

有强化弹塑性含圆孔单向 受拉板的渐近解*

董亚民 朱祖成 顾求林

(清华大学, 1982年12月1日收到)

摘 要

本文运用有强化弹塑性平面问题的一般渐近解^[2], 以解决有强化弹塑性含圆孔的无限大板在单向受拉下的应力分布问题. 文中求得了二次近似解的应力分量的解析表达式, 并与其他作者的数值计算^[4]和实验结果^[5]进行了比较, 结果颇为符合. 最后, 作者还就 Neuber 公式的正确性进行了考查.

符 号

所有物理量中, 凡有上标“—”者为有量纲量, 无“—”者为相应的无量纲量.

$\bar{\Phi}$ ($=\bar{\sigma}_s a^2 \phi$) 应力函数

$\bar{\sigma}_0$ ($=\bar{\sigma}_s \sigma_0$) 外加边界拉应力

$\bar{\sigma}_s$ 材料屈服极限

$\bar{\epsilon}_x^p$ ($=\frac{\bar{\sigma}_s}{E} \epsilon_x^p$) 塑性应变分量

\bar{a} 圆孔半径

$\bar{\epsilon}_y^p$ ($=\frac{\bar{\sigma}_s}{E} \epsilon_y^p$) 塑性应变分量

\bar{x} ($=ax$) 坐标

$\bar{\nu}_y^p$ ($=\frac{\bar{\sigma}_s}{E} \nu_y^p$) 塑性应变分量

\bar{y} ($=ay$) 坐标

$\bar{\sigma}_x$ ($=\bar{\sigma}_s \sigma_x$) 应力分量

$\bar{\sigma}_y$ ($=\bar{\sigma}_s \sigma_y$) 应力分量

$\bar{\tau}_{xy}$ ($=\bar{\sigma}_s \tau_{xy}$) 应力分量

$\bar{\sigma}_e$ ($=\bar{\sigma}_s \sigma_e$) 应力强度

$\bar{\epsilon}_e$ ($=\frac{\bar{\sigma}_s}{E} \epsilon_e$) 应变强度

\bar{E} 弹性模量

ν 横向变形系数

$\bar{\alpha}_2$ ($=\frac{\alpha_2}{E \bar{\sigma}_s^2}$) 强化规律中的材料常数

\bar{r} ($=ar$) 极坐标

θ 极坐标

$\sigma_{t_1}, \sigma_{r_1}$ 第一次近似的切向和径向应力

$\sigma_{t_2}, \sigma_{r_2}$ 第二次近似的切向和径向应力

本文中凡字母右上角带“—”的物理量, 表示二次近似解中与齐次解有关的量, 带“*”者表示与特解有关的量.

一、引 言

摄动法是解决非线性问题的一种行之有效的方法. 早在 1947 年, 钱伟长教授就曾应用

* 钱伟长推荐.

此法成功地解决了圆薄板大挠度问题^[1]。顾求林用摄动法提供了有强化弹塑性平面问题的一般渐近解^[2]，并由此解决了一个在双向等拉下的含椭圆孔无限大板问题^[3]。

在工程实际中，在平板圆孔附近的弹塑性应力集中是一个很重要的问题。本文应用前述的一般解，求得一有强化弹塑性含圆孔无限大板在单向拉伸下的应力分布问题，并得到了应力分量的二次近似的解析式，经与谢志成等的数值解^[4]和 R. A. Thomson 的实验数据^[5]进行比较，我们发现，其结果颇为符合。

二、基本方程及其解

1. 基本方程

考虑一含圆孔无限大板承受单向拉应力 $\bar{\sigma}_0$ (图1)，设材料的无量纲应力-应变关系为

$$\varepsilon_e = \frac{2(1+\nu)}{3}\sigma_e + \alpha_2\sigma_e^3 \quad (2.1)$$

式中 σ_e 和 ε_e 为应力和应变强度； ν 为波桑比； α_2 为材料常数，可由单向拉伸确定。此问题的解答必须满足下列无量纲方程^[2]：

$$\sigma_x = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^p &= \alpha_2\sigma_c^2\left(\sigma_x - \frac{1}{2}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y^p &= \alpha_2\sigma_c^2\left(\sigma_y - \frac{1}{2}\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy}^p &= 3\alpha_2\sigma_c^2\tau_{xy} \\ \sigma_c^2 &= \sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

$$\nabla^4\Phi = -\frac{\partial^2\varepsilon_x^p}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\varepsilon_y^p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\gamma_{xy}^p}{\partial x\partial y} \quad (2.4)$$

式中 Φ 为应力函数； x, y 为坐标； σ_x, σ_y 和 τ_{xy} 为应力分量； $\varepsilon_x^p, \varepsilon_y^p$ 和 γ_{xy}^p 为塑性应变分量。

无量纲的边界条件为：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x|_{r=\infty} &= \sigma_0, \quad \sigma_y|_{r=\infty} = \tau_{xy}|_{r=\infty} = 0 \\ \sigma_r|_{r=1} &= \tau_{rt}|_{r=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

式中 σ_r 和 τ_{rt} 为与极坐标 $r-\theta$ 有关的应力分量。

2. 渐近解的第一次近似

取 σ_0 为摄动小参数，则有

$$\Phi = \Phi_1\sigma_0 + \Phi_3\sigma_0^3 \quad (2.6)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_{x1}\sigma_0 + \sigma_{x3}\sigma_0^3 \\ \sigma_y &= \sigma_{y1}\sigma_0 + \sigma_{y3}\sigma_0^3 \\ \tau_{xy} &= \tau_{xy1}\sigma_0 + \tau_{xy3}\sigma_0^3 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

