

两连域保角映射成环域的方法*

陈宜亨

(西安交通大学, 1981年12月8日收到)

摘 要

本文论述一种把 \square 型区域保角映射成环域的方法. 其要点是将问题转化为 Dirichlet 问题, 并证明该映像函数之实部应满足本文所示的边界条件, 进而依据两连域上定义的调和函数的单值特性确定环域的内半径. 映像函数的虚部可由 Cauchy-Riemann 条件得到, 由此产生的积分常数仅影响映像点的幅角, 并可由一一对应的映像来确定. 不失其一般性, 本方法可将由矩形拼成的复杂两连域保角映射成环域. 笔者还对本方法作了电算, 证明本方法可靠、经济. 结果附有表格.

一、解法的基本原理

众所周知, 保角映像法被广泛地应用于弹性力学. 文献[1]证明, 不可能将多连域保角映射成单位圆或任一其它的单连域. 文献[2]还证明, 不可能找到这样的解析函数, 把一个环域 (内半径 r_1 , 外半径 R_1) 保角映射成另一个环域 (内半径 r_2 , 外半径 R_2), 除非有 $R_1/r_1 = R_2/r_2$. 多连域的保角映射是个十分棘手的问题.

本文先把寻找解析函数的问题转化为调和方程的 Dirichlet 问题. 方法如下:

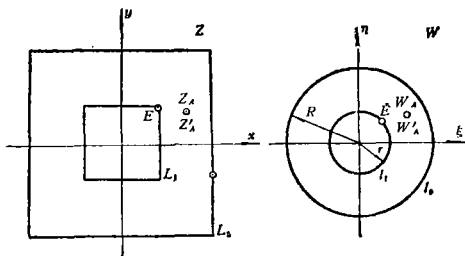


图 1

设 $W(z)$ 是一个解析函数, 它将 \square 域保角映射成环域. 再定义一个新的解析函数: $\varphi(z) = \ln \frac{W(z)}{z}$. 由图 1 可知函数 $W(z)$ 有下列特性:

$$\left. \begin{aligned} |W(z)| &= R, & z \in L_0 \\ |W(z)| &= r, & z \in L_1 \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

式中 L_1, L_0 为 \square 域内外边界; r, R 为环域的内

外半径. 不失其一般性, 可认定 $R=1$, 而 r 是未知待定的.

对 Z 面上域内点 Z_A , 由多值性可知 $Z'_A = Z_A \cdot e^{2\pi i}$ 或

$$\ln(Z'_A) = \ln(Z_A) + 2\pi i \quad (1.2)$$

同样, 对 W 面上环域内点 W_A , 有 $W'_A = W_A \cdot e^{2\pi i}$ 或

* 钱伟长推荐.

$$\ln(W_A) = \ln(W_A) + 2\pi i \tag{1.3}$$

因 $\varphi(z)$ 解析, 则其实部和虚部均为调和函数. 由公式 $\varphi(z) = \ln \frac{W(z)}{z}$, 不难发现:

$$\operatorname{Re}\{\varphi(z)\} = \ln|W(z)| - \ln|z|, \quad z \in L_0 \tag{1.4}$$

因为 $W(z)|_{L_0} = R = 1$, 则(1.4)式变成:

$$\operatorname{Re}\{\varphi(z)\} = -\ln|z|, \quad z \in L_0 \tag{1.5}$$

同样, 在 L_1 上有: $W(z)|_{L_1} = r$,

$$\operatorname{Re}\{\varphi(z)\} = \ln r - \ln|z| \tag{1.6}$$

显而易见, (1.5)、(1.6)是个Dirichlet问题. 不仿设:

$$\varphi(z) = P(x, y) + iQ(x, y) \tag{1.7}$$

$$K = \ln r \tag{1.8}$$

则问题转化为求解 \square 域的Dirichlet问题:

$$\left. \begin{aligned} \Delta P(x, y) &= 0 \\ P(x, y)|_{L_0} &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ P(x, y)|_{L_1} &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + K \end{aligned} \right\} \tag{1.9}$$

这里 Δ 为Laplace算子, K 为待定常数.

