应用数学和力学，第5卷第1期（1984年1月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

建议一个角应变的新定义*

严 宗 达

（天津大学，1983年4月14日收到）

摘 要

本文建议了一个角应变的新定义．这个新定义和线应变的定义相类似，也是一种变化率（角位移的变化率）．文中证明了这一新定义与原有定义是一致的，但在几何解释上却更为方便．文中还利用新的角应变定义证明了转轴公式，组成了应变张量和证明了剪切虎克定律．

一、引 言

在固体力学中对线应变和角应变早有现成的定义．但对比一下就可发现，线应变的定义是一种"变化率"，而角应变的定义却是一个特定大小的角度（直角）在变形后的改变量，不是一种"变化率"，两者似乎不够谐调．特别是在一个锐角边界附近，在域内不能取一个直角，那么在这里角应变在几何上又代表什么呢？于是可以想到，能不能和线应变类比，给角应变下一种能代表"变化率"的定义呢？本文即提出一种以"变化率"表达的角应变的新定义，并证明这种新定义和原有定义在表达上是一致的，而在几何解释上却更为方便．

二、在平面上线素的角位移

设在平面x-y上有线素AB，其长为ds，与x轴夹角为θ．A，B坐标分别为(x,y)及$(x+dx,y+dy)$（图1）．当A，B分别有位移u，v及$u+du$，$v+dv$时，线素AB发生角位移． 设此时AB与x轴的夹角为θ_1，则有

$$\operatorname{tg}\theta=\frac{dy}{dx} \tag{2.1}$$

$$\operatorname{tg}\theta_1=\frac{dy+dv}{dx+du} \tag{2.2}$$

我们定义线素AB的角位移ψ为

$$\psi=\theta-\theta_1 \tag{2.3}$$

规定当θ减小时ψ为正，即规定ψ以顺时针转动为正．

由(2.3)，我们有

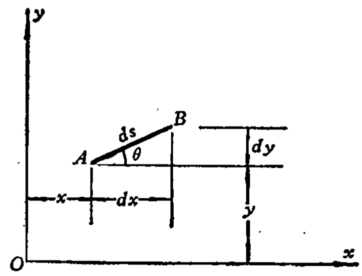


图 1

* 薛大为推荐．

$$\mathrm{tg}\psi=\mathrm{tg}(\theta-\theta_1)=\frac{\mathrm{tg}\theta-\mathrm{tg}\theta_1}{1+\mathrm{tg}\theta\mathrm{tg}\theta_1}=\frac{dudy-dvdx}{(dx+du)dx+(dy+dv)dy} \tag{2.4}$$

在小变形时，du，dv 和 dx，dy 相较为小量，且 ψ 本身为小量，故在（2.4）中略去高次小量得：

$$\psi\approx\mathrm{tg}\psi\approx\frac{dudy-dvdx}{ds^2}=\frac{du}{ds}\cdot\frac{dy}{ds}-\frac{dv}{ds}\cdot\frac{dx}{ds}$$

$$=\frac{du}{ds}\sin\theta-\frac{dv}{ds}\cos\theta \tag{2.5}$$

又

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\frac{\partial u}{\partial x}ds\cos\theta+\frac{\partial u}{\partial y}ds\sin\theta \tag{2.6}$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=\frac{\partial v}{\partial x}ds\cos\theta+\frac{\partial v}{\partial y}ds\sin\theta \tag{2.7}$$

以(2.6)，(2.7)代入(2.5)整理即得：

$$\psi=\frac{\partial u}{\partial y}\sin^2\theta-\frac{\partial v}{\partial x}\cos^2\theta+\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\sin\theta\cos\theta \tag{2.8}$$

(2.8)式即为位移u，v及方位角θ与角位移ψ的关系式。

三、用角位移的变化率定义角应变

设在平面x-y上有线素AB及AC，与x轴的夹角分别为θ及$\theta+\Delta\theta$(图2)。并设在变形后AB及AC的角位移分别为ψ及 $\psi+\Delta\psi$，则AB与AC夹角的改变将为$\Delta\psi$（以夹角减小为正）。