当 ($i=1, 3$)

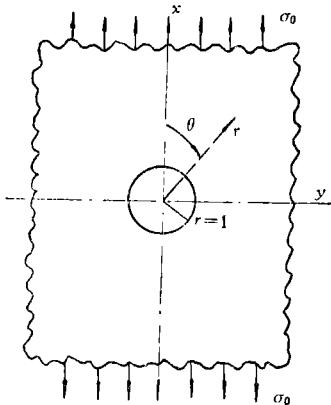


图 1

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x \partial y} \quad (2.8)$$

相应的应力分量用极坐标表示为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_{r1} \sigma_0 + \sigma_{r3} \sigma_0^3 \\ \sigma_t &= \sigma_{t1} \sigma_0 + \sigma_{t3} \sigma_0^3 \\ \tau_{rt} &= \tau_{rt1} \sigma_0 + \tau_{rt3} \sigma_0^3 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

将(2.7)式代入(2.3)式, 得

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^p &= \varepsilon_{x1}^p \sigma_0^3 + \dots \\ \varepsilon_y^p &= \varepsilon_{y3}^p \sigma_0^3 + \dots \\ \gamma_{xy}^p &= \gamma_{xy3}^p \sigma_0^3 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{x3}^p &= \alpha_2 (\sigma_{x1}^2 - \sigma_{x1} \sigma_{y1} + \sigma_{y1}^2 + 3\tau_{xy1}^2) \left(\sigma_{x1} - \frac{1}{2} \sigma_{y1} \right) \\ \varepsilon_{y3}^p &= \alpha_2 (\sigma_{x1}^2 - \sigma_{x1} \sigma_{y1} + \sigma_{y1}^2 + 3\tau_{xy1}^2) \left(\sigma_{y1} - \frac{1}{2} \sigma_{x1} \right) \\ \gamma_{xy3}^p &= 3\alpha_2 (\sigma_{x1}^2 - \sigma_{x1} \sigma_{y1} + \sigma_{y1}^2 + 3\tau_{xy1}^2) \tau_{xy1} \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

将以上方程代入(2.4)和(2.5)式, 并比较 σ_0 的系数, 可得下列方程, 用以确定第一次近似的应力函数 Φ_1 及相应的边界条件:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \Phi_1 &= 0 \\ \sigma_{x1} |_{r=\infty} &= 1, \quad \sigma_{y1} |_{r=\infty} = \tau_{xy1} |_{r=\infty} = 0 \\ \sigma_{r1} |_{r=1} &= \tau_{rt1} |_{r=1} = 0 \end{aligned}$$

这是一个在单向受拉下含圆孔无限大板的弹性问题, 其解为已知, 如下所示^[6]:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r1} &= \frac{1}{2} (1-r^{-2}) + \frac{1}{2} (1+3r^{-4}-4r^{-2}) \cos 2\theta \\ \sigma_{t1} &= \frac{1}{2} (1+r^{-2}) - \frac{1}{2} (1+3r^{-4}) \cos 2\theta \\ \tau_{rt1} &= -\frac{1}{2} (1-3r^{-4}+2r^{-2}) \sin 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x1} &= \frac{1}{2} (\sigma_{r1} + \sigma_{t1}) + \frac{1}{2} (\sigma_{r1} - \sigma_{t1}) \cos 2\theta - \tau_{rt1} \sin 2\theta \\ \sigma_{y1} &= \frac{1}{2} (\sigma_{r1} + \sigma_{t1}) - \frac{1}{2} (\sigma_{r1} - \sigma_{t1}) \cos 2\theta + \tau_{rt1} \sin 2\theta \\ \tau_{xy1} &= \frac{1}{2} (\sigma_{r1} - \sigma_{t1}) \sin 2\theta + \tau_{rt1} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

3. 渐近解的第二次近似

将方程(2.6), (2.7), (2.9), (2.10)代入(2.4), (2.5)式, 并比较 σ_0^3 的系数, 可得下列方程, 用以确定第二次近似解的应力函数 Φ_3 及其相应的边界条件,

$$\nabla^4 \Phi_3 = \xi_3 = -\frac{\partial^2 e_{x_3}^t}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 e_{y_3}^t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \gamma_{x_3 y_3}^t}{\partial x \partial y} \quad (2.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_3} |_{r=\infty} = \sigma_{y_3} |_{r=\infty} = \tau_{xy_3} |_{r=\infty} = 0 \\ \sigma_{r_3} |_{r=1} = \tau_{r_3} |_{r=1} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.14)'$$

式中 ξ_3 可由(2.11), (2.12), (2.13)式确定, 故(2.14)式为线性.

设方程(2.14)的解为

$$\Phi_3 = \Phi_3^* + \Phi_3^o \quad (2.15)$$

此处 Φ_3^* 和 Φ_3^o 分别为特解和齐次解. 于是应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_3} = \sigma_{x_3}^* + \sigma_{x_3}^o, \sigma_{y_3} = \sigma_{y_3}^* + \sigma_{y_3}^o, \tau_{xy_3} = \tau_{xy_3}^* + \tau_{xy_3}^o, \\ \sigma_{r_3} = \sigma_{r_3}^* + \sigma_{r_3}^o, \sigma_{t_3} = \sigma_{t_3}^* + \sigma_{t_3}^o, \tau_{rt_3} = \tau_{rt_3}^* + \tau_{rt_3}^o \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$\sigma_{x_3}^*, \dots$ 和 $\sigma_{x_3}^o, \dots$ 分别为特解和齐次解的应力分量.

