应用数学和力学，第4卷第6期（1983年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

论连续体有限变形的位移协调条件

陈　至　达

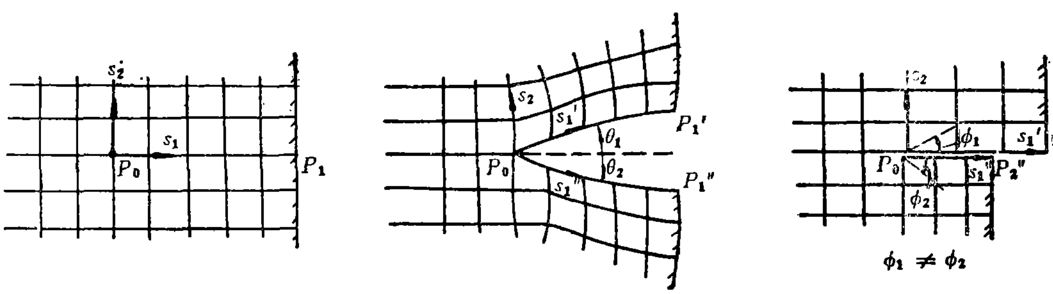
（中国矿业学院北京研究生部，1982年12月6日收到）

摘　　要

有限变形的协调条件在文献中常以Riemann-Christoffel张量等于零表达．本文应用Cesaro方法和作者的非线性应变-转动张量分解定理证明上述条件仅是必要的．尚不充分保证位移场的单值性与连续；文中导出新的一般有限变形的位移协调条件．当应变与转动微小时，它化为Saint-Venant方程．

一、引　　言

如果给定一个物理可能的位移函数，它是单值可微的，则由它可确定变形体中各点的应变分量与转动分量．然而，如果应变分量与转动分量给定，这些分量之间应有什么条件限制，才能保证位移的单值与连续性呢？在经典微小变形理论中，上述问题是用Saint-Venant的应变分量的协调条件表达的．以后Beltrami(1889)引用转动分量证明了位移协调条件的存在性．实际上从连续内部开裂，出现不连续位移看，更简单的直观可以用线段转动的不连续性表达．如下图所示：



(a)　　(b)　　(c)

图　1

在图1(a)中是一条物质线，当沿P_0P_1开裂为二个自由面时，P_0P_1形成二个分支P_0P_1'与P_0P_1''，二分支线的伸长与转动不相等；转动角沿P_0P_1'与P_0P_1''不连续：

$$\frac{\partial\theta}{\partial s_1'\partial s_2} \neq \frac{\partial\theta}{\partial s_1''\partial s_2} \tag{1.1}$$

当位移连续性存在，则有

$$\frac{\partial}{\partial s_2}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s_1}\right)=\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial\theta}{\partial s_2}\right) \tag{1.2}$$

这就是Beltrami的位移连续性条件，这个条件和Saint-Venant条件等价。以下各节，我们将利用Cesaro的位移单值连续积分方法(1906)［参见钱伟长、叶开沅[2]，冯元桢[1]教本］来建立有限位移的协调条件，它是Beltrami型公式(1.2)的数学推广。

二、有限变形的位移单值连续条件

设 $P_0(\mathring{x}^1, \mathring{x}^2, \mathring{x}^3)$ 为单连通区域内某一点，该点的位移 $\mathbf{u}_0(\mathring{x}^1, \mathring{x}^2, \mathring{x}^3)$ 及转动张量 $\mathring{R}^i_j$ 已知。设 $P'(x^{1'}, x^{2'}, x^{3'})$ 为区域中另一点。由 P_0 出发沿任一积分曲线求 P' 点的位移，

$$\mathbf{u}'=\mathbf{u}_0+\int_{P_0}^{P} d\mathbf{u} \tag{2.1}$$

应用陈至达的位移梯度分解定理（参见[3]、[4]），我们有

$$\mathbf{u}'=\mathbf{u}_0+\int_{P_0}^{P'} u^i|_j\mathbf{g}_i dx^j=\mathbf{u}_0+\int_{P_0}^{P}(R^i_j-\delta^i_j+S^i_j)\mathbf{g}_i dx^j \qquad (i,\ j=1,2,3) \tag{2.2}$$

上式 S^i_j——应变分量．R^i_j——转动分量，$\mathbf{g}_i$是在拖带系中沿积分曲线上任一点的协变基矢，$u^i|_j$ 是 u^i 分量的协变导数。

