应用数学和力学，第4卷第6期（1983年11月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

热力学理论与空化现象

蔡树棠　　　　刘一心

（中国科学技术大学近代力学系）　（黄河水利委员会水利科学研究所）

（1983年5月8日收到）

摘　要

有关空化现象的理论研究大多建立在1917年由Rayleigh[1]开始的，后由Plesset等人发展起来的单个空泡运动理论的基础上．该理论仅从流体动力学的某些观点出发，考虑了力的作用，对诸如水下爆炸等问题的讨论，无疑是合适的．由于忽视了空泡生长或消失过程中气、液两相间的物质交换及能量转化，因此对空化现象的讨论则认为是不完备的．

本文主要从热力学观点，分析高速水流中的空化现象、空泡形成条件、空化数以及讨论空化模型实验的相似性问题．

一、引　言

Rayleigh-Plesset空泡运动方程

$$\ddot{R}+\frac{3}{2}\dot{R}^2=\frac{1}{\rho}\left(P_v+P_g-P_l-\frac{2\sigma}{R}-4\mu\frac{\dot{R}}{R}\right) \tag{1.1}$$

在空化理论研究中多被采用[2][3][4]．式中R为空泡半径，P_v及P_g分别为空泡内部的蒸气及气体分压，P_l为液体压强，σ，μ分别为液体表面张力系数及粘性系数，ρ为液体密度．

该方程是用于描述球对称个体空泡的膨胀和收缩运动，认为空泡运动过程中，气液两相之间不存在质量交换及能量转化，因此它是一个纯粹的不可压缩流体中空泡绝热运动问题．用这样的理论来讨论诸如水下爆炸、液体内部火花放电致泡等运动问题无疑是合适的，但无法说明液相中气相空泡之所以产生或消失以及工程高速水流中的初生与消失空化现象．本文根据热力学原理，讨论空化现象，除流体动力条件外，尚考虑相平衡条件、物态方程及能量方程．

二、空泡存在时体系的平衡状态

讨论水介质中的空泡现象，实际存在的水被认为是氧、氮的理想稀溶液，其他溶质忽略不计；同样，气相组成也是这三种物质即水蒸气、氧气、氮气．

以N_i代表三种物质的克分子数，$i=1$代表水，$i=2$代表氧，$i=3$代表氮．α，β分别代表

气相与液相；我们把这三种气体均认为近似于理想气体，用U_j代表j组成成分的偏克分子内能，μ_i代表i组分的化学势，n为空泡个数；r为空泡半径；P为压强，σ为表面张力系数。

考虑一个孤立体系，给定内能U及各组分的克分子数N_i°，求在水压强为P^β时，气相中各组成成分的克分子数N_i^α、气泡个数n、气泡半径r及气泡中的压强P^α。未知数计有N_i^α $(i=1, 2, 3)$，P^α，n，r共六个，相应的方程式有：

相平衡方程，即各组分的化学势相等[5]

$$\mu_i^\alpha=\mu_i^\beta \qquad (i=1, 2, 3) \tag{2.1}$$

式中[5]

$$\mu_i^\alpha=RT(\varphi_i+\ln P^\alpha+\ln x_i^\alpha) \tag{2.2}$$

$$\mu_i^\beta=g_i^\beta+RT\ln x_i^\beta \tag{2.3}$$

$$\varphi_i=\frac{h_{i0}}{RT}-\int\frac{dT}{RT^2}\int c_{pi}dT-\frac{s_{i0}}{R} \tag{2.4}$$

$$g_i^\beta=u_i^\beta-Ts_i^{\beta *}+P^\beta V_i^\beta \tag{2.5}$$

以上诸量与Henry系数k_i的关系为[5]

$$\left.\begin{aligned} &RT\ln k_i=g_i^\beta-RT\varphi_i \qquad (i=1, 2, 3)\\ &Px_i^\alpha=k_ix_i^\beta \qquad (i=1, 2, 3)\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

且：

$$\left.\begin{aligned} &N_i^\alpha+N_i^\beta=N_i^\circ,\ N^\alpha=\sum_{j=1}^3 N_j^\alpha,\ N^\beta=\sum_{j=1}^3 N_j^\beta\\ &x_i^\alpha=\frac{N_i^\alpha}{N^\alpha},\ x_i^\beta=\frac{N_i^\beta}{N^\beta}\end{aligned}\right\} (i=1, 2, 3) \tag{2.7}$$