利用复变量运算, 可由(2.14)式确定 Φ_3^* 为

$$\begin{aligned} \Phi_3^* &= \frac{1}{16} \iiint \xi_3 dz dz d\bar{z} d\bar{z} \\ &= \frac{1}{16} \left(\iint \text{I} dz dz + \iint \text{II} dz d\bar{z} + \iint \text{I} d\bar{z} d\bar{z} \right) \end{aligned} \quad (2.17)$$

式中

$$z = x + iy = re^{i\theta}, \quad \bar{z} = x - iy = re^{-i\theta} \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{I} &= e_{x_3}^t - e_{y_3}^t - i\gamma_{x_3 y_3}^t \\ \text{II} &= -2(e_{x_3}^t + e_{y_3}^t) \\ \text{I} &= e_{x_3}^t - e_{y_3}^t + i\gamma_{x_3 y_3}^t \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

然后, 可得

$$\begin{aligned} \sigma_{r_3}^* + \sigma_{t_3}^* &= \sigma_{x_3}^* + \sigma_{y_3}^* = 4 \frac{\partial^2 \Phi_3^*}{\partial z \partial \bar{z}} \\ &= \frac{1}{4} \left(\int \frac{\partial \text{I}}{\partial \bar{z}} dz + \text{II} + \int \frac{\partial \text{I}}{\partial z} d\bar{z} \right) \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{r_3}^* - \sigma_{t_3}^* + 2i\tau_{rt_3}^* &= e^{2i\theta} (\sigma_{y_3}^* - \sigma_{x_3}^* + 2i\tau_{x_3 y_3}^*) \\ &= 4e^{2i\theta} \frac{\partial^2 \Phi_3^*}{\partial z^2} \\ &= \frac{1}{4} e^{2i\theta} \left(\text{I} + \int \frac{\partial \text{II}}{\partial z} d\bar{z} + \iint \frac{\partial^2 \text{I}}{\partial z^2} d\bar{z} dz \right) \end{aligned} \quad (2.21)$$

为了计算方程(2.20)和(2.21), 可将(2.12), (2.13)式代入(2.11)式, 则有

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\theta}^p &= \alpha_2 (D_0 + D_2 \cos 2\theta + D_4 \cos 4\theta + D_6 \cos 6\theta + D_8 \cos 8\theta) \\ \varepsilon_{r\theta}^p &= \alpha_2 (F_0 + F_2 \cos 2\theta + F_4 \cos 4\theta + F_6 \cos 6\theta + F_8 \cos 8\theta) \\ \nu_{\theta}^p &= -\frac{3}{2} \alpha_2 (G_2 \sin 2\theta + G_4 \sin 4\theta + G_6 \sin 6\theta + G_8 \sin 8\theta) \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} D_0 &= 1 + \frac{129}{16} r^{-4} - 18r^{-6} + \frac{243}{16} r^{-8} \\ D_2 &= -\frac{15}{4} r^{-2} + \frac{27}{4} r^{-4} - 18r^{-6} + 18r^{-8} - \frac{27}{2} r^{-10} \\ D_4 &= -\frac{9}{2} r^{-2} + \frac{141}{16} r^{-4} - \frac{33}{4} r^{-6} + \frac{207}{8} r^{-8} - \frac{243}{8} r^{-10} + \frac{243}{16} r^{-12} \\ D_6 &= \frac{15}{4} r^{-4} - \frac{131}{16} r^{-6} + \frac{27}{4} r^{-8} - \frac{81}{16} r^{-10} \\ D_8 &= \frac{9}{4} r^{-4} - \frac{57}{8} r^{-6} + \frac{45}{8} r^{-8} \\ F_0 &= -\frac{1}{2} - \frac{75}{16} r^{-4} + 12r^{-6} - \frac{153}{16} r^{-8} \\ F_2 &= \frac{3}{2} r^{-2} - \frac{15}{4} r^{-4} + 9r^{-6} - 9r^{-8} + \frac{27}{4} r^{-10} \\ F_4 &= 3r^{-2} - \frac{81}{16} r^{-4} + \frac{27}{4} r^{-6} - \frac{189}{8} r^{-8} + \frac{243}{8} r^{-10} - \frac{243}{16} r^{-12} \\ F_6 &= -\frac{9}{4} r^{-4} + \frac{91}{16} r^{-6} - \frac{27}{4} r^{-8} + \frac{81}{16} r^{-10} \\ F_8 &= -\frac{9}{4} r^{-4} + \frac{57}{8} r^{-6} - \frac{45}{8} r^{-8} \\ G_2 &= r^{-2} - r^{-4} + \frac{17}{2} r^{-6} - 18r^{-8} + \frac{27}{2} r^{-10} \\ G_4 &= 2r^{-2} - \frac{17}{4} r^{-4} + 10r^{-6} - 33r^{-8} + \frac{81}{2} r^{-10} - \frac{81}{4} r^{-12} \\ G_6 &= -4r^{-4} + \frac{37}{4} r^{-6} - 9r^{-8} + \frac{27}{4} r^{-10} \\ G_8 &= -3r^{-4} + \frac{19}{2} r^{-6} - \frac{15}{2} r^{-8} \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

