应用数学和力学，第4卷第6期（1983年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

三维 Navier-Stokes 方程加罚有限元的共轭梯度法和分块迭代法*

李开泰　黄艾香　李　笃　刘之行

（西安交通大学，1982年12月12日收到）

摘　要

本文对 Navier-Stokes 问题加罚变分形成有限元解给出了共轭梯度算法和分块迭代算法，由于共轭梯度算法中，求解单变量极小值问题得到简化，使得计算时间大为节约。

本文还给出了计算实例。

一、引　言

控制粘性不可压缩流体的 Navier-Stokes 方程的有限元描叙可分为五类：(1) 原始变量方法（或称为速度-压力方法）；(2) 罚函数方法；(3) 流函数方法；(4) 流函数-涡度方法以及 (5) 最优控制方法。这些方法各有自己的优点和缺点。它们的主要区别在于，不可压缩条件以怎样的形式出现在公式中。

在罚函数方法中，不可压缩条件由于在原始的极小化泛函中附加一项正定的“罚泛函”而近似地得到满足。这个方法的优点是压力不出现在原始变分形式中，因而减少了每个元素的自由度数。它的计算简单，以及对高、低雷诺数流动有好的精度，显示出这个方法有竞争能力。而最优控制方法，由于引入了状态向量——它是一个 Stokes 问题的解——把问题转化为极小化“能量泛函”。不可压缩条件可以被处理为强加的，也可引入罚函数来消除。

本文对三维 Navier-Stokes 方程的混合边值问题，给出了加罚变分形式的共轭梯度法和分块迭代法。

$$\left.\begin{aligned}&-\nu\Delta\mathbf{u}+(\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}+\nabla p=\mathbf{f}\qquad \text{在 }\Omega\text{ 内}\\&\operatorname{div}\mathbf{u}=0\qquad \text{在 }\Omega\text{ 内}\\&\mathbf{u}|_{\Gamma_1}=0,\ \left(\nu\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial n}-p\mathbf{n}\right)_{\Gamma_2}=\mathbf{g}\qquad \text{在 }\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2\text{ 上}\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

这里 Ω 是 R^3 中具有Lipschitz连续边界的有界域。我们引入Sobolev空间 $X=(H^1(\Omega))^3$，$X_0=(H_0^1(\Omega))^3$，$V=\{\mathbf{u}\in X,\ \mathbf{u}|_{\Gamma_1}=0\}$ 而 $X_0\subset V\subset X$。此外，让 $V_0=\{\mathbf{u}|\mathbf{u}\in V,\ \operatorname{div}\mathbf{u}=0\}$。

* 钱伟长推荐。

再引进如下的双线性与三线性泛函：

$$a_0(\mathbf{u},\mathbf{v})=\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v}),\ G(\mathbf{u},\mathbf{v})=(\operatorname{div}\mathbf{u},\operatorname{div}\mathbf{v})\qquad\forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$$

$$a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})=((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v},\mathbf{w}),(\mathbf{g},\mathbf{f})=\iiint_\Omega\sum_{i=1}^{3}f^ig^idx\qquad\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V$$

$$a(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})=a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})+a_1(\mathbf{v};\mathbf{u},\mathbf{w})$$

$$a_\varepsilon(\mathbf{u},\mathbf{v})=a_0(\mathbf{u},\mathbf{v})+\frac{1}{\varepsilon}G(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

$$\langle\mathbf{F},\mathbf{v}\rangle=(\mathbf{f},\mathbf{v})+\langle\mathbf{g},\mathbf{v}\rangle=\iiint_\Omega\mathbf{f}\cdot\mathbf{v}dx+\iint_{\Gamma_2}\mathbf{g}\cdot\mathbf{v}ds$$

则问题 (1.1) 的加罚变分形式可表为

$$\begin{cases}\text{求 }\mathbf{u}\in V,\text{ 使得}\\ a_0(\mathbf{u},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v})=\langle\mathbf{F},\mathbf{v}\rangle\qquad\forall\mathbf{v}\in V\end{cases}\tag{1.2}$$

问题 (1.1) 的原始变分形式可表为

$$\begin{cases}\text{求 }\mathbf{u}\in V_0,\text{ 使得}\\ a_0(\mathbf{u},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\mathbf{v})=\langle\mathbf{F},\mathbf{v}\rangle\qquad\forall\mathbf{v}\in V_0\end{cases}\tag{1.3}$$

众所周知，三线性泛函 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 在 $V\times V\times V$ 上是连续的．取 N 为 a_1 的范数：

$$N=\sup_{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V}\frac{|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})|}{|\mathbf{u}|_1|\mathbf{v}|_1|\mathbf{w}|_1}$$

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v}.\mathbf{w})|\leqslant N|\mathbf{u}|_1|\mathbf{v}|_1|\mathbf{w}|_1\qquad\forall\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\in V\tag{1.4}$$

关于 (1.3) 的存在性问题的存在性定理，已有如下结果[13]：当

$$\frac{4N}{\nu^2}\|\mathbf{F}\|_*<1\qquad\mathbf{F}\in V'\tag{1.5}$$

时，问题(1.3) 有唯一的解 u 满足

$$|\mathbf{u}^*|_1\leqslant 2\|\mathbf{F}\|_*/\nu\tag{1.6}$$

此外，由于 $\operatorname{mes}\Gamma_2=0$ 问题 (1.3) 有解且满足

$$|\mathbf{u}^*|_1\leqslant\|\mathbf{F}\|_*/\nu\tag{1.7}$$

这里 $\|\cdot\|_*$ 表示 V 的对偶空间 V' 的范数．而且，在条件

$$\frac{N}{\nu^2}\|\mathbf{F}\|_*<1\qquad\mathbf{F}\in V'\tag{1.8}$$

下，(1.3)有唯一解，它也满足条件(1.7)

类似地，我们有

定理 1． 设 Ω 是 R^n 中具有 Lipschitz 连续边界 $\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$ 的有界开域， 则在条件 (1.5) 下问题 (1.1) 在集合

$$K=\{\mathbf{u}|\mathbf{u}\in V,|\mathbf{u}|_1\leqslant 2\|\mathbf{F}\|_*/\nu\}\tag{1.9}$$

内存在唯一解．

证明：我们考虑辅助问题

$$C(\mathbf{u};\mathbf{w},\mathbf{v})\equiv a_\varepsilon(\mathbf{w},\mathbf{u})+a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},\mathbf{v})=\langle\mathbf{F},\mathbf{v}\rangle\qquad\forall\mathbf{v}\in V\tag{1.10}$$

显然，$\forall\mathbf{u}\in K$，有

(1) $C(\mathbf{u};\cdot,\cdot)$ 是 $V\times V$ 上的连续双线性泛函

(2) $C(\mathbf{u};\cdot,\cdot)$是$V$-椭圆型的

$$C(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v})\geqslant\nu|\mathbf{v}|_1^2/2 \qquad \forall\mathbf{v}\in V \tag{1.11}$$

事实上，$\forall\mathbf{u}\in K$.

$$C(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v})=a_\varepsilon(\mathbf{v},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v})\geqslant(\nu-N|\mathbf{u}|_1)|\mathbf{v}|_1^2$$

由于(1.9)，则(1.11)显然可得.