由笔者已完成的工作^[3]可知, 求解(1.9)式是十分容易的. 这里不妨把它分成两个问题来求解:

$$P(x, y) = P_1(x, y) + K \cdot P_2(x, y) \tag{1.10}$$

这里:

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_1(x, y) &= 0 \\ P_1(x, y)|_{L_1} &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \\ P_1(x, y)|_{L_0} &= -\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) \end{aligned} \right\} \tag{1.11}$$

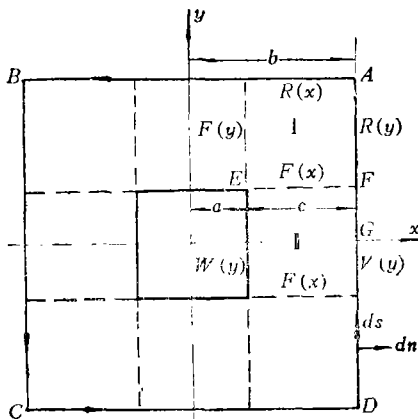


图 2

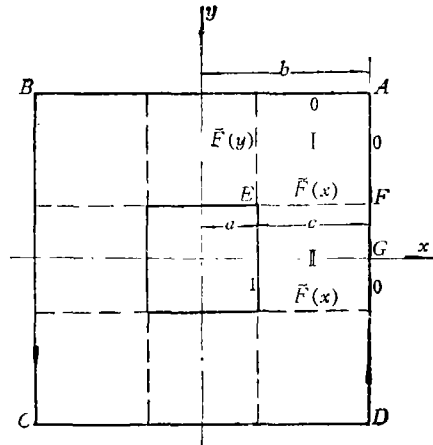


图 3

和

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_2(x, y) &= 0 \\ P_2(x, y) |_{L_1} &= 1 \\ P_2(x, y) |_{L_0} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

由[3]可知, 把 \square 域假想分割成八个单元, (看图2, 图3), 分别在分割线上设置待定函数 $F(x)$, $F(y)$ 或 $\tilde{F}(x)$, $\tilde{F}(y)$. 求解 $F(x)$ 和 $\tilde{F}(x)$ 的 Fourier 系数的线性代数方程组可直接从[3]文中的固定格式中得到 (看附录). 由对称性, 只需解 I, II 两单元即可.

$$\begin{aligned} F_m \left(\operatorname{th} \frac{m\pi a}{c} + \operatorname{cth} m\pi \right) &= \frac{1}{\pi^2 m^2} \left[\ln \frac{2a^2}{a^2 + b^2} - (-1)^m \ln \frac{a^2 + b^2}{2b^2} \right] \\ &+ \frac{R_m}{\operatorname{sh} m\pi} + \frac{4a}{\pi c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n W_n + (-1)^{m+n} n V_n}{n^2 + (2ma/c)^2} \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n F_n - (-1)^m n R_n}{n^2 + m^2} \quad (m=1, 2, \dots, \infty) \end{aligned} \quad (1.13)$$

这里 $F_m = \frac{2}{c} \int_a^b F(x) \cdot \sin \frac{m\pi(x-a)}{c} dx$, $R_m = \frac{2}{c} \int_a^b R(x) \cdot \sin \frac{m\pi(x-a)}{c} dx$

$$V_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a V(y) \cdot \sin \frac{n\pi(y+a)}{2a} dy, \quad W_n = \frac{1}{a} \int_{-a}^a W(y) \cdot \sin \frac{n\pi(y+a)}{2a} dy$$

而 $R(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + b^2}{x^2 + b^2} - \frac{x-a}{2c} \ln \frac{a^2 + b^2}{2b^2}$, $V(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{a^2 + b^2}{b^2 + y^2}$

$W(y) = \frac{1}{2} \ln \frac{2a^2}{a^2 + y^2}$, $F(x)$ 是定义于线段 \bar{EF} 上的待定函数.

