_0+\sigma_{ij}(u_{i,j}-\varepsilon_{ij})$

方程(1.13)的一阶变分为零的形式，为

$$\delta U(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{S_a}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\sigma_{ij})\bar{\delta}\varepsilon_{ij}$$

$$+(u_{i,j}-\varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}-(\sigma_{ij,j}+F_i)\delta u_i]dV$$

$$+\iint_{\Gamma_a}(\sigma_{ij}l_j)\delta u_i dr+\iint_{\Gamma_a}[U_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]\delta n dr$$

$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_U-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n dr$$

$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j dr=0 \tag{1.14}$$

其中 $P_U=U_0\delta n-(\bar{P}_i u_i\delta x_j)_{,j=i}$

对于从固体内部割的任意元素 S_a 而言，当待解函数在元素 S_a 上，满足几何方程、平衡方程、物理方程时，则方程(1.14)变为

$$J_U=\iint_{\Gamma_a}[U_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]\delta n dr$$

$$+\iint_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\delta u_i dr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_U-(\delta_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n dr$$

$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j dr=0 \tag{1.15}$$

1) 当在元素的边界 Γ_a 上，δu_i 与 $\delta n(\delta x_i)$ 相互无关时，则方程(1.15)的各积分项有下面几种情况：

A. 在元素边界 Γ_{ab} 上，有

$$J_{U,ab}=\iint_{\Gamma_{ab}}\left\{[U_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}+0}-[U_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)_{\Gamma_{ab}-0}\right\}\delta n dr$$

$$+\iint_{\Gamma_{ab}}[(\sigma_{ij}l_j)_{\Gamma_{ab}+0}-(\sigma_{ij}l_j)_{\Gamma_{ab}-0}]\delta u_i dr \tag{1.16a}$$

若 $(\sigma_{ij}l_j)_{\Gamma_{ab}+0}=(\sigma_{ij}l_j)_{\Gamma_{ab}-0}$

$$\therefore\quad J_{U,ab}=\iint_{\Gamma_{ab}}\left\{[U_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}+0}-[U_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}-0}\right\}\delta n dr \tag{1.16b}$$

B. 在元素边界 Γ_{ah} 上，有

$$J_{U,ah}=\iint_{\Gamma_{ab}}[U_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]\delta n dr \tag{1.16c}$$

$$(\sigma_{ij}l_j=\bar{P}_i=0)$$

若在 Γ_{ah} 上有外力 $\bar{P}_i$ 作用时，则

$$J_{U,ah}=\iint_{\Gamma_{ah}}[P_U-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n]dr+\iint_{\Gamma_{ah}}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr \tag{1.16d}$$

C. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_1}$ 上，有

$$J_{U,\partial\Omega_1}=\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_1}}[P_U-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n]dr+\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_1}}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr \tag{1.16d}$$

D. 在元素边界$\Gamma_{a\partial\Omega_2}$上，有

$$J_{U,\partial\Omega_2}=\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_2}}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j dr \tag{1.16e}$$

2) 当在元素的边界Γ_a上，δu_i 与$\delta n(\delta x_i)$相关时，且令

$$u_i=R_i,\quad \delta u_i=\delta R_i=R_{i,n}\delta n=R_{i,k}\delta x_k$$

则方程(1.15)的各积分项有下面几种情况：

A. 在元素边界Γ_{ab}上，有

$$J_{U,ab}=\iint\Big\{[U_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j]_{\Gamma_{ab}+0}-[U_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j]_{\Gamma_{ab}-0}\Big\}\delta n dr \tag{1.17a}$$

B. 在元素边界Γ_{ah}上，有

$$J_{U,ah}=\iint\limits_{\Gamma_{ah}}[U_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j]\delta n dr \tag{1.17b}$$

若在 Γ_{ah} 上有外力 $\bar{P}_i$ 作用时，则

$$J_{U,ah}=\iint\limits_{\Gamma_{ah}}[P_U+(R_{i,n}-u_{i,n})(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta n]dr \tag{1.17c}$$

C. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_1}$ 上，有

$$J_{U,\partial\Omega_1}=\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_1}}[P_U+(R_{i,n}-u_{i,n})(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta n]dr \tag{1.17c}$$

D. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_2}$ 上，有

$$J_{U,\partial\Omega_2}=\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_2}}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j dr \tag{1.17d}$$

于是方程(1.15)可写为

$$J_U=J_{U,ab}+J_{U,ah}+J_{U,\partial\Omega_1}+J_{U,\partial\Omega_2}=0 \tag{1.18}$$