将以上结果代入(2.19)式, 可得

$$\begin{aligned} I &= \alpha_2 \left[-\frac{9}{4} \bar{z}^{-3} z + \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{8} \bar{z}^{-2} + \frac{15}{4} \bar{z}^{-4} \right) z^0 + \frac{9}{2} \bar{z}^{-3} z^{-1} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{51}{4} \bar{z}^{-2} - \frac{57}{8} \bar{z}^{-4} - \frac{27}{8} \right) z^{-2} + \left(-30\bar{z}^{-3} + 6\bar{z}^{-1} - \frac{21}{4} \bar{z} \right) z^{-3} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{99}{4} \bar{z}^{-4} - \frac{159}{8} \bar{z}^{-2} + \frac{81}{8} \right) z^{-4} + (27\bar{z}^{-3} - 15\bar{z}^{-1} + 6\bar{z}) z^{-5} \\
& + \left(-\frac{81}{4} \bar{z}^{-4} + \frac{99}{2} \bar{z}^{-2} - \frac{111}{8} + \frac{9}{2} \bar{z}^2 \right) z^{-6} + \left(-\frac{243}{4} \bar{z}^{-3} + \frac{27}{2} \bar{z}^{-1} \right. \\
& \left. - \frac{57}{4} \bar{z} \right) z^{-7} + \left(\frac{243}{8} \bar{z}^{-4} - \frac{81}{8} \bar{z}^{-2} + \frac{45}{4} \right) z^{-8} \quad (2.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} = \alpha_2 & \left[\left(-\frac{3}{2} \bar{z}^{-6} + \frac{3}{2} \bar{z}^{-8} \right) z + \left(\frac{5}{2} \bar{z}^{-6} - \frac{15}{4} \bar{z}^{-4} + \frac{9}{4} \bar{z}^{-2} - 1 \right) z^0 \right. \\
& + \left(\frac{3}{2} \bar{z}^{-6} - 3\bar{z}^{-3} \right) z^{-1} + \left(-\frac{9}{4} \bar{z}^{-6} + 9\bar{z}^{-4} - \frac{27}{4} \bar{z}^{-2} + \frac{9}{4} \right) z^{-2} \\
& + \left(-9\bar{z}^{-5} + 12\bar{z}^{-3} - 3\bar{z}^{-1} + \frac{3}{2} \bar{z} \right) z^{-3} + \left(\frac{27}{4} \bar{z}^{-6} - \frac{45}{4} \bar{z}^{-4} + 9\bar{z}^{-2} \right. \\
& \left. - \frac{15}{4} \right) z^{-4} + \left(-9\bar{z}^{-3} + \frac{3}{2} \bar{z}^{-1} - \frac{3}{2} \bar{z} \right) z^{-5} + \left(\frac{27}{4} \bar{z}^{-4} - \frac{9}{4} \bar{z}^{-2} \right. \\
& \left. + \frac{5}{2} \right) z^{-6} \quad (2.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{I} = \alpha_2 & \left[-\frac{9}{4} z^{-3} \bar{z} + \left(\frac{3}{2} - \frac{15}{8} z^{-2} + \frac{15}{4} z^{-4} \right) \bar{z}^0 + \frac{9}{2} z^{-3} \bar{z}^{-1} \right. \\
& + \left(\frac{51}{4} z^{-2} - \frac{57}{8} z^{-4} - \frac{27}{8} \right) \bar{z}^{-2} + \left(-30z^{-3} + 6z^{-1} - \frac{21}{4} \right) \bar{z}^{-3} \\
& + \left(\frac{99}{4} z^{-4} - \frac{159}{8} z^{-2} + \frac{81}{8} \right) \bar{z}^{-4} + (27z^{-3} - 15z^{-1} + 6z) \bar{z}^{-5} \\
& + \left(-\frac{81}{4} z^{-4} + \frac{99}{2} z^{-2} - \frac{111}{8} + \frac{9}{2} z^2 \right) \bar{z}^{-6} + \left(-\frac{243}{4} z^{-3} + \frac{27}{2} z^{-1} \right. \\
& \left. - \frac{57}{4} z \right) \bar{z}^{-7} + \left(\frac{243}{8} z^{-4} - \frac{81}{8} z^{-2} + \frac{45}{4} \right) \bar{z}^{-8} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