根据 Lax-Milgram 定理 3，对任一 $\mathbf{u}\in K$，(1.10) 中的 $\mathbf{w}$ 存在唯一解，并且

$$|\mathbf{w}|_1\leqslant2\|\mathbf{F}\|_*/\nu$$

于是 $\mathbf{w}\in K$，因而(1.10)定义了一个 $K\to K$ 的算子 P:

$$P\mathbf{u}=\mathbf{w}$$

我们来证明 P 是一个压缩映射. 取定 $\mathbf{u}_1$，$\mathbf{u}_2\in K$，$\mathbf{u}_1\neq\mathbf{u}_2$. $\mathbf{w}=P\mathbf{u}_1,\mathbf{w}_2=P\mathbf{u}_2$，由 (1.10) 并且利用 a_1 的三线性性性我们得到

$$a_\varepsilon(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2,\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u}_1;\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2,\mathbf{v})=a_1(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1;\mathbf{w}_2,\mathbf{v}) \qquad \forall\mathbf{v}\in V$$

取 $\mathbf{v}=\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2$，据 (1.11) 及 $\mathbf{u}_1\in K$，就有

$$\begin{aligned}\nu|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2|_1^2/2&\leqslant|a_\varepsilon(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)+a_1(\mathbf{u}_1;\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)|\\&=|a_1(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1;\mathbf{w}_2,\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2|\leqslant N|\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1|_1|\mathbf{w}_2|_1|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2|_1\end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{w}_2\in K$，我们有

$$|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2|\leqslant4N\|\mathbf{F}\|_*|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2|/\nu^2$$

依据(1.5)，便知 P 是压缩映射.由于 V 是 Banach 空间且 K 是 V 的闭子集，我们肯定 P 在 K 中有一个不动点.证毕.

定理 2. 设Ω是R^n ($n\leqslant4$)中具有Lipschitz连续边界Γ的有界开域，则存在正常数 α, β 使

$$\nu-c_1\beta/2\geqslant\alpha>0 \tag{1.12}$$

这里 c_1 是 Sobolev 嵌入常数.

$$\|\mathbf{u}\|_{0,4}\leqslant c_1|\mathbf{u}|_1 \qquad \forall\mathbf{u}\in V$$

并且假定

$$N\|\mathbf{F}\|_*/\alpha^2<1 \tag{1.13}$$

则对充分小的，使得

$$\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\alpha}}\|\mathbf{F}\|_*\leqslant\beta \tag{1.14}$$

成立的罚参数$\varepsilon>0$，在集合

$$K_1=\{\mathbf{u}|\mathbf{u}\in V,\|\mathrm{div}\ \mathbf{u}\|_0\leqslant\beta,|\mathbf{u}|_1\leqslant\|\mathbf{F}\|_*/\alpha\} \tag{1.15}$$

中，(1.3)存在唯一的解.

证明：首先，不等式

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v})|\leqslant c_1|\mathbf{v}|_1^2\|\mathrm{div}\ \mathbf{u}\|_0 \tag{1.16}$$

是成立的. 事实上

$$a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{w})+a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},\mathbf{v})=\int_\Omega u^j\frac{\partial}{\partial x^j}(\mathbf{v},\mathbf{w})dx=-\int_\Omega(\mathbf{v},\mathbf{w})\mathrm{div}\ \mathbf{u}dx$$

因而，由 (1.16) 即得

$$|a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v})|\leqslant0.5\|\mathbf{v}\|_{0,4}^2\|\mathrm{div}\ \mathbf{u}\|_0$$

此时，问题(1.10)也定义了一个从 K_1 到 K_1 的算子 P，这是因为，由 (1.12) 就有

$$C(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v})=|\mathbf{v}|_1^2+\frac{1}{\varepsilon}\|\mathrm{div}\ \mathbf{v}\|_0^2+a_1(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{v})$$

$$\geqslant(\nu-c_1\beta/2)|\mathbf{v}|_1^2\geqslant\alpha|\mathbf{v}|_1^2 \qquad \forall \mathbf{v}\in V$$

此外，如果 $\mathbf{w}=P\mathbf{u}$，$\mathbf{u}\in K_1$，则(1.10)得出

$$\nu|\mathbf{w}|_1^2+\|\mathrm{div}\ \mathbf{w}\|_0^2/\varepsilon-c_1|\mathbf{w}|_1^2/2\cdot\|\mathrm{div}\ \mathbf{u}\|_0\leqslant\|\mathbf{F}\|_*|\mathbf{w}|_1 \tag{1.17}$$

即是

$$\alpha|\mathbf{w}|_1^2+\|\mathrm{div}\ \mathbf{w}\|_0^2/\varepsilon\leqslant\|\mathbf{F}\|_*|\mathbf{w}|_1$$

利用 $ab\leqslant\sigma a^2+b^2/4\sigma$ $(\sigma>0)$，我们有

$$\|\mathrm{div}\ \mathbf{w}\|_0^2/\varepsilon+(\alpha-\sigma)|\mathbf{w}|_1^2\leqslant\|\mathbf{F}\|_*^2/4\sigma$$

令 $\sigma=\alpha$ 即得

$$\|\mathrm{div}\ \mathbf{w}\|_0\leqslant\|\mathbf{F}\|_*\sqrt{\frac{\varepsilon}{4\alpha}} \tag{1.18}$$

将 (1.14) 代入 (1.18) 而得

$$\|\mathrm{div}\ \mathbf{w}\|_0\leqslant\beta$$

因而 P：$K_1\to K_1$. P 的压缩性的证明与定理 1 类似．证毕．

设$(\mathbf{u}_\varepsilon,p_\varepsilon)$是(1.2)的解，$(\mathbf{u},p)$是(1.3)的解，则下面的估计式成立[13]：

$$|\mathbf{u}-\mathbf{u}_\varepsilon|_1+\|p-p_\varepsilon\|_0\leqslant c_2\varepsilon$$

这里 c_2 是与$(\mathbf{u},p)$和$(\mathbf{u}_\varepsilon,p_\varepsilon)$无关的常数．

二、最优控制方法与共轭梯度算法

引入泛函

$$J(\mathbf{v})=a_\varepsilon(\mathbf{v}-\boldsymbol{\xi},\mathbf{v}-\boldsymbol{\xi})/2 \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v})$ 是下面变分问题的解：

$$\boldsymbol{\xi}\in V,\ a_\varepsilon(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\langle\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}\rangle-a_1(\mathbf{v};\mathbf{v},\boldsymbol{\eta}) \qquad \forall\boldsymbol{\eta}\in V \tag{2.2}$$

显然，$\boldsymbol{\xi}$ 通过(2.2)依赖于 $\mathbf{v}$，当 $\mathbf{u}$ 是(1.2)的解时，由(2.2)及 $\boldsymbol{\xi}(\mathbf{u})=\mathbf{u}$，故 $J(\mathbf{u})=0$，考察如下的极值问题