同样, 对图3上的问题(1.12), 有:

$$\tilde{F}_m \cdot \left(\operatorname{th} \frac{m\pi a}{c} + \operatorname{cth} m\pi \right) = -\frac{2}{\pi^2 m^2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} n \tilde{F}_n}{n^2 + m^2} \quad (m=1, 2, \dots, \infty) \quad (1.14)$$

这里 $\tilde{F}_m = \frac{2}{c} \int_a^b \tilde{F}(x) \cdot \sin \frac{m\pi(x-a)}{c} dx$, $\tilde{F}(x)$ 是 \bar{EF} 上待定函数.

在单元 I 中, 方程(1.9)有解:

$$\begin{aligned} P^I(x, y) &= P_1^I(x, y) + K \cdot P_2^I(x, y) = -\frac{1}{2} \ln(2a^2) + \frac{x-a}{2c} \ln \frac{2a^2}{a^2 + b^2} \\ &+ \frac{y-a}{2c} \ln \frac{2a^2}{a^2 + b^2} + \frac{(x-a)(y-a)}{2c^2} \ln \frac{4a^2 b^2}{(a^2 + b^2)^2} + K \left\{ 1 - \frac{x-a}{c} - \frac{y-a}{c} \right. \\ &\left. + \frac{(x-a)(y-a)}{c^2} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + K \cdot \tilde{F}_n) \frac{\operatorname{sh}[n\pi(b-y)/c]}{\operatorname{sh} n\pi} \sin \frac{n\pi(x-a)}{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{\text{sh}[n\pi(y-a)/c]}{\text{sh}n\pi} \sin \frac{n\pi(x-a)}{c} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + K \cdot \tilde{F}_n) \frac{\text{sh}[n\pi(b-x)/c]}{\text{sh}n\pi} \sin \frac{n\pi(y-a)}{c} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{\text{sh}[n\pi(x-a)/c]}{\text{sh}n\pi} \sin \frac{n\pi(y-a)}{c} \quad \left(\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{array} \right) \quad (1.15)
\end{aligned}$$

在单元 II 中, 方程(1.9)有解:

$$\begin{aligned}
P^{\text{II}}(x, y) &= P_1^{\text{II}}(x, y) + K \cdot P_2^{\text{II}}(x, y) = -\frac{1}{2} \ln(2a^2) + \frac{x-a}{2c} \ln \frac{2a^2}{a^2+b^2} + K \left(1 - \frac{x-a}{c} \right) \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + K \cdot \tilde{F}_n) \frac{\text{ch}(n\pi y/c)}{\text{ch}(n\pi a/c)} \sin \frac{n\pi(x-a)}{c} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} V_n \frac{\text{sh}[n\pi(x-a)/2a]}{\text{sh}(n\pi c/2a)} \sin \frac{n\pi(y+a)}{2a} \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \frac{\text{sh}[n\pi(b-x)/2a]}{\text{sh}(n\pi c/2a)} \sin \frac{n\pi(y+a)}{2a} \quad \left(\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ -a \leq y \leq a \end{array} \right) \quad (1.16)
\end{aligned}$$

显然, F_m 和 \tilde{F}_m 可由(1.13)、(1.14)式分别截取有限项, 用 Seidel 迭代解出. 而 W_n, R_n, V_n 可用辛卜生积分法达到任何希望之精度. 下来应该确定 K 了.

按照复变函数理论, 定义于两连域的解析函数必须满足下列条件以保证其单值特性: $\varphi(z)$ 之虚部 $Q(x, y)$ 应有

$$\oint_L \frac{\partial Q(x, y)}{\partial s} ds = 0 \quad (1.17)$$

这里 L 为两连域中包围 L_1 的任一闭曲线. 我们选择折线 $A-B-C-D-A$ 来充当 L (看图 2, 3). 又由 Cauchy-Riemann 条件, (1.17) 式应与下式相同:

$$\oint_L \frac{\partial P(x, y)}{\partial n} ds = 0 \quad (1.17)'$$

实际上, 由于对称性:

$$\oint_L \frac{\partial P(x, y)}{\partial n} ds = 8 \oint_{a^A} \frac{\partial P(x, y)}{\partial n} ds = 0 \quad (1.17)''$$