将上述结果代入方程(2.20), (2.21), 最后可得

$$\sigma_{r_3}^* + \sigma_{t_3}^* = \sigma_{x_3}^* + \sigma_{y_3}^* = \sum_{i=-7, \dots}^2 A_i z^i - \frac{27}{8} \alpha_2 (\bar{z}^{-4} \ln z + z^{-4} \ln \bar{z}) \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{r_3}^* - \sigma_{t_3}^* + 2i\tau_{rt_3}^* & = e^{2i\theta} (\sigma_{y_3}^* - \sigma_{x_3}^* + 2i\tau_{x_y}^*) \\
& = \sum_{i=-7, \dots}^2 A'_i z^i + \alpha_2 \left(-\frac{135}{8} z^{-3} \bar{z}^{-1} + \frac{27}{2} z^{-4} + \frac{135}{4} z^{-5} \bar{z}^{-1} \right) \ln \bar{z} \quad (2.28)
\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}
 A_2 &= a_2 \left(\frac{27}{32} \bar{z}^{-4} \right) \\
 A_1 &= a_2 \left(\frac{21}{16} \bar{z}^{-3} - \frac{183}{40} \bar{z}^{-5} \right) \\
 A_0 &= a_2 \left(-\frac{1}{4} + \frac{39}{32} \bar{z}^{-2} - \frac{21}{16} \bar{z}^{-4} + \frac{39}{32} \bar{z}^{-6} \right) \\
 A_{-1} &= a_2 \left(\frac{45}{8} \bar{z}^{-3} - \frac{27}{4} \bar{z}^{-5} \right) \\
 A_{-2} &= a_2 \left(\frac{39}{32} - \frac{3}{16} \bar{z}^{-2} - \frac{159}{16} \bar{z}^{-4} \right) \\
 A_{-3} &= a_2 \left(\frac{21}{16} \bar{z} + \frac{45}{8} \bar{z}^{-1} - \frac{29}{8} \bar{z}^{-3} + \frac{219}{20} \bar{z}^{-5} - \frac{81}{112} \bar{z}^{-7} \right) \\
 A_{-4} &= a_2 \left(\frac{27}{32} \bar{z}^2 - \frac{21}{16} - \frac{159}{16} \bar{z}^{-2} + \frac{117}{16} \bar{z}^{-4} - \frac{189}{32} \bar{z}^{-6} \right) \\
 A_{-5} &= a_2 \left(-\frac{183}{40} \bar{z} - \frac{27}{4} \bar{z}^{-1} + \frac{219}{20} \bar{z}^{-3} - \frac{81}{10} \bar{z}^{-5} + \frac{243}{56} \bar{z}^{-7} \right) \\
 A_{-6} &= a_2 \left(\frac{39}{32} - \frac{189}{32} \bar{z}^{-4} \right) \\
 A_{-7} &= a_2 \left(-\frac{81}{112} \bar{z}^{-3} + \frac{243}{56} \bar{z}^{-5} \right) \\
 A'_2 &= a_2 \left(-\frac{9}{16} \bar{z}^{-4} \right) \\
 A'_1 &= a_2 \left(\frac{3}{8} \bar{z}^{-1} - \frac{21}{32} \bar{z}^{-3} + \frac{183}{160} \bar{z}^{-5} \right) \\
 A'_0 &= a_2 \left(\frac{9}{8} \bar{z}^{-4} \right) \\
 A'_{-1} &= a_2 \left(-\frac{27}{32} \bar{z}^{-1} + \frac{45}{16} \bar{z}^{-3} - \frac{27}{16} \bar{z}^{-5} \right) \\
 A'_{-2} &= a_2 \left(-\frac{39}{16} - \frac{3}{8} \bar{z}^{-2} - \frac{53}{8} \bar{z}^{-4} \right) \\
 A'_{-3} &= a_2 \left(-\frac{63}{32} \bar{z} + \frac{81}{32} \bar{z}^{-1} - \frac{87}{16} \bar{z}^{-3} + \frac{657}{80} \bar{z}^{-5} - \frac{81}{224} \bar{z}^{-7} \right) \\
 A'_{-4} &= a_2 \left(-\frac{9}{8} \bar{z}^2 - \frac{33}{4} - \frac{159}{4} \bar{z}^{-2} + \frac{39}{4} \bar{z}^{-4} - \frac{189}{40} \bar{z}^{-6} \right) \\
 A'_{-5} &= a_2 \left(\frac{183}{16} \bar{z} - \frac{111}{32} \bar{z}^{-1} + \frac{219}{8} \bar{z}^{-3} - \frac{81}{8} \bar{z}^{-5} + \frac{405}{112} \bar{z}^{-7} \right) \\
 A'_{-6} &= a_2 \left(-\frac{117}{16} - \frac{189}{16} \bar{z}^{-4} \right) \\
 A'_{-7} &= a_2 \left(\frac{45}{16} \bar{z}^{-1} - \frac{81}{32} \bar{z}^{-3} + \frac{243}{32} \bar{z}^{-5} \right)
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

现在我们来确定齐次解 Φ_3^0 ，显然它应当满足：

$$\nabla^4 \Phi_3^0 = 0 \quad (2.30)$$

由(2.15)和(2.16)式，可得齐次解边界条件如下：

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{x_3}^0 |_{r=\infty} &= -\sigma_{x_3}^* |_{r=\infty} \\ \sigma_{y_3}^0 |_{r=\infty} &= -\sigma_{y_3}^* |_{r=\infty} \\ \tau_{xy_3}^0 |_{r=\infty} &= -\tau_{xy_3}^* |_{r=\infty} \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_3}^0 |_{r=1} &= -\sigma_{r_3}^* |_{r=1} \\ \tau_{rt_3}^0 |_{r=1} &= -\tau_{rt_3}^* |_{r=1} \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

上式等号右边的函数项可从特解中求得，故在已知边界条件(2.31)、(2.32)情况下，求解含圆孔无限大板，即可确定 Φ_3^0 ，其求解方法可参见[7]。

在特解的应力分量表达式(2.27)、(2.28)中，含有多值项，在求齐次解时将遇到很大麻烦。

很明显，在特解中允许加入任意的解析函数作为附加的复应力函数，这就给我们提供了从特解中消除多值项的可能性。

参照(2.27)、(2.28)式，可以引入如下附加复应力函数

$$\left. \begin{aligned} \phi_1'(z) &= -\frac{27}{16} a_2 z^{-4} \ln z \\ \psi_1'(z) &= a_2 \left(-\frac{135}{16} z^{-4} + \frac{135}{8} z^{-6} \right) \ln z \end{aligned} \right\} \quad (2.33)$$