4. 基于广义余能函数的情况

由[1～2]可知，变形固体体系其总广义余能，为

$$\mathscr{M}(a)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{S_a(a)}\mathscr{M}_0(\xi_i(a),\ u_i(\xi_i,\ a),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\ a))dV(\xi_i)-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j dr-\iint\limits_{\Gamma_a(a)\cap\partial\Omega_1(a)}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\xi_i,a)dr(\xi_i)\Big\} \tag{1.19}$$

方程 (1.19) 的一阶变分为零的形式，为

$$\delta\mathscr{M}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{S_a}[(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\delta\sigma_{ij}+(\sigma_{ij,j}+F_i)\delta u_i]dV$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_a}u_i\delta\sigma_{ij}l_jdr+\iint\limits_{\Gamma_a}[\mathscr{M}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]\delta ndr$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_{\mathscr{M}}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta ndr$$

$$-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P})\delta u_idr+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jdr\Big\}=0 \tag{1.20}$$

其中

$$\mathscr{M}_0=\mathscr{L}_0+(\sigma_{ij,j}+F_i)u_i$$
$$P_{\mathscr{M}}=\mathscr{M}_0\delta n-((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\delta x_j)_{,j\neq i}$$

对于从固体内分割的任意元素 S_a 而言，当待解函数在元素 S_a 上，满足几何方程、平衡方程，则方程(1.20)变为

$$J_{\mathscr{M}}=\iint\limits_{\Gamma}[\mathscr{M}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]\delta ndr+\iint\limits_{\Gamma_a}u_i\delta\sigma_{ij}l_jdr$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_{\mathscr{M}}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta ndr$$

$$-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_idr+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jdr=0 \tag{1.21}$$

1) 当在元素的边界 Γ_a 上，$\delta\sigma_{ij}l_j$，δu_i 与 $\delta n(\delta x_i)$ 相互无关时，则方程(1.21)的各积分项有下面几种情况：

A. 在元素边界 Γ_{ab} 上，有

$$J_{\mathscr{M},ab}=\iint\limits_{\Gamma_{ab}}\Big\{[\mathscr{M}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{\Gamma_{ab}+0}-[\mathscr{M}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{\Gamma_{ab}-0}\Big\}\delta ndr$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_{ab}}[(u_i)_{\Gamma_{ab}+0}-(u_i)_{\Gamma_{ab}-0}]\delta\sigma_{ij}l_jdr \tag{1.22a}$$

若 $(u_i)_{\Gamma_{ab}+0}=(u_i)_{\Gamma_{ab}-0}$

$$\therefore\quad J_{\mathscr{M},ab}=\iint\limits_{\Gamma_{ab}}\Big\{[\mathscr{M}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{\Gamma_{ab}+0}-[\mathscr{M}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]_{\Gamma_{ab}-0}\Big\}\delta ndr \tag{1.22b}$$

B. 在元素边界 Γ_{ah} 上，有

$$J_{\mathscr{M},ah}=\iint\limits_{\Gamma_{ah}}[\mathscr{M}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,n}]\delta ndr \tag{1.22c}$$

$$(\sigma_{ij}l_j=\bar{P}_i=0)$$

若在边界 Γ_{ah} 上有外力 $\bar{P}_i$ 作用时，则

$$J_{\mathscr{M},ah}=\iint\limits_{\Gamma_{ah}}[P_{\mathscr{M}}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta ndr$$
$$-\iint\limits_{\Gamma_{ah}}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr \tag{1.22d}$$

C. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_1}$ 上，有

$$J_{\mathscr{M},\partial\Omega_1}=\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_1}}[P_{\mathscr{M}}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta ndr$$
$$-\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_1}}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr \tag{1.22d}$$

D. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_2}$ 上，有

$$J_{\mathscr{M},\partial\Omega_2}=\iint\limits_{\Gamma_{,\partial\Omega_2}}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j dr \tag{1.22e}$$

2) 当在元素边界 Γ_a 上，$\delta\sigma_{ij}l_j$，δu_i 与 $\delta n(\delta x_i)$ 相关时，且取

$$u_i=R_i,\quad \delta u_i=\delta R_i=R_{i,n}\delta n=R_{i,k}\delta x_k$$
$$\sigma_{ij}l_j=T_i,\quad \delta(\sigma_{ij}l_j)=\delta T_i=T_{i,n}\delta n=T_{i,k}\delta x_k$$