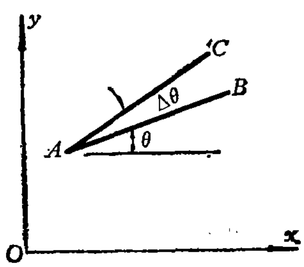


图 2

我们可以定义AB与AC夹角的平均角应变（即每单位夹角产生的夹角改变）为

$$\xi_{\mathrm{av}}=\frac{\Delta\psi}{\Delta\theta} \tag{3.1}$$

现使AC的方位无限趋近于AB，即$\Delta\theta\to0$，则ξ_{av}将趋向于一个固定的极限，我们即定义此极限为线素AB的角应变，以ξ表之。即

$$\xi=\lim_{\Delta\theta\to0}\frac{\Delta\psi}{\Delta\theta}=\frac{d\psi}{d\theta} \tag{3.2}$$

以(2.8)式代入(3.2)式即得：

$$\xi=\frac{d\psi}{d\theta}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\sin2\theta+\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\cos2\theta \tag{3.3}$$

(3.3)式中的 $\frac{\partial u}{\partial x}$，$\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}$分别是$\varepsilon_x$，$\varepsilon_y$，$\gamma_{xy}$($\gamma_{xy}$是按原有定义在$A$点 xy方向的角应变，即过A点与x，y轴平行的两线素所夹直角的改变)，故可写为

$$\xi=\gamma_{xy}\sin2\theta+(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cos2\theta \tag{3.4}$$

四、角应变ξ的几个性质

从(3.3)或(3.4)式出发，我们可以导出ξ的如下性质：

性质 1 平行于x轴的线素的角应变ξ_x等于x向线应变减去y向线应变。即

$$\xi_x=\varepsilon_x-\varepsilon_y \tag{4.1}$$

证：在(3.4)式中令$\theta=0$，即得(4.1)式。

推论 任意方向α的线素的角应变ξ_α等于α方向的线应变减去与α垂直的方向α'的线应变。即

$$\xi_\alpha=\varepsilon_\alpha-\varepsilon_{\alpha'} \tag{4.2}$$

证：因坐标轴方向可以任意选定，不影响(3.4)式的成立。故可选α方向为x轴，则α'方向为y轴，应用(4.1)式，即得(4.2)。

性质 2 平分x，y方向的分角线的角应变即等于原来定义的角应变γ_{xy}。

$$\xi_{\frac{\pi}{4}}=\gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x} \tag{4.3}$$

证：在(3.3)，(3.4)式中令$\theta=\frac{\pi}{4}$，即得(4.3)式。

我们还可以验证由角应变ξ产生的夹角改变在平行x轴及平行y轴方向所夹的直角内的积累即等于γ_{xy}。

$$\text{直角改变}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\xi\,d\theta=\gamma_{xy}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta d\theta+(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2\theta d\theta=\gamma_{xy}$$

性质 3 两互相垂直方向线素的角应变等值反号。即

$$\xi_{\theta+\frac{\pi}{2}}=-\xi_\theta \tag{4.4}$$

这一性质也可称为剪应变互等定理。

证：在(3.4)式中以$\theta+\frac{\pi}{2}$代替θ得

$$\xi_{\theta+\frac{\pi}{2}}=-\gamma_{xy}\sin 2\theta-(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\cos 2\theta=-\xi_\theta$$

性质 4 ξ的极值方位与$\xi=0$的方位相差$\frac{\pi}{4}$角。

证：欲求ξ的极值方位，须将(3.4)式对θ求导，并使之等于0。

$$\frac{d\xi}{d\theta}=2\gamma_{xy}\cos 2\theta-2(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin 2\theta=0$$

设ξ的极值方位与x轴的夹角为θ_0，则有

$$2\gamma_{xy}\cos 2\theta_0-2(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin 2\theta_0=0 \tag{4.5}$$

再以$\theta=\theta_0\pm\frac{\pi}{4}$代入(3.4)式得

$$\xi_{\theta_0\pm\pi/4}=\pm[\gamma_{xy}\cos 2\theta_0-(\varepsilon_x-\varepsilon_y)\sin 2\theta_0] \tag{4.6}$$

由(4.5)式知(4.6)式之右方为0，即

$$\xi_{\theta_0\pm\pi/4}=0$$

即证明了性质4。

极值方位 θ_0 可由(4.5)式求得

$$\operatorname{tg} 2\theta_0=\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}=\frac{\xi_{\pi/4}}{\xi_{\theta=0}} \tag{4.7}$$