相应的应力分量为

$$(\sigma_{x_3}^* + \sigma_{r_3}^*)_{\text{加}} = 4 \operatorname{Re} \phi_1'(z) = -\frac{27}{8} a_2 (z^{-4} \ln z + \bar{z}^{-4} \ln \bar{z}) \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{y_3}^* - \sigma_{t_3}^* + 2i\tau_{rt_3}^*)_{\text{加}} &= 2e^{2i\theta} [\bar{z}\phi_1''(z) + \psi_1'(z)] \\ &= a_2 \left[-\frac{27}{8} z^{-4} + \left(-\frac{135}{8} z^{-3}\bar{z}^{-1} + \frac{27}{2} z^{-4} + \frac{135}{4} z^{-5}\bar{z}^{-1} \right) \ln z \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

将(3.27)、(3.28)式与(3.34)、(3.35)式合并，得到下列单值的特解：

$$\begin{aligned} (\sigma_{x_3}^* + \sigma_{r_3}^*)_{\text{单值}} &= (\sigma_{x_3}^* + \sigma_{r_3}^*)_{\text{单值}} \\ &= \sum_{i=-7, \dots}^2 A_i z^i - \frac{27}{8} a_2 (z^{-4} + \bar{z}^{-4}) \ln(z\bar{z}) \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\begin{aligned} (\sigma_{y_3}^* - \sigma_{t_3}^* + 2i\tau_{rt_3}^*)_{\text{单值}} &= e^{2i\theta} (\sigma_{y_3}^* - \sigma_{t_3}^* + 2i\tau_{rt_3}^*)_{\text{单值}} \\ &= \sum_{i=-7, \dots}^2 A_i' z^i + a_2 \left[-\frac{27}{8} z^{-4} + \left(-\frac{135}{8} z^{-3}\bar{z}^{-1} + \frac{27}{2} z^{-4} + \frac{135}{4} z^{-5}\bar{z}^{-1} \right) \ln(z\bar{z}) \right] \end{aligned} \quad (3.37)$$

式中 A_i, A_i' 由方程(3.29)确定。

如果注意到在特解的应力分量组合中，多值项间的内在联系，则容易证明，为了消除多

值项, 选取如(3.33)式的附加复应力函数总是可能的.

齐次解的边界条件(2.31)和(2.32)式, 可重写成,

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_{x_3}^{\circ} + \sigma_{y_3}^{\circ})|_{r=\infty} &= -(\sigma_{x_3}^* + \sigma_{y_3}^*)_{\text{单值}}|_{r=\infty} \\ (\sigma_{y_3}^{\circ} - \sigma_{x_3}^{\circ} + 2i\tau_{xy_3}^{\circ})|_{r=\infty} &= -(\sigma_{y_3}^* - \sigma_{x_3}^* + 2i\tau_{xy_3}^*)_{\text{单值}}|_{r=\infty} \end{aligned} \right\} \quad (2.38)$$

$$(\sigma_{r_3}^{\circ} - i\tau_{r\theta_3}^{\circ})|_{r=1} = -(\sigma_{r_3}^* - i\tau_{r\theta_3}^*)_{\text{单值}}|_{r=1} \quad (2.39)$$

根据这些已知边界条件, 即可按照[7]解出此弹性问题.

设在圆孔边界沿 x, y 轴方向作用有面力 \bar{X}, \bar{Y} , 则由图 2 和

(2.39)式可得

$$\bar{X} + i\bar{Y} = -e^{i\theta}(\sigma_{r_3}^{\circ} + i\tau_{r\theta_3}^{\circ})|_{r=1} = e^{i\theta}(\sigma_{r_3}^* - i\tau_{r\theta_3}^*)_{\text{单值}}|_{r=1} \quad (2.40)$$

面力复函数为,

$$\begin{aligned} f_0(z_0) &= -i \int_{\gamma} (\bar{X} + i\bar{Y}) ds + 2\Gamma z_0 + \bar{\Gamma}' z_0^{-1} \\ &= - \int_{\gamma} (\sigma_{r_3}^* - i\tau_{r\theta_3}^*)_{\text{单值}}|_{r=1} dz_0 + 2\Gamma z_0 + \bar{\Gamma}' z_0^{-1} \end{aligned} \quad (2.41)$$

式中 s 为孔边弧长, z_0 为 z 在孔边上的值, γ 为圆孔周界, Γ 和 $\bar{\Gamma}'$ 分别为

$$\Gamma = -\frac{1}{4}(\sigma_{x_3}^{\circ} + \sigma_{y_3}^{\circ})|_{r=\infty} = \frac{1}{4}(\sigma_{r_3}^* + \sigma_{t_3}^*)_{\text{单值}}|_{r=\infty} \quad (2.42)$$

$$\begin{aligned} \Gamma' &= -\frac{1}{2}(\sigma_{y_3}^{\circ} - \sigma_{x_3}^{\circ} + 2i\tau_{xy_3}^{\circ})|_{r=\infty} = \frac{1}{2}(\sigma_{y_3}^* - \sigma_{x_3}^* + 2i\tau_{xy_3}^*)_{\text{单值}}|_{r=\infty} \\ &= \frac{1}{2}e^{-2i\theta}(\sigma_{r_3}^* - \sigma_{t_3}^* + 2i\tau_{r\theta_3}^*)_{\text{单值}}|_{r=\infty} \end{aligned} \quad (2.43)$$

复应力函数为

$$\left. \begin{aligned} \phi(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f_0(z_0) \frac{dz_0}{z_0 - z} - \Gamma z \\ \psi(z) &= -\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \overline{f_0(z_0)} \frac{dz_0}{z_0 - z} + z^{-1} \frac{d}{dz} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f_0(z_0) \frac{dz_0}{z_0 - z} \right] - \Gamma' z \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