求$\mathbf{u}\in V$，使得$J(\mathbf{u})=\min\limits_{\mathbf{v}\in V}J(\mathbf{v})$ (2.3)

显然，(2.2)，(2.3)具有最优控制问题结构，其中$\mathbf{v}$是控制变量，$\boldsymbol{\xi}$ 是状态变量，(2.2)是状态方程，(2.1)是估值函数．

求解(2.2)，(2.3)可用下述的共轭梯度算法：

(1) 取 $\mathbf{u}_0$，$\mathbf{g}_0$ 分别为下列问题的解

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}_0,\mathbf{w})=\langle\mathbf{F},\mathbf{w}\rangle \qquad \forall\mathbf{w}\in V$$

$$a_\varepsilon(\mathbf{g}_0,\mathbf{w})=\langle J'(\mathbf{u}_0),\mathbf{w}\rangle \qquad \forall\mathbf{w}\in V$$

这里$\langle J'(\mathbf{u}_0),\mathbf{w}\rangle$是泛函$J$在$\mathbf{u}_0$处沿$\mathbf{w}$方向的Gateaux导数：

$$\langle J'(\mathbf{u}),\mathbf{w}\rangle=a_\varepsilon(\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi},\mathbf{w})+a(\mathbf{u};\mathbf{v},\mathbf{u}-\boldsymbol{\xi}) \qquad \forall\mathbf{u},\mathbf{v}\in V$$

让$\boldsymbol{\zeta}_0=\mathbf{g}_0$，$\forall n>0$，设$\mathbf{u}_n$，$\mathbf{g}_n$，$\boldsymbol{\zeta}_n$为已知，$\mathbf{u}_{n+1}$，$\mathbf{g}_{n+1}$，$\boldsymbol{\zeta}_{n+1}$的计算可按如下步骤进行：

(2) $\lambda_n=\arg\min\limits_{\lambda\in R}J(\mathbf{u}_n-\lambda\boldsymbol{\zeta}_n)$. $\mathbf{u}_{n+1}=\mathbf{u}_n-\lambda_n\boldsymbol{\zeta}_n$

(3) 由下面问题的解求 $\mathbf{g}_{n+1}$：

$$a_\varepsilon(\mathbf{g}_{n+1},\mathbf{w})=\langle J'(\mathbf{u}_{n+1}),\mathbf{w}\rangle \qquad \forall \mathbf{w}\in V$$
$$\gamma_{n+1}=a_\varepsilon(\mathbf{g}_{n+1},\mathbf{g}_{n+1}-\mathbf{g}_n)/a_\varepsilon(\mathbf{g}_n,\mathbf{g}_n)$$
$$\boldsymbol{\zeta}_{n+1}=\mathbf{g}_{n+1}+\gamma_{n+1}\boldsymbol{\zeta}_n$$

$n=n+1$ 重返(2)，直到收敛。

容易证明，对任一固定的 $\mathbf{v}\in V$，

$$\langle \mathbf{F},\boldsymbol{\eta}\rangle-a_1(\mathbf{v};\mathbf{v},\boldsymbol{\eta})$$

是V上的线性有界泛函，所以存在 $\mathbf{g}(\mathbf{v})\in V'$ 使得

$$\langle \mathbf{g}(\mathbf{v}),\boldsymbol{\eta}\rangle=\langle \mathbf{F},\boldsymbol{\eta}\rangle-a_1(\mathbf{v};\mathbf{v},\boldsymbol{\eta}) \qquad \forall \boldsymbol{\eta}\in V$$

那么，(2.2) 可以改为

求 $\boldsymbol{\xi}\in V$，$a_\varepsilon(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\langle \mathbf{g}(\mathbf{v}),\boldsymbol{\eta}\rangle \qquad \forall \boldsymbol{\eta}\in V$ (2.4)

因为 $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ 是 $V\times V$ 上对称强制双线性泛函，由 Lax-Milgram 定理，$\forall \mathbf{v}\in V$，(2.4) 存在唯一的解 $\boldsymbol{\xi}$ 且

$$|\boldsymbol{\xi}|_1\leqslant\frac{1}{\nu}\|\mathbf{g}\|_* \tag{2.5}$$

由 (2.4) 确定一个 $V\to V$ 的映射：$\mathbf{v}\to\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v})$，记

$$\boldsymbol{\xi}(\mathbf{v})=T\mathbf{v}$$

那么

$$a_\varepsilon(T\mathbf{v},\boldsymbol{\eta})=\langle \mathbf{g}(\mathbf{v}),\boldsymbol{\eta}\rangle \qquad \forall \boldsymbol{\eta}\in V$$

由 (1.4) 有

$$\|\mathbf{g}\|_*=\sup_{\eta\in V}\frac{|\langle \mathbf{F},\boldsymbol{\eta}\rangle-a_1(\mathbf{v};\mathbf{v},\boldsymbol{\eta})|}{|\boldsymbol{\eta}|_1}\leqslant\|\mathbf{F}\|_*+N|\mathbf{v}|_1^2 \tag{2.6}$$

由 (2.5) 得

$$|T\mathbf{v}|_1\leqslant\frac{1}{\nu}(\|\mathbf{F}\|_*+N|\mathbf{v}|_1^2) \qquad \forall \mathbf{v}\in V \tag{2.7}$$

如果 $\mathbf{F}\in(L^{4/3}(\Omega))^n$，$\mathbf{v}\in V$，则 $\mathbf{g}(\mathbf{v})\in(L^{4/3}(\Omega))^n$，并且

$$\|\mathbf{g}(\mathbf{v})\|_{0,4/3,\Omega}\leqslant\|\mathbf{F}\|_{0,4/3,\Omega}+c\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \tag{2.8}$$

实际上，当 $\mathbf{v}\in V$，$n\leqslant 4$ 时，$H^1(\Omega)\hookrightarrow L^4(\Omega)$

$$\left(\int_\Omega\left|w^j\frac{\partial v_i}{\partial x^j}\right|^{4/3}dx\right)^{3/4}\leqslant\|w^j\|_{0,4}\|v_{i,x^j}\|_{0,2}\leqslant c\|w^j\|_1\|v_{i,x}\|_{0,2}$$

故

$$\|(\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{v}\|_{0,4/3,\Omega}\leqslant c|\mathbf{v}|_{1,\Omega}|\mathbf{w}|_{1,\Omega} \tag{2.9}$$

由椭圆边值问题正则性定理，$T\mathbf{v}\in(H^{2,4/3}(\Omega))^n$，且

$$\|T\mathbf{v}\|_{2,4/3,\Omega}\leqslant c\|\mathbf{g}\|_{0,4/3,\Omega}\leqslant c(\|\mathbf{F}\|_{0,4/3,\Omega}+|\mathbf{v}|_{1,\Omega}^2) \tag{2.10}$$