五、三维问题中一点的应变分量

选直角坐标系 x_1, x_2, x_3, 各点平行于 x_i 轴的位移分量表为 u_i $(i=1,2,3)$. 又在 x_ix_j 平面内作 x_i, x_j 正方向分角线 α_k $(i,j,k=1,2,3;\ i\neq j,\ k\neq i,\ k\neq j)$(图 3),则点 O 处的变形状态可用下面的三个线应变分量及三个角应变分量来描写:

平行于 x_i 轴的线应变 ε_i $(i=1,2,,3)$;

分角线 α_k 在 x_ix_j 平面内的角应变 ξ_{α_k} $(k=1,2,3)$.

各应变分量与位移分量间的几何方程为:

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_1&=\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\\ \varepsilon_2&=\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\\ \varepsilon_3&=\frac{\partial u_3}{x\partial_3}\end{aligned}\right\} \tag{5.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\xi_{\alpha_1}&=\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\\ \xi_{\alpha_2}&=\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\\ \xi_{\alpha_3}&=\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

(5.1)式可由线应变定义得到, (5.2)式由(4.3)式应用于不同坐标面得到.

现在来推导这些应变分量的转轴公式. 设转轴前后的坐标系分别为 x_i $(i=1,2,3)$, y_p $(p=1,2,3)$ 如图 4 所示. 令轴 x_i 和 y_p 的夹角余弦为 l_{ip}. 又设 β_p 为在 y_qy_r 坐标面内 y_q, y_r 正方向的分角线, β'_p 为 y_r 正向及 y_q 负向的分角线 $(p,q,r=1,2,3;\ q\neq r,\ p\neq q,\ p\neq r)$, 显然 β_p 和 β'_p 是互相垂直的. 现在要求用 x_i 坐标系内的应变分量来表示 y_p 坐标系内的应变分量 ε_p 及 ξ_{β_p}.

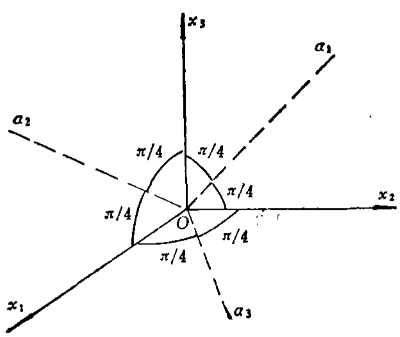


图 3

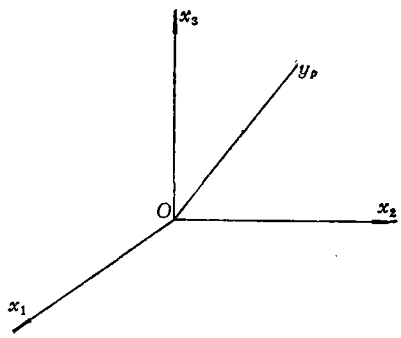


图 4

由一般弹性力学书中的推导可得线应变的转轴公式

$$\varepsilon_p = l_{1p}^2\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + l_{2p}^2\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + l_{3p}^2\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + l_{2p}l_{3p}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)$$

$$+l_{3p}l_{1p}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)+l_{1p}l_{2p}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right) \tag{5.3}$$

以(5.1)，(5.2)代入即得

$$\varepsilon_p = \varepsilon_1 l_{1p}^2 + \varepsilon_2 l_{2p}^2 + \varepsilon_3 l_{3p}^2 + \xi_{\alpha_1} l_{2p} l_{3p} + \xi_{\alpha_2} l_{3p} l_{1p} + \xi_{\alpha_3} l_{1p} l_{2p} \tag{5.4}$$