在 (2.2) 式中，下面积分

$$\int_{P_0}^{P}\delta^i_j\mathbf{g}_i dx^j=\int_{P_0}^{P} d\mathbf{s}=\mathbf{L}_{P'P_0} \tag{2.3}$$

$\mathbf{L}_{P'P_0}=\overrightarrow{P'P_0}$ 指 $P'P_0$ 两点间的距离。所以有

$$\mathbf{u}'=\mathbf{u}_0-\mathbf{L}_{P'P_0}+\int_{P_0}^{P} R^i_j\mathbf{g}_i dx^j+\int_{P_0}^{P} S^i_j\mathbf{g}_i dx^j \tag{2.4}$$

当连续体作刚性平移时

$$S^i_j=0,\quad R^i_j=\delta^i_j$$

则由(2.4)知连续体任一点的位移均相同:

$$\mathbf{u}'=\mathbf{u}_0-\mathbf{L}_{P'P_0}+\mathbf{L}_{P'P_0}=\mathbf{u}_0$$

今将 (2.4) 式等号右边第一个积分施行变换，

$$\int_{P_0}^{P} R^i_j\mathbf{g}_i dx^j=\int_{P_0}^{P} R^i_j\mathbf{g}_i d(x^j-x^{j'})$$

$$=(R^i_j\mathbf{g}_i)_{P_0}(\mathring{x}^j-x^{j'})-\int_{P_0}^{P}(x^j-x^{j'})(R^i_j|_l\mathbf{g}_i)dx^l$$

于是有

$$\mathbf{u}'=\mathbf{u}_0-\mathbf{L}_{P'P_0}+(R^i_j\mathbf{g}_i)_{P_0}(\mathring{x}^j-x^{j'})+\int_{P_0}^{P} U^i_l\mathbf{g}_i dx^l \tag{2.5}$$

其中

$$U^i_l\equiv S^i_l-(x^j-x^{j'})R^i_j|_l \tag{2.6}$$

如果变形体的位移场是单值连续的，则式 (2.5) 的积分是连续可积的应与积分途径无关，满足完整积分的条件是:

$$U_i^i|_j = U_j^i|_i \tag{2.7}$$

联合式(2.6)与(2.7)，得到

$$(S_i^i|_j + R_i^i|_j) - (S_j^i|_i + R_j^i|_i) - (x^k - x^{k'})(R_k^i|_{ij} - R_k^i|_{ji}) = 0 \tag{2.8}$$

但由于[4]，有

$$\delta_j^i + u^i|_j = R_j^i + S_j^i \tag{2.9}$$

所以得到

$$(S_i^i|_j + R_i^i|_j) - (S_j^i|_i + R_j^i|_i) = u^i|_{ij} - u^i|_{ji} = u^m \tilde{R}^i_{mji} \tag{2.10}$$

$\tilde{R}^i_{mji}$ 称为Riemann-Christoffel曲率张量

$$\tilde{R}^i_{mji} = \Gamma^i_{ml,j} - \Gamma^i_{mj,l} + \Gamma^k_{ml}\Gamma^i_{kj} - \Gamma^k_{mj}\Gamma^i_{kl} \tag{2.11}$$

Γ^i_{jk}是Christoffel记号．因$\tilde{R}^i_{mjl}$是四阶张量，在卡氏坐标系中$\Gamma^i_{jk}=0$，故有$\tilde{R}^i_{mjl}=0$；此结果对所有曲线的三维空间坐标系均为真．这样根据 (2.10) 式证明位移单值连续条件首先要求：

$$\boxed{u^i|_{ij} - u^i|_{ji} = 0 \qquad (\tilde{R}^i_{mjl} = 0)} \tag{2.12}$$

表明位移分量的导数是可交换的．但此条件为必要，尚不充分．考虑 (2.8)式，因$(x^k - x^{k'})$是任意的，所以 (2.8) 恒为零的条件，尚需要求下列条件成立：

$$\boxed{R_k^i|_{ij} = R_k^i|_{ji}} \tag{2.13}$$

这个条件就是Beltrami型的位移协调条件；现在我们用转动张量的导数可交换性表达，是有限变形的一般协调条件．

对于多连通区域，条件(2.13)仍成立，但要附加补充条件，讨论可参见[1]．

三、线性应变分量的情况——Saint-Venant协调条件

当变形微小，应变分量与转动分量为同阶小量，令e_j^i表示应变分量，ω_j^i表示转动分量：

$$e_j^i = \frac{1}{2}(u^i|_j + u^i|_j^T), \quad \omega_j^i = \frac{1}{2}(u^i|_j - u^i|_j^T) \tag{3.1}$$