则方程(1.21)的各积分项有下面几种情况：

A. 在元素的边界 Γ_{ab} 上，有

$$J_{\mathscr{M},ab}=\iint\limits_{\Gamma_{ab}}\Big\{[\mathscr{M}_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]_{\Gamma_{ab}}+0$$
$$-[\mathscr{M}_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]_{\Gamma_{ab}}-0\Big\}\delta ndr \tag{1.23a}$$

B. 在元素边界 Γ_{ah} 上，有

$$J_{\mathscr{M},ah}=\iint\limits_{\Gamma_{ah}}[\mathscr{M}_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})u_i]\delta ndr \tag{1.23b}$$

若在边界 Γ_{ah} 上有外力 $\bar{P}_i$ 作用时，则

$$J_{\mathscr{M},ah}=\iint\limits_{\Gamma_{ah}}[P_{\mathscr{M}}-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n]dr \tag{1.23c}$$

C. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_1}$ 上，有

$$J_{\mathscr{M},\partial\Omega_1}=\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_1}}[P_{\mathscr{M}}-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n]dr \tag{1.23c}$$

D. 在元素边界 $\Gamma_{a\partial\Omega_2}$ 上，有

$$J_{\mathscr{M},\partial\Omega_2}=\iint\limits_{\Gamma_{a\partial\Omega_2}}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j dr \tag{1.23d}$$

于是方程(1.21)可写为

$$J_{\mathscr{M}}=J_{\mathscr{M},ab}+J_{\mathscr{M},ah}+J_{\mathscr{M},\partial\Omega_1}+J_{\mathscr{M},\partial\Omega_2}=0 \tag{1.24}$$

方程 (1.6)、(1.12)、(1.18)和(1.24) 是基于可动边界泛函的一阶变分为零的基础上，所得到的待解函数在元素边界 Γ_a 上满足的边界积分变分方程．它们表示真实的待解函数将沿着元素边界使能量改变量为零．对 $J_{\Pi,ah}$，$J_{\mathscr{L},ah}$，$J_{U,ah}$，$J_{\mathscr{M},ah}$ 而言，它们表示沿裂纹或

孔洞的边界法线方向的能量释放量（或化为能量释放率）或能量改变量（或化为能量改变率）。

二、边界积分变分定理

基于上述，我们可以建立下面四个边界积分变分定理。

1．边界积分变分定理Ⅰ：

在变形固体内任意分割的一个元素 S_a 上，当位移函数满足几何方程、平衡方程和整体几何边界条件时，则满足下面边界积分变分方程

$$J_{\Pi}=J_{\Pi,ab}+J_{\Pi,ah}+J_{\Pi,\partial\Omega_1}=0 \tag{2.1}$$

的位移函数，为其驻值条件下的真实解。并且由此式可以求得沿裂纹或孔洞边界法线方向的能量释放率或能量改变量。

2．边界积分变分定理Ⅱ：

在变形固体内任意分割的一个元素 S_a 上，当位移函数和应力函数满足几何方程、平衡方程和整体力的边界条件时，则满足下面边界积分变分方程

$$J_{\mathscr{L}}=J_{\mathscr{L},ab}+J_{\mathscr{L},ah}+J_{\mathscr{L},\partial\Omega_2}=0 \tag{2.2}$$

的位移函数和应力函数，为其驻值条件下的真实解。并且由此式可以求得沿裂纹或孔洞边界法线方向的能量释放率或能量改变量。

3．边界积分变分定理Ⅲ：

在变形固体内任意分割的一个元素 S_a 上，当位移函数、应变函数和应力函数满足几何方程、平衡方程和物理方程时，则满足下面的边界积分变分方程

$$J_U=J_{U,ab}+J_{U,ah}+J_{U,\partial\Omega_1}+J_{U,\partial\Omega_2}=0 \tag{2.3}$$

的位移、应变和应力函数，为其驻值条件下的真实解。并由此式可求得沿裂纹或孔洞边界法线方向的能量释放率或能量改变量。

4．边界积分变分定理Ⅳ：

在变形固体内任意分割的一个元素 S_a 上，当位移函数和应力函数满足几何方程、平衡方程时，则满足下面边界积分变分方程

$$J_{\mathscr{U}}=J_{\mathscr{U},ab}+J_{\mathscr{U},ah}+J_{\mathscr{U},\partial\Omega_1}+J_{\mathscr{U},\partial\Omega_2}=0 \tag{2.4}$$