为了求角应变的转轴公式，我们先沿 β_p 及 β'_p 上各取一单位向量，它们在 y_q 及 y_r 上的投影分别为$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$及$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$，故 β_p 及 β'_p 在 x_i 坐标系内的方向余弦分别为

$$\left.\begin{aligned} &\text{对 } \beta_p, \qquad l'_{ip} = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_{iq}+l_{ir}) \\ &\text{对 } \beta'_p, \qquad l''_{ip} = \frac{1}{\sqrt{2}}(l_{ir}-l_{iq}) \end{aligned}\right\} \tag{5.5}$$

$$(i=1,2,3;\ \ p,q,r=1,2,3;\ \ q\neq r,\ \ p\neq q,\ \ p\neq r)$$

由角应变的性质 1[(4.2)式]知

$$\xi_{\beta_p} = \varepsilon_{\beta_p} - \varepsilon_{\beta'_p} \tag{5.6}$$

分别以 β_p 及 β'_p 代替 (5.4) 式中的 p，则式中的 l_{ip} 应分别换为 l'_{ip} 及 l''_{ip} $(i=1,2,3)$，于是可得

$$\begin{aligned}\xi_{\beta_p} = &\varepsilon_1(l'^2_{1p}-l''^2_{1p})+\varepsilon_2(l'^2_{2p}-l''^2_{2p})+\varepsilon_3(l'^2_{3p}-l''^2_{3p}) \\ &+\xi_{\alpha_1}(l'_{2p}l'_{3p}-l''_{2p}l''_{3p})+\xi_{\alpha_2}(l'_{3p}l'_{1p}-l''_{3p}l''_{1p}) \\ &+\xi_{\alpha_3}(l'_{1p}l'_{2p}-l''_{1p}l''_{2p})\end{aligned} \tag{5.7}$$

以(5.5)代入(5.7)，整理即得

$$\begin{aligned}\xi_{\beta_p} = &2\varepsilon_1 l_{1q}l_{1r}+2\varepsilon_2 l_{2q}l_{2r}+2\varepsilon_3 l_{3q}l_{3r} \\ &+\xi_{\alpha_1}(l_{2q}l_{3r}+l_{3q}l_{2r})+\xi_{\alpha_2}(l_{3q}l_{1r}+l_{1q}l_{3r}) \\ &+\xi_{\alpha_3}(l_{1q}l_{2r}+l_{2q}l_{1r}) \\ &(p,q,r=1,2,3;\ \ q\neq r,\ \ p\neq q,\ \ p\neq r)\end{aligned} \tag{5.8}$$

(5.8)式即为角应变的转轴公式.

若令

$$\varepsilon_{ij} = \begin{cases}\varepsilon_i & (i=j=1,2,3) \\ \xi_{\alpha_k}/2 & (i,j,k=1,2,3;\ \ i\neq j,\ \ k\neq i,\ \ k\neq j)\end{cases} \tag{5.9}$$

则(5.6)，(5.8)可统一写为

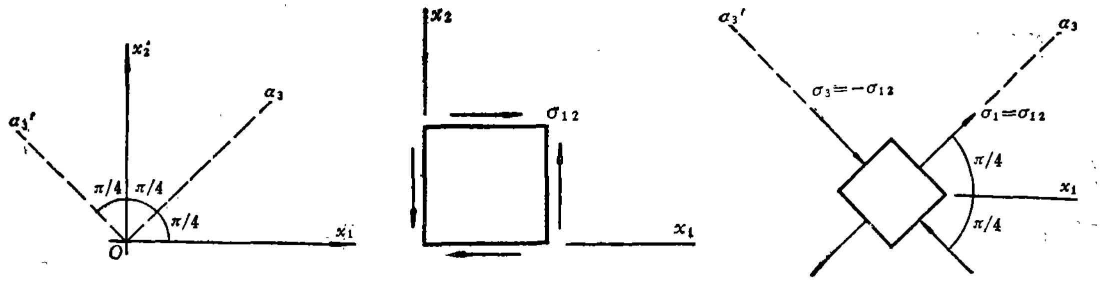
$$\varepsilon_{qr} = \varepsilon_{ij} l_{iq} l_{jr} \qquad (i,j,q,r=1,2,3) \tag{5.10}$$

因而 ε_{ij} 即组成应变张量（二阶张量）.

由上可见，在三维问题中一点处的变形状态可以由该点处沿坐标轴的三个线应变和该点处三个坐标面上坐标轴分角线在坐标面内的角应变来决定. 这正和物体上一点附近的刚体位移可以通过该点的沿坐标轴的三个线位移和三个坐标面上坐标轴分角线在坐标面内的角位移来描写有着很好的对应.