代(1.15)、(1.16)式入(1.17)''可得:

$$K = -I_1/I_2 \quad (1.18)$$

其中 I_1, I_2 是实数, 可由下式计算:

$$I_1 = \int_{a^A} \frac{\partial P_1(x, y)}{\partial n} ds = \frac{b}{2c} \ln \frac{2a^2}{a^2+b^2} - \frac{1}{4} \ln \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ V_n \Delta_n \operatorname{cth} \frac{n\pi c}{2a} - W_n \Delta_n \frac{1}{\operatorname{sh} \frac{n\pi c}{2a}} \right\} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \left\{ \operatorname{cth} n\pi - \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh} n\pi} \right\} \\
 & + \sum_{n=1}^{\infty} F_n (-1)^n \left\{ \operatorname{cth} n\pi - \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh} n\pi} + \operatorname{th} \frac{n\pi a}{c} \right\} \tag{1.19}
 \end{aligned}$$

$$I_2 = \int_{\sigma_A} \frac{\partial P_2(x, y)}{\partial n} ds = \frac{1}{2} - \frac{b}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{F}_n (-1)^n \left\{ \operatorname{cth} n\pi - \frac{(-1)^n}{\operatorname{sh} n\pi} + \operatorname{th} \frac{n\pi a}{c} \right\} \tag{1.20}$$

这里 $\Delta_n = [1 - (-1)^n]/2$.

这样环域的内半径可由下式确定:

$$r = e^K = e^{-I_1/I_2} \tag{1.21}$$

$\varphi(z)$ 函数之虚部也可由

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad -\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \tag{1.22}$$

得到:

$$\begin{aligned}
 Q^1(x, y) &= \frac{y-a}{2c} \ln \frac{2a^2}{a^2+b^2} - \frac{x-a}{2c} \ln \frac{2a^2}{a^2+b^2} + \frac{(x-a)^2 - (y-a)^2}{4c^2} \ln \frac{4a^2b^2}{(a^2+b^2)^2} \\
 &+ K \left\{ \frac{x-y}{c} - \frac{(x-a)^2 - (y-a)^2}{c^2} \right\} \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + K \cdot \tilde{F}_n) \frac{\operatorname{ch}[n\pi(b-y)/c]}{\operatorname{sh} n\pi} \cos \frac{n\pi(x-a)}{c} \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{\operatorname{ch}[n\pi(y-a)/c]}{\operatorname{sh} n\pi} \cos \frac{n\pi(x-a)}{c} \\
 &+ \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + K \cdot \tilde{F}_n) \frac{\operatorname{ch}[n\pi(b-x)/c]}{\operatorname{sh} n\pi} \cos \frac{n\pi(y-a)}{c} \\
 &- \sum_{n=1}^{\infty} R_n \frac{\operatorname{ch}[n\pi(x-a)/c]}{\operatorname{sh} n\pi} \cos \frac{n\pi(y-a)}{c} + C_1, \quad \left(\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ a \leq y \leq b \end{array} \right) \tag{1.23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Q^1(x, y) &= \frac{y-a}{2c} \ln \frac{2a^2}{a^2+b^2} + K \frac{x-a}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} (F_n + K \tilde{F}_n) \frac{\operatorname{sh}(n\pi y/c)}{\operatorname{ch}(n\pi a/c)} \\
 &\cdot \cos \frac{n\pi(x-a)}{c} + \sum_{n=1}^{\infty} W_n \frac{\operatorname{ch}[n\pi(b-x)/2a]}{\operatorname{sh}(n\pi c/2a)} \cos \frac{n\pi(y-a)}{2a} + C_2 \\
 &\left(\begin{array}{l} a \leq x \leq b \\ -a \leq y \leq a \end{array} \right) \tag{1.24}
 \end{aligned}$$

这里 C_1, C_2 为积分常数。

$$\text{由 } \varphi(z) = \ln \frac{W(z)}{z} \text{ 可得: } W(z) = z \cdot e^{\varphi(z)} = z \cdot e^{P(x,y) + iQ(x,y)} \quad (1.25)$$