则二次近似的齐次解应力分量为

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{r_3}^{\circ} + \sigma_{t_3}^{\circ} &= 4\text{Re}\phi'(z) \\ \sigma_{r_3}^{\circ} - \sigma_{t_3}^{\circ} + 2i\tau_{r\theta_3}^{\circ} &= 2e^{2i\theta}[\bar{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

将特解(2.36), (2.37)式中的结果相继代入(2.41)~(2.45)式, 可得 $\sigma_{r_3}^{\circ} + \sigma_{t_3}^{\circ}$, 和 $\sigma_{r_3}^{\circ} - \sigma_{t_3}^{\circ} + 2i\tau_{r\theta_3}^{\circ}$, 再将其与(2.36)和(2.37)式组合, 即得如下的二次近似的应力分量表达式

$$\begin{aligned} \sigma_{r_3} + \sigma_{t_3} &= \sum_{i=-7, \dots}^2 A_i z^i + \alpha_2 \left[\frac{1}{4} - \frac{1679}{560} (z^{-2} + \bar{z}^{-2}) + \frac{165}{28} (z^{-4} + \bar{z}^{-4}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{99}{32} (z^{-6} + \bar{z}^{-6}) - \frac{27}{8} (z^{-4} + \bar{z}^{-4}) \ln(z\bar{z}) \right] \end{aligned} \quad (2.46)$$

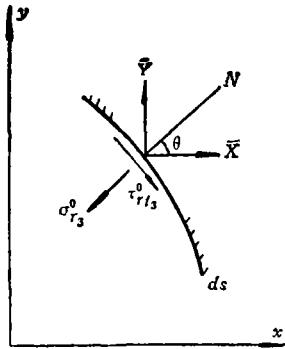


图 2

$$\begin{aligned} \sigma_{t_3} - \sigma_{r_3} + 2i\tau_{rt_3} = & \sum_{i=-7, \dots}^2 A_i z^i + \alpha_2 \left[\frac{1679}{280} z^{-2} - \frac{165}{7} z^{-4} - \frac{297}{16} z^{-6} \right. \\ & + \frac{1}{z\bar{z}} \left(-\frac{3}{8} z^2 + \frac{389}{160} + \frac{1545}{112} z^{-2} + \frac{8559}{224} z^{-4} + \frac{2133}{160} z^{-6} \right) \\ & \left. - \frac{27}{8} z^{-4} (1 - z^{-1}\bar{z}^{-1}) + \left(-\frac{135}{8} z^{-3}\bar{z}^{-1} + \frac{27}{2} z^{-4} + \frac{135}{4} z^{-5}\bar{z}^{-1} \right) \ln(z\bar{z}) \right] \quad (2.47) \end{aligned}$$

4. 二次近似解结果的研究

为了考查渐近解的可靠性，将其与谢志成文^[4]中的数值解和 R. A. Thomson^[5] 的实验结果进行了比较。

(1) 在谢文^[4]中，材料的应力强度 S 与应变强度 Γ 曲线（见图3），系由论文[8]中的拉伸曲线变换而来，其中

$$\left. \begin{aligned} S &= \frac{1-2\nu}{E} \sqrt{\frac{2}{3}} \bar{\sigma}_e \\ \Gamma &= \sqrt{\frac{3}{2}} \bar{\epsilon}_e \end{aligned} \right\} \quad (2.48)$$

并可近似表达为

$$\left. \begin{aligned} \Gamma &= \beta_0 S + \beta_2 S^3 \\ \beta_0 &= 3.5, \beta_2 = 1.8 \times 10^6 \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

该近似拟合曲线亦绘于图3中。

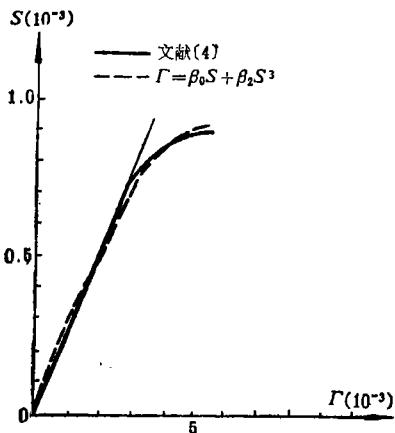


图 3

将(2.48)式代入(2.49)并与(2.1)式进行比较，可得

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{4}{9} \beta_2 \frac{(1-2\nu)^3}{E^3}$$

由拉伸实验求得

$$\nu = 0.33, \bar{E} = 0.75 \times 10^4 \text{ kg/mm}^2$$

将以上数据代入前式，可以计算出沿 y 轴的切向应力分布，连同谢文^[4]的数值解结果一起，绘于图4。可以看出：两条曲线是颇为符合的。

(2) R. A. Thomson 和 M. M. Frocht 曾用 cellulose nitrate 模拟铝合金，成功地完成了有强化弹塑性含孔受拉板的实验^[5]。在图5中绘出了以 cellulose nitrate 为实验材料的 $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ 曲线和以近似表达式 $\bar{\epsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{200} + \frac{\bar{\sigma}^3}{6600}$ 描绘的拟合曲线。此