即T：$\mathbf{v}\mapsto T\mathbf{v}$ 是 $V\to(H^{2,4/3}(\Omega))^n$ 的映射。

引理1. 设$\Omega\in R^n$是具有Lipschitz连续边界的有界开集，$n\leqslant 4$，那么T：$\mathbf{v}\mapsto T\mathbf{v}$是$V\to V$的连续映射：

$$|T\mathbf{v}_1-T\mathbf{v}_2|_1\leqslant\frac{N}{\nu}(|\mathbf{v}_1|_1+|\mathbf{v}_2|_1)|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|_1 \qquad \forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V \tag{2.11}$$

当 $\mathbf{F}\in(L^{4/3}(\Omega))^n$ 时，也是 $V\to(H^{2,4/3}(\Omega))^n$ 的连续映射：

$$\|T\mathbf{v}_1-T\mathbf{v}_2\|_{2,4/3}\leqslant c(|\mathbf{v}_1|_1+|\mathbf{v}_2|_1)|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|_1 \qquad \forall \mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2\in V \tag{2.12}$$

证明：$a_\varepsilon(T\mathbf{v}_1-T\mathbf{v}_2,\boldsymbol{\eta})=a_1(\mathbf{v}_2;\mathbf{v}_2,\boldsymbol{\eta})-a_1(\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\eta})$

$$=a_1(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2,\boldsymbol{\eta})+a_1(\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\eta})$$

令 $\boldsymbol{\eta}=T\mathbf{v}_1-T\mathbf{v}_2$，并注意 $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$ 的正定性及 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$ 的连续性，不难得到 (2.11)，故 T 在 V 的任一点上是连续的，在 V 的任一有界集上为 Lipschitz 连续．又因

$$a_\varepsilon(T\mathbf{v}_1-T\mathbf{v}_2,\boldsymbol{\eta})=a_1(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2,\boldsymbol{\eta})+a_1(\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\eta})\qquad\forall\boldsymbol{\eta}\in V$$

由椭圆算子正则性定理，我们有

$$\|T\mathbf{v}_1-T\mathbf{v}_2\|_{2,4/3}\leqslant c\sup_{\eta\in(L^4(\Omega))^n}\frac{|a_1(\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2,\boldsymbol{\eta})+a_1(\mathbf{v}_1;\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_1,\boldsymbol{\eta})|}{\|\boldsymbol{\eta}\|_{0,4}}$$

这里 $L^4(\Omega)$ 是 $L^{4/3}(\Omega)$ 的对偶空间，由 a_1 的连续性立即得到 (2.12)．证毕．

推论1． 算子 T 是 $V\to V$ 的列紧算子．

证明：对于 V 中任一有界集，根据 (2.12)，T 将 V 中的有界集映射为 $(H^{2,4/3}(\Omega))^n$ 中的有界集，由于 $H^{2,4/3}(\Omega)\hookrightarrow V$ 嵌入算子是列紧的，故 T 也是列紧的．证毕．

引理2． 算子 T 在 V 中是 Gateaux 可导的：

$$\forall\mathbf{u}\in V$$

$$a_\varepsilon(T'(\mathbf{u})\mathbf{w},\mathbf{v})=-a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},\mathbf{v})-a_1(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v})\qquad\forall\mathbf{v},\mathbf{w}\in V\tag{2.13}$$

且 $T'(\mathbf{u})$ 在 V 中 Lipschitz 连续：

$$\|T'(\mathbf{u}_1)-T'(\mathbf{u}_2)\|\leqslant 2N|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2|_1/\nu\qquad\forall\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in V\tag{2.14}$$

证明：(2.13) 容易得到验证．为证明 (2.14)，注意到

$$a_\varepsilon((T'(\mathbf{u}_1)-T'(\mathbf{u}_2))\mathbf{w},\mathbf{v})=a_1(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1;\mathbf{w},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1,\mathbf{v})$$

因而，由 Lax-Milgram 定理，有

$$\|T'(\mathbf{u}_1)-T'(\mathbf{u}_2)\|=\sup_{w\in V}\frac{|[T'(\mathbf{u}_1)-T'(\mathbf{u}_2)]\mathbf{w}|}{|\mathbf{w}|_1}$$

$$\leqslant\frac{1}{\nu}\sup_{\substack{w\in V\\ v\in V}}\frac{|a_1(\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1;\mathbf{w},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{w};\mathbf{u}_2-\mathbf{u}_1,\mathbf{v})|}{|\mathbf{w}|_1|\mathbf{v}|_1}\leqslant 2N|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2|_1/\nu$$

推论2． 设 $T(\mathbf{u}+t\mathbf{w})$ 是相应于 $\mathbf{u}+t\mathbf{w}$ 的状态向量，则

$$T(\mathbf{u}+t\mathbf{w})=T(\mathbf{u})+T'(\mathbf{u})\mathbf{w}t+T'(\mathbf{w})\mathbf{w}t^2/2\tag{2.15}$$

证明：由

$$a_\varepsilon(T(\mathbf{u}+t\mathbf{w})-T\mathbf{u},\mathbf{v})=-t(a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},\mathbf{v})+a_1(\mathbf{w};\mathbf{u},\mathbf{v}))-t^2a_1(\mathbf{w};\mathbf{w},\mathbf{v})$$

即得 (2.15)．

注记 1：容易证明 $\boldsymbol{\xi}=T(\mathbf{u}),\boldsymbol{\xi}_1=T'(\mathbf{u})\mathbf{w},\boldsymbol{\xi}_2=T'(\mathbf{w})\mathbf{w}/2$ 分别是下列方程的解，

$$\left.\begin{aligned}&a_\varepsilon(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})=\langle\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}\rangle-a_1(\mathbf{u};\mathbf{u},\boldsymbol{\eta})\\&a_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\eta})=-a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},\boldsymbol{\eta})-a_1(\mathbf{w};\mathbf{u},\boldsymbol{\eta})\qquad\forall\boldsymbol{\eta}\in V\\&a_\varepsilon(\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\eta})=-a_1(\mathbf{w};\mathbf{w},\boldsymbol{\eta})\end{aligned}\right\}\tag{2.16}$$

于是 (2.15) 可改写为

$$T(\mathbf{u}+t\mathbf{w})=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\xi}_1t+\boldsymbol{\xi}_2t^2\tag{2.17}$$

然而，估值函数 $J(\mathbf{u})$ 也可改写成

$$J(\mathbf{u})=\frac{1}{2}a_\varepsilon(\mathbf{u}-T\mathbf{u},\mathbf{u}-T\mathbf{u})$$

并且 $T\mathbf{u}=\boldsymbol{\xi}$ 是相应于 $\mathbf{u}$ 的状态向量．$J(\mathbf{u})$ 的 Gateaux 导数 $\mathrm{Grad}J(\mathbf{u})$ 可表示为

$$\begin{aligned}\langle\mathrm{Grad}J(\mathbf{u}),\mathbf{w}\rangle&=a_\varepsilon(\mathbf{w}-T'(\mathbf{u})\mathbf{w},T\mathbf{u}-\mathbf{u})\\&=a_\varepsilon(\mathbf{w},T\mathbf{u}-\mathbf{u})-a_1(\mathbf{u};\mathbf{w},T\mathbf{u}-\mathbf{u})-a_1(\mathbf{w};\mathbf{u},T\mathbf{u}-\mathbf{u})\end{aligned}$$