式中符号函义同[5]。

除相平衡条件外，还有力平衡条件[5]即：

$$P^\alpha-P^\beta=\frac{2\sigma}{r} \tag{2.8}$$

及理想气体的物态方程[5]：

$$P^\alpha\frac{4}{3}\pi r^3n=N^\alpha RT \tag{2.9}$$

最后，还有总能量方程：

$$\bar{U}_0=\sum_i N_i^\beta u_i^\beta+\sum_i N_i^\alpha u_i^\alpha+4\pi r^2n\left(\sigma-T\frac{d\sigma}{dT}\right)+\sum_i N_i(P^\alpha V_i^\alpha-P^\beta V_i^\beta) \tag{2.10}$$

计有(2.1) $(i=1, 2, 3)$，(2.8)，(2.9)，(2.10)六个方程式相应于六个未知数N_i，P^α，n，r。因此，在平衡状态时问题是可解的，但必须满足物理条件：

$n>0$（且为整数）；$N_i^\circ>N_i^\alpha$，$N_i^\circ>N_i^\beta$，$N_i^\circ>0$；$r>0$，$P>0$。

三、空泡的初生条件

空泡的产生具有一定的生长发育过程，实际上是在非平衡状态下进行的。但一般说来，它偏离平衡状态并不远，为弄清问题，以下讨论均从平衡状态开始。

空泡之成立必须有足够多的气体分子，满足连续介质条件，而气体分子体系作为连续介

质处理的必要条件是该体系所占的线尺度大于分子平均自由程，否则，它所产生的作用只是单个分子的作用，而不能作为连续介质．因此引入最小空泡半径r^*为

$$r^*=c\cdot L \tag{3.1}$$

式中c为常数，L为平均自由程[6]．

$$L=\frac{1}{\sqrt{2}\,\pi n^* D^2} \tag{3.2}$$

n^*为单位体积中分子个数，D为分子碰撞半径，若分子尺寸相同，则D为分子直径．n^*与压强P^α的关系有[6]

$$P^\alpha=n^* kT \tag{3.3}$$

代入后得：

$$r^*=\frac{ckT}{\sqrt{2}\,\pi P^\alpha D^2}=\frac{cRT}{\sqrt{2}\,\pi P^\alpha N_0 D^2} \tag{3.4}$$

式中k为Boltzmann常数，N_0为Avogadro数．代入力平衡方程式(2.8)得：

$$P^\alpha-P^\beta=\frac{2\sigma}{r^*}=2\sigma\frac{\sqrt{2}\,\pi P^\alpha N_0 D^2}{cRT} \tag{3.5}$$

$$P^\beta=P^\alpha\left(1-\frac{2\sqrt{2}\,\pi\sigma P^\alpha N_0 D^2}{cRT}\right) \tag{3.6}$$

由(3.4)知

$$P^\alpha\cdot r^*=\frac{cRT}{\sqrt{2}\,\pi N_0 D^2} \tag{3.4$'$}$$

而由(2.9)式得

$$P^\alpha n\frac{4}{3}\pi r^{*3}=N^\alpha RT \tag{2.9}$$

将式(3.4)′代入(2.9)′

$$\frac{4}{3}\pi r^{*2} n\frac{cRT}{\pi\sqrt{2}\,N_0 D^2}=N^\alpha RT$$

化简得：

$$4\pi r^{*2} n=\frac{3\pi N^\alpha\sqrt{2}\,N_0 D^2}{c} \tag{3.7}$$

代入(2.10)能量方程，得

$$\bar{U}_0=\sum_i\left(N_i^\beta u_i^\beta+N_i^\alpha u_i^\alpha+N_i^\alpha\frac{3\sqrt{2}\,\pi N_0 D^2}{c}u+N_i^\alpha RT-N_i^\alpha P^\beta V_i^\beta\right)^{*)} \tag{3.8}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned} &u=\sigma-T\frac{d\sigma}{dT}\\ &P^\alpha V_i^\alpha=RT\end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

---

*) 应为

$$\bar{U}_0+\sum N_i P_0^\beta V_i^\beta=\sum N^\alpha u^\alpha+\sum N_i^\beta u_i^\beta+\sum N_i^\alpha P^\alpha V_i^\alpha+\sum N_i^\beta P^\beta V_i^\beta+4\pi r^2 nu$$