不难发现 C_1, C_2 仅与 $W(z)$ 的幅角有关, 可以用 Z 平面上的 E 点映射到 W 面上 \bar{E} 点 (看图 1) 这对应关系求得:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= 0 \\ C_2 &= \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ -(F_n + K \cdot \tilde{F}_n) \operatorname{th} \frac{n\pi a}{c} + \frac{(-1)^n V_n}{\operatorname{sh} \frac{n\pi c}{2a}} - (-1)^n W_n \operatorname{cth} \frac{n\pi c}{2a} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.26)$$

到此, 问题已完满地得到解决。

二、数值结果与讨论

本文论述的方法已被编制成电算程序, 在西安交大计算中心的 ANDROMEDA SYSTEM 11/B-32/220 微处理机上计算的数值结果被列于表 1, 2, 3。公式 (1.15)、(1.16) 中的诸无穷级数分别截取 9 项或 15 项或 25 项, 结果表明内径 r 之最大误差小于 0.1%, 常数 C_2 之最大误差小于 0.2%。这说明本方法是可靠的。显而易见, 本方法对计算机内存单元的要求极小, 特别适用于微处理机运用。在这种 5000 次/秒的机子上计算一组数值, 当取 9 项时仅历时 2 分钟。可见, 本方法也是十分经济的。

为了避免错误, 程序中还设计有回代点的过程, 以检验 Z 平面域边界上的点是否映射到 W 平面环域之边界上的点。图 4 列举了部分边界点的映像情况, 说明本方法是准确的。

x	y	ξ	η
5	0	0.540835	0
10	0	1	0
5	5	0.382428	0.382428
10	10	0.707107	0.707107
6	6	0.625927	0.625927
7	7	0.679045	0.679045
8	8	0.697329	0.697329
9	9	0.703108	0.703108
10	8	0.716829	0.703259
10	7	0.713809	0.700335
10	6	0.716347	0.697731
10	5	0.71818	0.695857

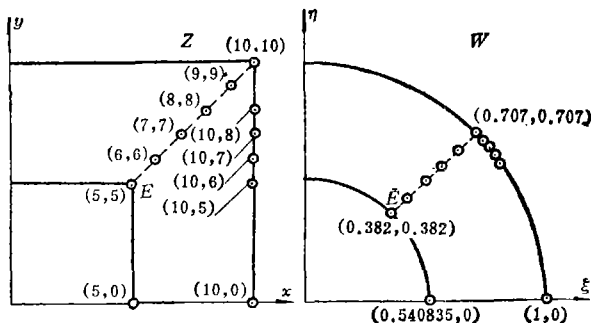


图 4

表 1 环境的内径 r

N	a/b	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
9		0.108656	0.217827	0.32698	0.435067	0.540835	0.642916	0.740253	0.832279	0.918832
15		0.108601	0.217770	0.326911	0.435014	0.540790	0.642845	0.740200	0.832219	0.918764
25		0.108586	0.217751	0.326889	0.435001	0.540773	0.642833	0.740191	0.832198	0.918739

表 2 积分常数 C_2

N	a/b	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9
9			0.141228	0.149206	0.166521	0.186647	0.207299	0.227751	0.247717	
15			0.141144	0.149125	0.166449	0.186540	0.207137	0.227643	0.247612	
25			0.141131	0.149088	0.166400	0.186501	0.207086	0.227598	0.247547	

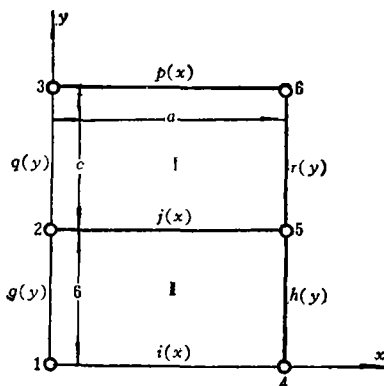
表 3 $F_m, \bar{F}_m, W_n, V_n, R_n$ 的数值 ($a/b=0.5, N=9$ 情况)