根据(2.17)，$J(\mathbf{u}+t\mathbf{w})$是一个四阶多项式，事实上

$$\begin{aligned}2J(\mathbf{u}+t\mathbf{w})&=a_e(\mathbf{u}+t\mathbf{w}-T(\mathbf{u}+t\mathbf{w}),\mathbf{u}+t\mathbf{w}-T(\mathbf{u}+t\mathbf{w}))\\&=a_e[\mathbf{u}-\xi+t(\mathbf{w}-\xi_1)-t^2\xi_2,\mathbf{u}-\xi+(\mathbf{w}-\xi_1)t-\xi_2t^2]\\&=a_e(\mathbf{u}-\xi,\mathbf{u}-\xi)+2a_e(\mathbf{u}-\xi,\mathbf{w}-\xi_1)t+[-2a_e(\mathbf{u}-\xi,\xi_2)\\&\quad+a_e(\mathbf{w}-\xi_1,\mathbf{w}-\xi_1)]t^2-2a_e(\mathbf{w}-\xi_1,\xi_2)t^3+a_e(\xi_2,\xi_2)t^4\end{aligned}$$

即是

$$J(\mathbf{u}+t\mathbf{w})=2f(t)=2\{\alpha_0+\alpha_1t+\alpha_2t^2+\alpha_3t^3+\alpha_4t^4\} \tag{2.18}$$

这里

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_0=a_e(\mathbf{u}-T\mathbf{u},\mathbf{u}-T\mathbf{u})=a_e(\mathbf{u}-\xi,\mathbf{u}-\xi)\\&\alpha_1=2a_e(\mathbf{u}-T\mathbf{u},\mathbf{w}-T'(\mathbf{u})\mathbf{w})=2a_e(\mathbf{u}-\xi,\mathbf{w}-\xi_1)\\&\alpha_2=a_e(\mathbf{w}-T'(\mathbf{u})\mathbf{w},\mathbf{w}-T'(\mathbf{u})\mathbf{w})-a_e(\mathbf{u}-T\mathbf{u},T'(\mathbf{w})\mathbf{w})\\&\quad=a_e(\mathbf{w}-\xi_1,\mathbf{w}-\xi_1)-2a_e(\mathbf{u}-\xi,\xi_2)\\&\alpha_3=-a_e[\mathbf{w}-T'(\mathbf{u})\mathbf{w},T'(\mathbf{w})\mathbf{w}]=-2a_e(\mathbf{w}-\xi_1,\xi_2)\\&\alpha_4=\frac{1}{4}a_e(T'(\mathbf{u})\mathbf{w},T'(\mathbf{u})\mathbf{w})=a_e(\xi_2,\xi_2)\end{aligned}\right\} \tag{2.19}$$

定理3. $\forall\mathbf{u},\mathbf{w}\in V$，单变量的极小值问题

$$t^*=\arg\min_{t\in R}J(\mathbf{u}+t\mathbf{w})$$

的解总是存在，并且t^*就是多项式$f'(t)=\frac{df}{dt}$的零点，$f(t)$由(2.18)定义。

证明：1) 由于$a_e(\cdot,\cdot)$的强制性，当$\xi_2\neq0$时，$\alpha_4=a_e(\xi_2,\xi_2)>0$，即$f(t)$为四次多项式，无疑，在有限区间上，$f(t)$必能达其最小值。

2) 当$\xi_2=0$时，$\alpha_4=0$且$\alpha_3=2a_e(\mathbf{w}-\xi_1,\xi_2)=0$，

$$\alpha_2=a_e(\mathbf{w}-\xi_1,\mathbf{w}-\xi_1)-2a_e(\mathbf{w}-\xi,\xi_2)=a_e(\mathbf{w}-\xi_1,\mathbf{w}-\xi_1)$$

同样，由于$\mathbf{w}-\xi_1\neq0\Rightarrow\alpha_2>0$，$f(t)$是二次多项式，在有限区间上亦必达其最小值。

3) 当$\xi_2=0$，$\mathbf{w}-\xi_1=0\Rightarrow\alpha_4=\alpha_3=\alpha_2=0$，此时有

$$\alpha_1=2a_e(\mathbf{u}-\xi,\mathbf{w}-\xi_1)=0$$

故$f(t)=\alpha_0$，当然，$f(t)$也能达其最小值。

$$f'(t)=\sum_{i=0}^{3}\beta_it^i,\quad\beta_0=\frac{\alpha_1}{2},\quad\beta_1=\alpha_2,\quad\beta_2=\frac{3\alpha_3}{2},\quad\beta_3=2\alpha_4$$

根据1),2)和3),$f'(t)$是一个奇次多项式，因而$f'(t)$至少存在一个零点，在这里$f(t)$达到它的最小值。证毕。

定理4. 设Ω是R^n中具有c^2类边界的有界区域，$n\leqslant4$,$\mathbf{F}\in(L^{4/3}(\Omega))^n$,则由(2.1)所定义的泛函$J(\mathbf{u})$在$V$上弱下半连续，且在某点处达到它的下确界：

$$J(\mathbf{u}^*)=\inf_{\mathbf{u}\in V}J(\mathbf{u})$$

证明：先证$J(\mathbf{u})$的弱下半连续性。设$\mathbf{u}_m\to\mathbf{u}$（弱）在$V$中。由推论1存在$\{\mathbf{u}_m\}$的子序列$\{\mathbf{u}_{m_p}\}$使

$$T\mathbf{u}_{m_p}\to T\mathbf{u}\ (\text{强})\qquad\text{在}\ V\ \text{中}$$

由此。显然有$z_{m_p}=\mathbf{u}_{m_p}-T\mathbf{u}_{m_p}\to z=\mathbf{u}-T\mathbf{u}$，此外

$$a_\varepsilon(\mathbf{z}_m-\mathbf{z},\mathbf{z}_m-\mathbf{z})\geqslant 0\Rightarrow a_\varepsilon(\mathbf{z}_m,\mathbf{z}_m)\geqslant 2a_\varepsilon(\mathbf{z}_m,\mathbf{z})-a_\varepsilon(\mathbf{z},\mathbf{z})$$

因而

$$\liminf_{m_p\to\infty} J(\mathbf{u}_{mp})\geqslant J(\mathbf{u})$$

进而，我们可以得到

$$\liminf_{m\to\infty} J(\mathbf{u}_m)\geqslant J(\mathbf{u}) \tag{2.20}$$

否则，将存在 $\{\mathbf{u}_m\}$ 的子序列 $\{\mathbf{u}_{mq}\}$ 使

$$J(\mathbf{u}_{mp})<J(\mathbf{u}) \qquad \forall mp \tag{2.21}$$

此时，在 V 中也有 $\mathbf{u}_{mq}\to\mathbf{u}$. 当然，我们能够在 V 中抽出 $\{\mathbf{u}_{mq}\}$ 的子序列 $\{\mathbf{u}_{mr}\}$ 使 $T\mathbf{u}_{mr}\to T\mathbf{u}$，因而 $\mathbf{z}_{mr}\to\mathbf{z}$ 并且

$$\lim_{mr\to\infty} J(\mathbf{u}_{mr})\geqslant J(\mathbf{u})$$

这与(2.21)式相矛盾，从而，我们证实了结论(2.20)，即是说，J 在 V 上弱下半连续.