T指倒置矩阵．容易证明

$$\omega_j^i|_l = e_l^i|_j - e_l^i|_j^T \tag{3.2}$$

T 指i，j指标倒置，证明上式时，需应用位移分量导数的可交换性公式 (2.12)．在卡氏坐标系中，我们可将 (3.2) 写成

$$\omega_{ij,l} = e_{il,j} - e^T_{il,j} = e_{il,j} - e_{jl,i} \tag{3.3}$$

令

$$\begin{pmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix}$$

公式 (3.3) 给出

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{\partial e_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xx}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{\partial e_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xy}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \omega_z}{\partial z} = \frac{\partial e_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial e_{xz}}{\partial y}, \quad \cdots$$

微小变形的应变分量协调条件可由以上九个式子导出．对R^i_j转动分量的线性化情况

$$R^i_j|_l \simeq \omega^i_j|_l \tag{3.4}$$

一般的位移协调条件(2.13)化为（在卡氏坐标系）：

$$(\omega_{ik,l})_{,j} = (\omega_{ik,j})_{,l} \tag{3.5}$$

或应用(3.3)式结果后得到

$$(e_{il,k} - e_{kl,i})_{,j} = (e_{ij,k} - e_{kj,i})_{,l} \tag{3.6}$$

所以得到微小变形的协调方程：

$$e_{il,kj} - e_{kl,ij} = e_{kj,il} - e_{ij,kl} \qquad (i,j,k,l=1,2,3) \tag{3.7}$$

其中仅有六个是独立的．

四、结　论

本文的证明是十分有趣的，它给经典弹性力学的变形位移协调方程作了重要的补充论证．

(1) 本文证明 Saint-Venant 的微小变形协调方程是有限变形协调方程 (2.13) 的线性化情况．

(2) Murnaghan(1951)[8] 证明 Riemann-Christoffel 张量 $\bar{R}^i_{mjl}=0$ 是有限变形单值连续性保证的必要条件．Eringen(1962)[6] 及其他许多作者都采用这个方程作为有限变形的协调条件．但它的意义是有疑义的．Green 与 Zerna[5] 在他们的1954年出版的著作中采用了这个条件，但在1968年版中删去．本文证明 $\bar{R}^i_{mjl}=0$ 是必要条件，但尚不充分．有限变形位移保证单值性与连续性的充要条件是：

$$u^i|_{lj} = u^i|_{jl}, \quad R^i_k|_{lj} = R^i_k|_{jl}$$

上述的后一方程是否可化归为前一方程的必要结果，当前还没有学者作出证明．

(3) 引用转动分支来表明连续体的位移开裂不连续性更具有直观几何意义．这种 Beltrami 型的协调方程表达式在目前文献中，特别是讨论断裂力学问题有重要意义，应以推广．

参 考 文 献

[1] Fung, Y. C., *Foundation of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, (1965), §4.6.

[2] 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，(1956)，37—39.

[3] 陈至达，《有理力学讲义》，中国矿院，(1980).

[4] 陈至达、连续介质有限变形力学几何场论，力学学报，2(1979)，107—117

[5] Green, A. E. and W. Zerna, *Theoretical Elasticity*, Oxford, (1954), §2.3. 2nd Edition, (1968).

[6] Eringen, A. C., *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, (1962), §13.

[7] Truesdell, C. and R. Toupin, The Classical Field Theories, in *Handbuch der Physik*, Vol Ⅲ/1, Springer-Verlag, (1960)

[8] Murnaghan, F. D., *Finite Deformation of Elastic Solid*, John Wiley, (1951), 38—42.

On the Compatibility Condition of Displacement Field for Finite Deformation of Continuum

Chen Zhi-da

(*Beijing Graduate School, China Institute of Mining*)

Abstract

The vanishing of Riemann-Christoffel tensor is usually adopted as the compatibility condition of finite deformation. However, we prove in this paper by the method of Cesaro that this condition is necessary but not sufficient for the guarantee of single-valued, continuous displacement field. A new general compatibility condition, based on theorem of strain-rotation decomposition (Chen [4]) is derived. The displacement compatible condition reduces to Saint-Venant's condition when strain and rotation are infinitesimal.