Fourier	morn	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_m		-0.0139675	7.0286×10^{-4}	-3.3405×10^{-4}	1.1732×10^{-4}	-7.0266×10^{-5}	3.8967×10^{-5}	-2.7169×10^{-5}	1.8243×10^{-5}	-1.3953×10^{-5}
\bar{F}_m		-0.13147	-0.040321	-0.020135	-0.01224	-8.2564×10^{-3}	-5.9637×10^{-3}	-4.5169×10^{-3}	-3.5397×10^{-3}	-2.8486×10^{-3}
W_n		0.33944	0	-7.0554×10^{-3}	0	5.8956×10^{-5}	0	-2.3286×10^{-5}	0	-5.1498×10^{-6}
V_n		0.11335	0	2.1414×10^{-3}	0	4.8983×10^{-4}	0	1.7957×10^{-4}	0	8.4679×10^{-5}
R_n		6.1654×10^{-3}	9.6750×10^{-4}	2.8207×10^{-4}	1.2109×10^{-4}	6.1577×10^{-5}	3.586×10^{-5}	2.2502×10^{-5}	1.5123×10^{-5}	1.0596×10^{-5}

附 录

文献[3]论述了一种调和方程Dirichlet问题有限元方法中的一种解析模式：对矩形单元，在通常的双线性模式后迭加了两个级数，使得最终的结果为级数型式的解析解。此文刊于 International Journal for Numerical Method in Engineering Vol. 18(1982), 687—700。这里摘录其固定格式中的一个：确定两个相邻单元水平公共边界上的未知函数 $j(x)$ 的 Fourier 系数的通用公式。

$$\begin{aligned}
 j_m \left(\operatorname{cth} \frac{m\pi b}{a} + \operatorname{cth} \frac{m\pi c}{a} \right) &= \frac{i_m}{\operatorname{sh} \frac{m\pi b}{a}} + \frac{p_m}{\operatorname{sh} \frac{m\pi c}{a}} \\
 &+ \frac{2b}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+n} n h_n - (-1)^n n g_n}{n^2 + (mb/a)^2} \\
 &+ \frac{2c}{\pi a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n \cdot q_n - (-1)^m \cdot n \cdot r_n}{n^2 + (mc/a)^2} \\
 &+ \frac{4a}{\pi^2 m^2} \cdot \left(\frac{u_3 - u_2}{c} - \frac{u_2 - u_1}{b} \right) \\
 &- \frac{2a(-1)^m}{\pi^2 m^2} \cdot \left(\frac{u_6 + u_2 - u_5 - u_3}{c} \right. \\
 &\left. - \frac{u_5 + u_1 - u_2 - u_4}{b} \right) \quad (m=1, 2, \dots, \infty)
 \end{aligned}$$



附图

这里 $j_m, i_m, p_m, h_n, g_n, q_n, r_n$ 是函数 $j(x), i(x), p(x), h(y), g(y), q(y), r(y)$ 的 Fourier 系数； $u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6$ 为调和函数在六个节点上的数值（参见附图）； $\Delta_m = [1 - (-1)^m]/2$ 。

参 考 文 献

- [1] Голузин, Г. М., «复变函数的几何理论», 第六章, 中译本, (1952).
- [2] Walter, Rudin, *Real and Complex Analyses*, Second Edition, McGraw-Hill Series in Higher Mathematics(1974), 296—319.
- [3] Chen Yi-heng, On a finite element model for solving the Dirichlet problem of Laplace's equation, *International Journal Numerical Method in Engineering*, 18(1982), 687—700.
- [4] Paliouras, J. D., *Complex Variables for Scientists and Engineers*, Macmillan Publishing Co., Inc., New York(1975), 75—78.

A Method for Conformal Mapping of a Two-Connected Region onto an Annulus

Chen Yi-heng

(Division of Theoretical Mechanics, Xian Jiao-Tong University, Xian)

Abstract

This paper presents a method for conformal mapping of a two-connected region onto an annulus. The principle of the method is to find a holomorphic function, the real part of which should be a harmonic function satisfying certain boundary conditions. The key for solving the problem is to determine the inner radius of annulus. According to the theory of complex functions we shall determine it from the condition that the line integral predicted along multiple closed paths should be zero. It is then easy to see that the imaginary part can directly be obtained with the aid of Cauchy-Riemann equations. The unknown integral constants can also be derived by using the one-to-one mapping of previous region onto annulus. Without loss of generality, the method may be used to conformally map other two-connected regions onto an annulus.