另方面，$J(\mathbf{u})\geqslant 0$，$\forall \mathbf{u}\in V$，让 $\alpha=\inf\limits_{\mathbf{u}\in V} J(\mathbf{u})$，假定 $\{\mathbf{u}_m\}$ 是一个极小化序列

$$\lim_{m\to 0} J(\mathbf{u}_m)=\alpha$$

由此

$$a_\varepsilon(\mathbf{z}_m,\mathbf{z}_m)\leqslant M$$

因而 $|\mathbf{z}_m|_1\leqslant c$，也就是说，$\{\mathbf{z}_m\}$ 是一致有界的. 而且，由方程 (2.2)，必然有

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}_m,\mathbf{v})+a_1(\mathbf{u}_m;\mathbf{u}_m,\mathbf{v})=\langle \mathbf{F},\mathbf{v}\rangle-a_\varepsilon(\mathbf{z}_m,\mathbf{v}) \qquad \forall \mathbf{v}\in V \tag{2.22}$$

特别，若在 (2.22) 中证 $\mathbf{v}=\mathbf{u}_m$，我们有

$$(\nu-c_1\|\operatorname{div}\mathbf{u}_m\|/2)\,|\mathbf{u}_m|_1\leqslant\|\mathbf{F}\|_*+\nu|\mathbf{z}_m|_1 \tag{2.23}$$

据(1.15)，当 ε 足够小时将使

$$\|\operatorname{div}\mathbf{u}_m\|_0<\beta,\ \ \nu-c_1\beta/2\geqslant\alpha>0$$

(参见定理 2 的证明)，由(2.23)我们确信 $\{\mathbf{u}_m\}$ 是一致有界的，因而我们可以抽出一个 $\{\mathbf{u}_m\}$ 的子序列 $\{\mathbf{u}_{mp}\}$ 使 $\mathbf{u}_{mp}\to\mathbf{u}$ 在 V 中并且有

$$\lim_{mp\to\infty} J(\mathbf{u}_{mp})=\inf_{\mathbf{v}\in V} J(\mathbf{v})=\alpha$$

由于 $J(\mathbf{u})$ 在 V 上弱下半连续，我们有 $\alpha\geqslant J(\mathbf{u})$，但由 α 的定义又有 $J(\mathbf{u})\geqslant\alpha$，这说明 $J(\mathbf{u})=\alpha$. 证毕.

状态方程(2.2)表明变分问题(1.2)与算子方程

$$\mathbf{u}=T\mathbf{u}$$

是等价的. 换句话说，$\mathbf{u}$ 是(1.2)的解，当且仅当 $\mathbf{u}$ 是算子 T 的不动点. 此时

$$J(\mathbf{u})=a_\varepsilon(\mathbf{u}-T\mathbf{u},\mathbf{u}-T\mathbf{u})/2=0$$

特别地，我们对使

$$\lim_{m\to\infty} J(\mathbf{u}_m)=0$$

成立的极小化序列 $\{\mathbf{u}_m\}$ 感兴趣，这里有如下结果:

定理5. 设定理 4 的条件被满足，则使

$$\lim_{m\to\infty} J(\mathbf{u}_m)=0 \tag{2.24}$$

成立的 J 的极小化序列 $\{\mathbf{u}_m\}$ 强收敛到(1.2)的解 $\mathbf{u}$

$$\mathbf{u}_m \to \mathbf{u} \qquad \text{在 } V \text{ 中} \tag{2.25}$$

证明：在定理 4 的证明中，我们说明过能够抽取一个序列 $\{\mathbf{u}_{mp}\}$ 使

$$\mathbf{u}_{mp} \rightharpoonup \mathbf{u}, \qquad J(\mathbf{u}) = \inf_{\mathbf{v}\in V} J(\mathbf{v}) = 0$$

据推论 1，存在一个$\{\mathbf{u}_{mp}\}$的子序列（仍表以$\{\mathbf{u}_{mp}\}$）使得

$$T\mathbf{u}_{mp} \to T\mathbf{u}_0 \ (\text{强}) \qquad \text{在 } V \text{ 中} \tag{2.26}$$

另外，若使 $\mathbf{z}_m = \mathbf{u}_m - T\mathbf{u}_m$，(2.24)推出

$$\lim_{m\to\infty} a_\varepsilon(\mathbf{z}_m, \mathbf{z}_m) = 0 \tag{2.27}$$

即是 $\mathbf{z}_m \to 0$（强）

从(2.26)，(2.27)我们即可得到结论

$$\mathbf{u}_{mp} \to \mathbf{u} \ (\text{强}) \qquad \text{在 } V \text{ 中} \tag{2.28}$$

然而状态方程可以被改写为

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}_{mp}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}_{mp}; \mathbf{u}_{mp}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}\rangle - a_\varepsilon(\mathbf{z}_{mp}, \mathbf{v})$$

让 $mp \to \infty$，我们得到

$$a_\varepsilon(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_1(\mathbf{u}; \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{F}, \mathbf{v}\rangle \qquad \forall \mathbf{v} \in V$$

从而$\mathbf{u}$是(1.2)的一个解。现在我们来证明(2.25)。设其不真，则存在$\{\mathbf{u}_m\}$的一个子序列$\{\mathbf{u}_{mq}\}$使

$$|\mathbf{u}_{mq} - \mathbf{u}|_1 < \varepsilon \qquad \forall \varepsilon > 0 \tag{2.29}$$

但 $\{\mathbf{u}_{mq}\}$ 也是(2.24)的 J 的极小化序列，依上述的讨论我们有

$$\mathbf{u}_{mr} \to \mathbf{u}_0 \ (\text{强}) \qquad \text{在 } V \text{ 中} \tag{2.30}$$

这里$\{\mathbf{u}_{mr}\}$是$\{\mathbf{u}_{mq}\}$的一个子序列，这与假设(2.29)矛盾，于是(2.25)成立。证毕。

在实践中定理 3 和定理 4 是很重要的。利用它们，共轭梯度法的计算效率和精度得到很大改进。其原因在于，求解极小值问题 $\lambda^* = \arg\min J(\mathbf{u} + \lambda\boldsymbol{\xi})$ 只须求一个三次方程的根，而如果用其他方法（例如 Fibonacci 方法），则它只能通过逐步缩短区间来近似求解，迭代次数由精度决定。如把区间缩短至$\frac{1}{100}$，迭代次数 N 为 11， 缩至$\frac{1}{1000}$，$N=20$，每迭代一次需要计算一次 $J(\mathbf{u}_n - \lambda_n \boldsymbol{\xi}_n)$， 而为了计算 J， 必须计算一次估值函数 J， 计算一次三线性泛函 $a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$，一次双线性泛函 $a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$及求解一个 Stokes 问题。我们知道。计算一次 a_1，其乘法运算量是计算一次 a_ε 的 10 倍， 也是解 Stokes 问题的 10 倍。定理 3 和定理 4 使得极小值在 R^1 上。从表 1 可以看出，我们的方法其乘法运算量是其他方法的四分之一。