六、剪切虎克定律

现在来研究角应变和剪应力的关系，即剪切虎克定律。图 5(a) 所示为 x_1x_2 坐标面，其上 α_3 和 α_3' 分别是 x_1x_2 正向分角线及 x_2 正向和 x_1 负向分角线。设有剪应力分量 σ_{12} 作用在以 x_1 轴为法线及以 x_2 轴为法线的面上如图 5(b)，现由图 5(b) 中截出 α_3，α_3' 方向的单元体，其上作用有主应力 $\sigma_1=\sigma_{12}$，$\sigma_3=-\sigma_{12}$[图 5(c)]。由广义虎克定律得



(a) (b) (c)

图 5

$$\varepsilon_{\alpha_3}=\frac{1}{E}(\sigma_1-\mu\sigma_3)=\frac{\sigma_{12}}{E}(1+\mu) \tag{6.1}$$

$$\varepsilon_{\alpha_3'}=\frac{1}{E}(\sigma_3-\mu\sigma_1)=-\frac{\sigma_{12}}{E}(1+\mu) \tag{6.2}$$

式中E为弹性模量，μ为波松比。由(4.2)式可得

$$\xi_{\alpha_3}=\varepsilon_{\alpha_3}-\varepsilon_{\alpha_3'}=\frac{2\sigma_{12}}{E}(1+\mu)=\frac{\sigma_{12}}{G} \tag{6.3}$$

式中 $G=\dfrac{E}{2(1+\mu)}$ 为剪切弹性模量。

对其他分量也同理可证，故有

$$\xi_{\alpha_k}=\frac{\sigma_{ij}}{G} \qquad (i,j,k=1,2,3;\ i\neq j,k\neq i,k\neq j) \tag{6.4}$$

或

$$\varepsilon_{ij}=\frac{\sigma_{ij}}{2G} \qquad (i,\ j=1,2,3;\ i\neq j) \tag{6.5}$$

即剪切虎克定律。

七、比功的计算及广义应力

在图5所示单元体上当有应变产生时，σ_{12} 产生的比功为

$$w_{12}=\sigma_1\varepsilon_{\alpha_3}+\sigma_2\varepsilon_{\alpha_3'}=\sigma_{12}(\varepsilon_{\alpha_3}-\varepsilon_{\alpha_3'})=\sigma_{12}\xi_{\alpha_3}=2\sigma_{12}\varepsilon_{12} \tag{7.1}$$

故与角应变ξ_{α_3}相对应的广义应力即是 σ_{12}。对其他分量可以类推，因而可知，应力分量及应变分量均用应力张量σ_{ij}及应变张量ε_{ij}表示时，单元体的比功为

$$w=\sigma_{ij}\varepsilon_{ij} \qquad (i,j=1,2,3) \tag{7.2}$$

八、结　　语

从以上分析可以看到，用角位移的变化率来定义角应变有如下优点：

(1) 定义以导数形式表示，和线应变完全对应，且几何概念清晰．在锐角边界也有明确的几何意义．

(2) 建立了ξ_a与ε_a和$\varepsilon_{a'}$之间的关系 [(4.2) 式]，使角应变与线应变之间有了比较简单的联系．利用这种关系可以比较简捷地推导出角应变的转轴公式及剪切虎克定律．

(3) 因新定义的角应变ξ与原定义的角应变γ实际上是一致的(性质2)，所以γ具有的一切性质对ξ无条件成立．

(4) 对物体在一点附近刚体位移的描写和变形状态的描写形式可以很好地对应．

参　考　文　献

[1] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，(1980)．
[2] 杨桂通，《弹塑性力学》，人民教育出版社，(1981)．
[3] 徐芝纶，《弹性力学》上册，人民教育出版社，(1979)．
[4] Timoshenko, S. and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, (1951).
[5] Wang Chi-teh, *Applied Elasticity*, (1953).

Suggestion of a New Definition of Angular Strain

Yan Zong-da
(Tianjin University, Tianjin)

Abstract

A new definition of angular strain is put forward in this paper. Analogous to the definition of linear strain, angular strain is also defined as a rate of change (of angular displacement). It is verified that the new definition is equivalent to the original, but it is more convenient for geometrical interpretations. Using this new definition we deduce the transformation formulas for the rotation of coordinate axes, erect the strain tensor and verify the Hooke's law for shearing.