后，将由渐近解算得的沿平板中心横断面的切向应力分布 σ_r 与 Thomson 的实验结果进行比较（图6），两者也十分符合。

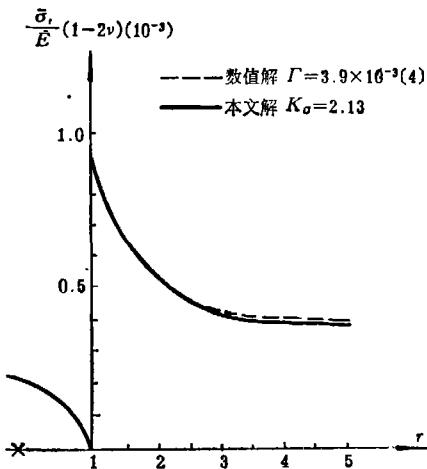


图 4

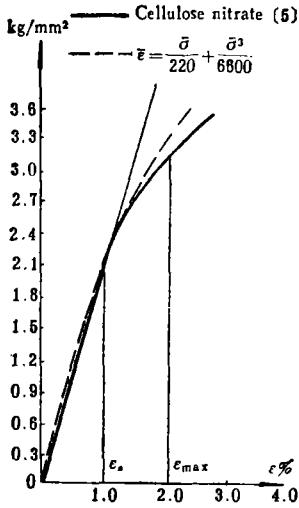


图 5

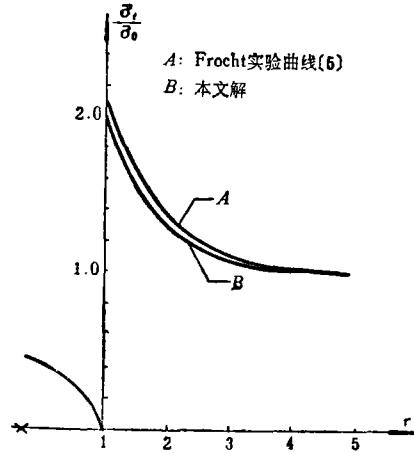


图 6

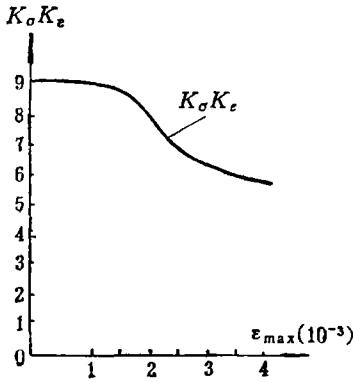


图 7

5. Neuber 公式考查

H. Neuber 曾证明任意非线性材料剪切型应力集中与应变集中系数的关系式为

$$K_\sigma K_\epsilon = K^2 \tag{2.50}$$

式中 K_σ 与 K_ϵ 分别为应力集中与应变集中系数, K_σ 为线性关系下的应力集中系数。然而, 对于拉伸型, (2.50) 式的可靠性尚未得到证明。

根据本文的结果, 对于前述 [8] 中的材料, 求得 $K_\sigma K_\epsilon - \bar{\epsilon}_{max}$ 曲线, 并与 $K^2 (=9)$ 进行比较, 如图 7 所示。可以看出, 两者偏差较大。

三、结 语

以上研究表明, 本文所求得的有强化弹塑性含圆孔受拉板的渐近解是可靠的。可以看出, 在小弹塑性变形的情况下 (本文中, 最大应变约为弹性极限应变的二倍), 即使只取二次近似, 也能得到相当满意的结果。

此外, 为了简化繁杂的计算, 在求解齐次解过程中, 对特解中的多值函数, 有意识地引入某些共轭函数, 从而消除了多值项。对于其它相类似的情况, 这一想法也将是有用的。

参 考 文 献

- [1] 钱伟长. 固定圆薄板在均布荷载下的大挠度问题. 中国物理学报, 7, 2. (1947). 102—113.
- [2] 顾求林. 有强化弹塑性平面问题的一般渐近解. 力学学报, 1(1982).
- [3] Gu Qiu-lin, The asymptotic solution and experiment of a strain-hardening elastoplastic plate containing an elliptical hole under tension, *Contributed Paper at 9th U. S. National Congress of Applied Mechanics*, Paper No. 149(1982).
- [4] Xie Zhi-cheng, Wang Rei-wu, Yang Xue-zhong and Chian Zhen-dong. The perturbation finite element method for solving problems with nonlinear materials, *Proceedings of the International Conference on Finite Element Method* (1982).
- [5] Thomson, R. A. and M. M. Frocht, Further work on plane elastoplastic stress distributions, *International Symposium on Photoelasticity*(1962).
- [6] Timoshenko, S., *Theory of Elasticity* (1951).
- [7] Мусхелишвили, Н. И., *Некоторые Основные Задачи Математической Теории Упругости* (1954).
- [8] 周春田. 带有缺陷板在单向拉伸时弹塑性应力应变场的测定, 清华大学学报(待发表).
- [9] Neuber, H., Theory of stress concentration for shear strained prismatical bodies in the arbitrary nonlinear stress-strain law, *J. Appl. Mech.*, 28(1961).

The Asymptotic Analytical Solution of the Strain-Hardening Elastoplastic Plate Containing a Circular Hole under Simple Tension

Dong Ya-min Zhu Zu-cheng Gu Qiu-lin

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In this paper the general asymptotic analytical solution of plane problem of elastoplasticity with strain-hardening⁽²⁾ is used in solving the problem of an infinitely large plate containing a circular hole under simple tension, and the analytical expressions of stress components of the first two approximations are given. These results are compared with the numerical and the experimental results given by other authors^(4,5), and a good agreement is obtained. At the end of the paper the authors inspect the correctness of Neuber's formula⁽⁹⁾ for this problem.