表 1

		$a_1(\cdot;\cdot,\cdot)$	$a_\varepsilon(\cdot,\cdot)$	解Stokes问题	区间	误差
Fib	λ_n	12	12	12	$[-1, 1]$	10^{-2}
我们		3	0	2	$(-\infty, +\infty)$	10^{-16}
$\boldsymbol{\xi}_n$		3	1	1		
乘法次数/每次		6×10^5	6×10^4	6×10^4		

三、分 块 迭 代 法

我们考察如下的迭代格式：设 u_n 为已知，u_{n+1} 是

$$a_e(u_{n+1},v)=\langle F,v\rangle-a_1(u_n;u_n,v)\qquad\forall v\in V \tag{3.1}$$

的解

定理6. 假设 $\frac{4N}{\nu^2}\|F\|_*<1$ (3.2)

$$K=\{u|u\in V,\quad |u|_1\leqslant 2\|F\|_*/\nu\} \tag{3.3}$$

则由 (3.1) 所定义的序列 $\{u_n\}$ 收敛到 (1.2) 的真解 u^*.

证明：首先，我们指出，当 $u_n\in K$ 时，$u_{n+1}\in K$. 实际上，由Lax-Milgram定理我们有

$$|u_{n+1}|_1\leqslant\frac{1}{\nu}\sup_{v\in V}\frac{|\langle F,v\rangle-a_1(u_n;u_n,v)|}{|v|_1}\leqslant\frac{1}{\nu}(\|F\|_*+N|u_n|_1^2)$$

$$\leqslant\frac{1}{\nu}\|F\|_*\left(1+\frac{4N}{\nu^2}\|F\|_*\right)\leqslant\frac{2}{\nu}\|F\|_*$$

其次，我们来说明 $\{u_n\}$ 是压缩的。事实上

$$a_e(u_{n+1}-u_n,v)=a_1(u_{n-1}-u_n;u_{n-1},v)+a_1(u_n;u_{n-1}-u_n,v)$$

取 $v=u_{n+1}-u_n$，上面的等式得

$$\nu|u_{n+1}-u_n|_1\leqslant N|u_{n-1}-u_n|_1(|u_{n-1}|_1+|u_n|_1)\leqslant\frac{4N}{\nu}\|F\|_*|u_{n-1}-u_n|_1$$

据 (3.2)，我们得

$$|u_{n+1}-u_n|_1\leqslant\frac{4N}{\nu^2}\|F\|_*|u_n-u_{n-1}|_1<|u_n-u_{n-1}|$$

(1.2) 减去 (3.1) 得

$$|u_n-u^*|_1\leqslant(2\alpha)^n|u_0-u^*|_1\qquad(0<\alpha<0.5)$$ 证毕.

用有限元法将 (1.2) 离散化后，我们得到如下的代数方程组

$$\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&A_{13}\\A_{21}&A_{22}&A_{23}\\A_{31}&A_{32}&A_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}N_{11}(U)&N_{12}(U)&N_{13}(U)\\N_{21}(U)&N_{22}(U)&N_{23}(U)\\N_{31}(U)&N_{32}(U)&N_{33}(U)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}U_1\\U_2\\U_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{bmatrix} \tag{3.4}$$

分块迭代法就是

$$\left.\begin{aligned}&A_{11}U_1^{(n+1/2)}=F_1-N_{11}^{(n)}U_1^{(n)}-(N_{12}^{(n)}+A_{12})U_2^{(n)}-(N_{13}^{(n)}+A_{13})U_3^{(n)}\\&A_{22}U_2^{(n+1/2)}=F_2-N_{22}^{(n)}U_2^{(n)}-(N_{21}^{(n)}+A_{21})U_1^{(n)}-(N_{23}^{(n)}+A_{23})U_3^{(n)}\\&A_{33}U_3^{(n+1/2)}=F_3-N_{33}^{(n)}U_3^{(n)}-(N_{31}^{(n)}+A_{31})U_1^{(n)}-(N_{32}^{(n)}+A_{32})U_2^{(n)}\\&U^{(n+1)}=U^{(n)}+\omega(U^{(n+1/2)}-U^{(n)})\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

这里 $N_{ij}^{(n)}=N_{ij}(U^{(n)})$，而 $U^T=(U_1^T,U_2^T,U_3^T)$ 是流体速度的节点向量.

显然，方程 (3.4) 的刚度矩阵为 $3NG\times3NG$ 阶，而 (3.5) 的刚度矩阵则是 $NG\times NG$ 阶，这里 NG 表节点总数.

分块迭代法的优点在于，它只须较少的存贮量并且节省计算时间. 但是在高雷诺数条件

下收敛条件不能得到满足.

四、通用程序和数值试验

根据上述两种方法，研制了两个通用程序．有限元元素均采用20节点三维等参元．它可以用来计算水泵及管道内部的三维粘性流动，也可计算润滑理论方面的问题．

程序的特点是，自动生成元素节点的整体编码和局部编码对照表、每个节点的影响节点集、每两个节点的相互影响节点集等有限元元素信息，并且对三线性型的计算做了专门处理．

我们对管道内部的三维流动进行了数值试验．流动区域被分成54个元素，有节点376个．数值试验对低、高雷诺数及各种不同的罚参数进行（参阅图 1～4）．

迭代次数、精度及在 SIEMENS 7760 计算机上所用的时间（秒，CPU）等数据列于表2，其中 Re 表雷诺数，ε 表罚参数，N 表迭代次数．

表 2

	共轭梯度法						分块迭代法					
Re	1	1	10^3	10^4	10^4	10^4	1	1	10^3	10^3	10^4	10^4
ε	10^{-5}	10^{-7}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-9}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}	10^{-5}	10^{-7}
N	2	2	3	2	2	6	1	1	7	1	7	1
T（秒）	570	570	730	570	570	1450	280	280	419	280	419	280

计算表明，共轭梯度算法具有下列良好性质：对速度和压力的计算精度高，收敛速度快，计算简单，能够解决大雷诺数问题而不需对 Navier-Stokes 方程的非线性项采取任何专门措施．

罚参数 ε 的影响依赖于雷诺数，在低雷诺数时可以用较大的 ε，但在高雷诺数下必须用小的 ε．

五、关于压力的超收敛性

为了考察上述方法对速度场和压力场的计算效果，应用我们的方法计算了一个有解析解的例子，其精确解 $(\mathbf{u}^*, p^*)$ 和逼近解 $(\mathbf{u}^h, p^h)$ 列于表 3～5.