的位移和应力函数，为其驻值条件下的真实解。并由此式可求得沿裂纹或孔洞边界法线方向的能量释放率或能量改变量。

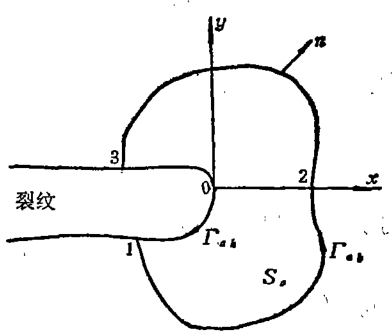

图 1

上述定理的证明从略。因只要考虑到方程(1.2)、(1.8)、(1.14)和(1.20)，以及定理的假定条件与变分条件，就可以证明求得的解满足离散型固体力学的全部微分方程。

例　如图所示的平面固体体系，在固体内部分割一任意元素S_a，其边界$\Gamma_a=\Gamma_{ab}\cup\Gamma_{ah}=\Gamma_{123}\cup\Gamma_{301}$，按边界积分变分定理(2.1)，有

$$J_{\Pi}-J_{\Pi,ab}+J_{\Pi,ah}=0$$

当$J_{\Pi,ab}$，$J_{\Pi,ah}$用方程(1.4b)、(1.4c)的形式，则上式为

$$J_{\Pi}=\int_{\Gamma_{ab}}\{[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}+0}-[\Pi_0-u_{i,n}\ (\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}-0}\}\delta ndr$$
$$+\int_{\Gamma_{ah}}[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]\delta ndr \tag{2.5}$$

在裂纹边界上，δn即为沿法线方向n的裂纹开展长度，裂纹开展沿法线方向n与坐标方向x^i的能量释放率可写为

$$J_{\Pi,n}=\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial(\delta n)}\quad 和\quad J_{\Pi,x_i}=\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial(\delta x_i)}$$

同时又由变分的定义得知，(2.5)式中的方括号内的函数与$\delta n(\delta x_i)$无关，故方程(2.5)化为沿坐标x方向的能量释放率，为

$$J_{\Pi,x}=\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial(\delta x)}=\int_{\Gamma_{ab}}\Big\{[\Pi_0 l_x-u_{i,x}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}+0}$$
$$-[\Pi_0 l_x-u_{i,x}(\sigma_{ij}l_j)]_{\Gamma_{ab}-0}\Big\}dr$$
$$+\int_{\Gamma_{ah}}\Pi_0 dy-u_{i,x}(\sigma_{ij}l_j)dr=0 \tag{2.6}$$

这个问题的条件与[3]中提出的J积分的条件是相同的，但结果是有区别的。问题在于[3]中把沿元素边界$\Gamma_a=\Gamma_{ab}\cup\Gamma_{ah}$的能量改变量的积分，错误地完全采用沿裂纹边界$\Gamma_{ah}$的能量改变量的积分代之。在某些条件下，$J$积分的形式仅仅表示沿着裂纹边界法线方向（或坐标方向）的能量释放率。

三、结　　语

这四类边界积分变分定理有广泛的实用意义。当进行断裂分析时，可用它们来计算沿裂纹边界法线方向的能量释放率；在孔洞存在的情况下，在孔洞边界存在或不存在外力作用时，可用它们来计算沿孔洞边界法线方向的能量改变量；在进行离散分析时，也可用来建立离散方程，以便求解函数值。

参 考 文 献

[1] 牛庠均，固体的离散型变分原理——有限元离散分析的变分原理，应用数学和力学，2,5(1981)，505—520.

[2] 牛庠均，离散型固体力学及其间断型变分原理，应用数学和力学，4,3(1983)，427—438.

[3] Rice, J. R., A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and crack, *Journal of Applied Mechanics*, 35,2(June 1968).

The Boundary Intergral-Variational Theorems of an Arbitrary Element in the Solid——To Compute the Energy Release Rate of an Arbitrary Crack Extension

Niu Xiang-jun
(Beijing Polytechnic University, Beijing)

Abstract

Based on the solid mechanics of the discrete form and its variational principles proposed by Niu[1,2], this paper puts forward four kinds of the boundary integral-variational theorems of an arbitrary element. In the course of the fracture analysis,they can be used to compute the energy release rate along the normal direction of the crack boundary. When there is the hole in the solid, and there are the given surface forces on the hole boundary or there are not any given surface forces on the hole boundary, they can be used to compute the variation of the energy along the normal direction of the hole boundary. In the course of the discrete analysis, they can be used to establish the discrete equations, so that the values of the unknown functions are solved. At the same time, from this paper we know that the J-integral proposed by Rice[3] represents an integral to be independent of a path imperfectly.