式中略去了空泡产生前的压强P_0^β和P^β的差别．

这样，我们可以得到(2.1)，(3.4)，(3.6)，(3.7)，(3.8)七个方程式，相应于七个未知数 $N_i^\alpha(i=1, 2, 3)$，P^α、P^β、n，r^*．问题是可解的．求解上述方程后，所得 P^β 即认为是初生空化时求的平衡态压强，以 P_c^β 表示．

四、水动力方程及能量方程

忽略水的可压缩性，粘性及湍流现象，其运动方程式为Euler方程．

$$\rho\left(\frac{\partial U_i}{\partial t}+U_j\frac{\partial U_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial P}{\partial x_i}+\rho g_i \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial U_j}{\partial x_j}=0 \tag{4.2}$$

式中 g_i 为重力加速度．定常运动中，在同一条流线上则有Bernoulli方程：

$$P_0+\frac{1}{2}\rho V_0^2+\rho g_i z_0=P^\beta+\frac{1}{2}\rho V^2+\rho g_i z \tag{4.3}$$

考虑了粘性应力及Reynolds应力后，运动方程(4.1)应改为Reynolds方程

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}\right)=-\frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i}-\frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\overline{u_i'u_j'})+\mu\nabla^2 U_i+\rho g_i \tag{4.4}$$

带"—"符号为平均值，"′"表示脉动量．

对应于(4.3)式的方程为：

$$P_0+\frac{1}{2}\rho V_0^2+\rho g z_0-\zeta\left(\frac{1}{2}\rho V_0^2\right)=P^\beta+\frac{1}{2}\rho V^2+\rho g z \tag{4.5}$$

其中 ζ 为阻力系数，可分为两个部分：

$$\zeta=\zeta_1+\zeta_2 \tag{4.6}$$

ζ_1 接近于常数，为相应于Reynolds应力项的阻力系数；ζ_2 正比于 Reynolds 数的倒数，它是相应于粘性阻力项的阻力系数．

水在产生空泡前的能量方程为

$$\rho\left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial t}+\bar{U}_j\frac{\partial \bar{U}}{\partial x_j}\right)=\lambda\nabla^2 T-\frac{\partial}{\partial x_j}\overline{(\rho u_j' U')}+\mu\left(\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}+\frac{\partial \bar{U}_j}{\partial x_i}\right)\frac{\partial \bar{U}_i}{\partial x_j}$$
$$+\mu\overline{\left(\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j'}{\partial x_i}\right)\frac{\partial u_i'}{\partial x_j}} \tag{4.7}$$

它的有限形式可写成

$$\bar{U}=U_0-(Q+W) \tag{4.8}$$

式中Q为水传给外界的热量减去内摩擦产生的热量，W 为对外界所做的功．

五、相　变　过　程

液相中气相空泡的生成或消失的过程是相变过程．该过程中，介质各组成成分的克分子数不断改变，气相与液相之间有不断的质量交换，化学势起着决定性作用[7]．按不可逆热力学规律，气相 j 组分的净增加率[8]为

$$\gamma_j=K_j(\mu_j^\beta-\mu_j^\alpha) \qquad (j=1,\ 2,\ 3) \tag{5.1}$$

由(5.1)可知空泡的产生或消失，不仅存在着两相之间的质量交换，也不象Rayleigh-Plesset方程描述的那样迅速．事实上，空化过程是在非平衡状态下进行的．但在一定情况下，空泡中的压强、空泡数目等与平衡状态比较接近．因此，我们不应该以单个空泡及不考虑质量交换的理论和实验作为讨论问题的依据，而应以平衡状态作为基础来讨论流动时产生的空化现象．

六、关于空化数问题

按照空化数的定义，

$$K=\frac{P_0-P_s}{\frac{1}{2}\rho V_0^2} \tag{6.1}$$

式中P_s为相应温度下液体的饱和蒸气压．空化数K是一个特定的无量纲数，用于描述流体的空化条件．如果认为产生空化的过程接近于平衡过程．那么，只要从第三节中的七个方程式联立求解．水的平衡态压强P_e^β，则相应的初生空化数应为

$$K_i=\frac{P^\beta-P_s}{\frac{1}{2}\rho V_0^2}\approx\frac{P_e^\beta-P_s}{\frac{1}{2}\rho V_0^2} \tag{6.2}$$