如果直接依据公式 $p_\varepsilon = -\operatorname{div} \mathbf{u}^h/\varepsilon$ 或 $(p_\varepsilon, q) + (\operatorname{div} \mathbf{u}^h, q) = 0$，$\forall q \in M_h$ 来计算节点上的压力，并不能得到满意的结果，意外地，我们先计算高斯积分点上的压力，进而利用有限元外插法求出节点压力，得到了高精度的结果（见表 3，4）．考察表 3、4、5，可以发现，压力的逼近精度优于速度的逼近精度．

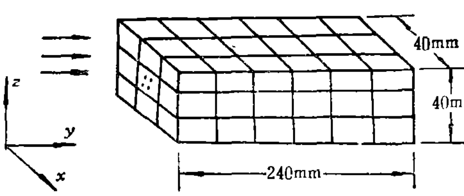

图 1　计算网格

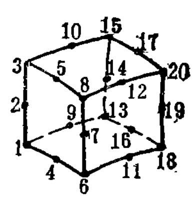

图 2　元　素

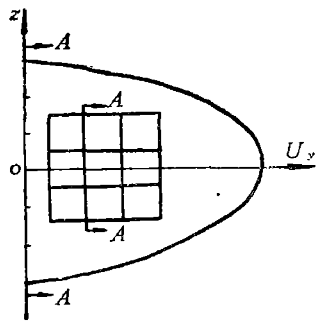

图3　速度图

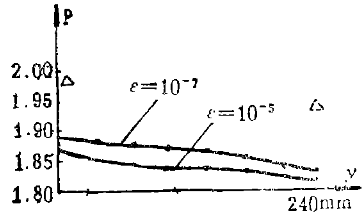

图4　压力图

表3　高斯积分点上的压力误差

	计算值 p_h		精确解 p^*
	$Re=5$, $\varepsilon=10^{-5}$	$Re=1000$, $\varepsilon=10^{-7}$	
1	1.9736	1.9736	1.998
2	1.9690	1.9690	1.994
3	1.9657	1.9655	1.990
4	1.9611	1.9610	1.984
5	1.9578	1.9576	1.983
6	1.9532	1.9531	1.974
7	1.9499	1.9497	1.974
8	1.9453	1.9452	1.970
9	1.9419	1.9418	1.966
10	1.9375	1.9376	1.962
11	1.9341	1.9341	1.958
12	1.9295	1.9294	1.953
	误差=0.0116		

表4　节点上的压力误差

	计算值 p_h		精确解 p^*
	$Re=5$, $\varepsilon=10^{-5}$	$Re=1000$, $\varepsilon=10^{-7}$	
1	1.881	1.881	2.000
2	1.872	1.872	1.992
3	1.865	1.865	1.984
4	1.857	1.857	1.976
5	1.850	1.850	1.968
6	1.842	1.842	1.960
7	1.835	1.835	1.952
8	2.180	2.180	2.000
9	2.171	2.171	1.992
10	2.162	2.162	1.984
11	2.154	2.154	1.976
12	2.145	2.145	1.968
13	2.136	2.136	1.960
14	2.128	2.129	1.952
	误差=0.0763		

表 5 节点上的速度误差

	计算值 u_i		精确解 u^*	误差	
	$Re=5,\ \varepsilon=10^{-5}$	$Re=10^3,\ \varepsilon=10^{-7}$		$Re=5$	$Re=10^3$
1	0.500	0.567	0.506		
2	0.500	0.554	0.506		
3	0.499	0.540	0.506		
4	0.499	0.526	0.506		
5	0.499	0.620	0.506		
6	0.499	0.616	0.506		
7	0.499	0.612	0.506	0.0463	0.1328
8	0.569	0.637	0.569		
9	0.579	0.632	0.584		
10	0.590	0.628	0.599		
11	0.614	0.624	0.614		
12	0.630	0.620	0.630		
13	0.645	0.616	0.645		
14	0.660	0.612	0.660		

参 考 文 献

[1] 李开泰、黄艾香、马逸尘、李笃、刘之行，Navier-Stokes 问题加罚变分形式的最优控制有限元逼近，西安交通大学学报，16，1(1982)，85—88.

[2] 李笃，三维 Navier–Stokes 问题的共轭梯度法及数值试验，西安交通大学学报，16，4 (1982)，81—90.

[3] 刘之行，三维 Navier–Stokes 问题加罚变分形式的分块迭代法及其应用程序，西安交通大学学报，16，4 (1982)，91—102.

[4] Bristeau, M. O., O. Pironneau, R. Glowinski, J. Periaux and P. Perrier, On the numerical solution of nonlinear problems in fluid dynamics by least squares and finite element methods (Ⅰ): Least square formulation and conjugate gradient solution of the continuous problems, *Comp. Math. Appl. Mech. Eng.*, 17/18(1979), 619—657.

[5] Giraut, V. and P. A. Raviart, Finite Element Approximation for the Navier–Stokes Equations, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 749, Springer–Verlag, Berlin (1980).

[6] Teman, R., *Navier–Stokes Equations*, North–Holland, Amsterdam, (1977).

[7] Reddy, J. N., On the mathematical theory of the penalty–finite elements for Navier–Stokes equations, *Proceedings of the Third International Conference on Finite Elements in Flow Problems*, Vol. 2(1980).

[8] Zienkiewics, O. C., Constrained Variational Principles and Penalty Function Methods in Finite Element Analysis, *Lecture Notes in Mathematics*, (Edited by Dald and B. B. Eckmann), Springer–Verlag, New York (1974), 363.

[9] Falk, R. S. and J. T. King, A penalty and extrapolation method for the stationary Stokes equations, *SIAM, J. Numer. Anal.*, 13(1979), 814—829.

[10] Bercoviex, M. and M. Engelman, A finite element for the numerical solution of viscous incompressible flows, *J. Comp. Phys.*, 30(1979), 181—201.

[11] Hughes, T. J. R., W. K. Liu and A. Brooks, Finite element analysis of incompressible viscous flows by the penalty function formulation, *J. Comp. Phys.*, 30 (1979), 1—60.

[12] Song, Y. J., J. T Oden and N. Kikuchi, Discrete LBB-conditions for RIP-finite element methods, *TICON Report*. 80-7(1980).

[13] Oden, J T., RIP-Methods for Stokesian Flows, *Finite Elements in Fluids*, Vol.4, John Willey & Sons.

[14] Oden, J. T., Penalty methods and selective reduced intergration for Stokesian flow, *Proceedings of the Third International Conference on Finite Elements in Flow Problems*, Banff, Alberta, Canada, (1980), 140—145.

[15] Oden, J .T., Penalty finite element methods for constrained problems in elasticity, *Symposium on Finite Element Methods*, Hefei, Anhui, China (1981).

The Conjugate Gradient Method and Block Iterative Method for Penalty Finite Element of Three-Dimensional Navier-Stokes Equations

Li Kai-tai Huang Ai-xiang Li Du Liu Zhi-xing

(*Xian Jiaotong University, Xian*)

Abstract

A conjugate gradient and block iterative algorithm for finite element solution of penalty variational form of Navier-Stokes equations are presented Because the algorithm of solving single variable minimizing problem is simplified the computing time is greatly saved.

In this paper numerical examples are also provided.