当然，实际上空化初生时的P^β要略高于水的平衡压强P_e^β，而空泡内部压强P^α要略低于气体的平衡压强，这样相变反应方可进行，使空泡胀大．假如空泡已经充分发育，当增加压力使空泡缩小而最终归于消失，这时对空泡来说．相变反应来不及进行得很完全，以至于表面上看空泡已经缩小到起始尺寸，但气泡中的气体分子数目远大于平衡状态时的数目．在压缩过程中，外界需对空泡作功，最终化为热能；表面积的缩小，表面能的一部分也化为热能，这些热量的散逸，需要一个过程，因此空泡内的温度将高于周围温度．这时的压强应为$P^\beta+\delta P^\beta$且大于初生时平衡压强P_e^β，则消失空化数K_d为

$$K_d=\frac{P^\beta+\delta P^\beta-P_s}{\frac{1}{2}\rho V_0^2}>\frac{P_e^\beta-P_s}{\frac{1}{2}\rho V_0^2}=K_i \tag{6.3}$$

至于K_d与K_i之差值大小，在流速一定的情况下，视加压过程的速度等因素而确定．

七、关于模型实验的相似性

由于空化过程中的热力学作用，采用与原型相同的流体介质进行模型实验，企图模拟或演示原型工程的相似空化状态是很困难的．同时满足流态相似及热力学相似，在天然条件下模型与原型的U_0，N_i°，σ，T，D^2等是相等的，但线尺度的缩小，P^β及V必须相应缩小，显然与前述方程组产生矛盾而达不到相似目的．即使在减压设备中，除N_2°，N_3°略有改变外，其他热力学参数仍不能满足相似条件．

八、讨　论

分析认为，采用与原型相同的介质进行正态模型实验模拟原型空化状态是很困难的．由于尺度效应的存在，必须对模型实验进行引伸．而采用其他方法模拟或直接计算原型空化状

态的可能性是存在的。例如：（1）采用变态模型实验；（2）采用具有热力学性质可满足相似条件的其他介质进行实验；（3）采用计算流体力学方法在边界形状给定时，用数学模型对方程(4.2)，(4.4)，(4.7)等进行数值计算，使之在某一点上的$\bar{U}_0$，P_0^β等满足第三节中的方程式*)，而求解P^β。或者把流体视为两相流，我们可以分别写出气相和液相的运动方程、能量方程、连续方程、及两相间的相平衡方程，来确定初生空化条件。

参考文献

[1] Lamb, H., *Hydrodynamics*(1924), 114—115.

[2] Knapp, R. T., J. W. Daily and F. G. Hammitt, *Cavitation*(1970),76—77.

[3] Hammitt, F. G., *Cavitation and Multiphase Flow Phenomena*(1981),144—145.

[4] Arndt, Roger E. A., *Recent Advance in Cavitation Research*. Section Ⅱ(1980).

[5] 王竹溪，《热力学简程》(1964),107—108,155—156,189—193,199,209—210.

[6] 王竹溪，《统计物理学导论》,61,186

[7] 黄福赐，《工程热力学原理和应用》(1982).

[8] 钱学森，《物理力学讲义》,285.

Thermodynamics on Cavitation

Tsai Shu-tang

(*Department of Modern Mechanics, University of Science and Technology of China, Hefei*)

Liu Yi-xin

(*Institute of Hydraulic Research, Yellow River Conservancy Commission, Zhengzhou*)

Abstract

Many studies on cavitation phenomena were based on the theory of single bubble motion which was first put forward by Rayleigh in his 1917 article and later developed by Plesset et al.[1]. By this theory, only some effects of forces were taken into consideration from hydrodynamics leaving out any thermodynamical effects such as matter interchange between liquid and gaseous phases. Strictly speaking, the theory may be suitable for discussing expansion or/and contraction motion of a bubble formed in liquid, but this theory does not cope with cavitation behaviors in general. In this paper, the cavitation conditions and similarity problems are discussed with thermodynamic effects taken into consideration in addition to the hydrodynamic ones.

---

* $U_0+\sum N_j^\circ P_0^\beta V_j^\beta=\bar{U}+\sum N_j^\alpha P^\alpha V_j^\alpha+\sum N_j^\beta P^\beta V_j^\beta+4\pi r^2 nu$

$\bar{U}_0=\sum_j N_j^\circ u_j^\circ,\ \bar{U}=\sum_j N_j^\alpha u_j^\alpha+\sum_j N_j^\beta u_j^\beta,\ N_j^\circ=N_j^\alpha+N_j^\beta$