

复合载荷下圆薄板的大挠度问题*

黄 黔

(清华大学, 1982年10月10日收到)

摘 要

本文引入载荷分布函数使复合载荷依单参数变化, 并选取平均挠角作为单一的位移摄动参数, 给出了在均布载荷和中心集中力联合作用下边缘固定夹紧的圆薄板大挠度问题的摄动解, 并讨论了中心点挠度为零的特殊情况。

一、引 言

在 von Kármán^[1]提出薄板大挠度方程后, 钱伟长教授^[2,3,7]以中心点挠度为摄动参数, 成功地解决了均布载荷和中心集中力作用下圆薄板的大挠度问题。之后, 叶开沅、胡海昌、潘立宙、林鸿荪等用摄动法解决了环形薄板、椭圆形薄板等一系列大挠度问题^[3-7]。W. A. Nash 和 I. D. Cooly^[9] (1959) 用摄动法研究了椭圆形板的大挠度问题。R. Schmidt 和 D. A. DaDeppo^[10,11] (1974, 1975) 用摄动法处理了一些膜和板的问题, 他们在比较了几种摄动解的结果后认为“仍以钱伟长的解为好”。

胡海昌教授首先研究了圆薄板在均布载荷和中心集中力联合作用下的大挠度问题, 他先用载荷双参数摄动, 作了计算, 又采用与载荷相应的两个广义位移作为双摄动参数, 进行了一些分析。他认为载荷参数法计算比较简单而结果较差, 位移参数法结果较好而计算却比较复杂, 指明双摄动参数在计算上的困难, 并指出了中心点挠度为零而其它点不为零的场合, 还对此作了计算。本文试图解决这一困难。在弹性范围内, 对于某一复合载荷作用的结果, 作为加载后的状态, 可以选取特定的加载过程作为计算途径。据此本文引入载荷分布函数使复合载荷按比例依单一载荷参数变化, 并选取加权平均挠角作为单一的位移摄动参数, 给出了均布载荷及中心集中力联合作用下边缘固定夹紧的圆薄板大挠度问题的解答。进而讨论了中心点挠度为零的情况。说明以中心点挠度作为摄动参数, 仅当

$$-0.6 < P/\pi R^2 q < -0.05$$

时失效, 在其它情况下都是简便、理想的摄动参数。文中还讨论了复合载荷下圆薄板的变形形状和某些变形过程, 并给出了不同载荷不同 μ 值下的非线性刚度系数。

本文与弹性膜盒受复合载荷的计算有关, 而膜盒等弹性元件在仪表工业上有重要的实际意义。中心点挠度为零正是力平衡式仪表中常见的现象。

* 钱伟长推荐。

二、基本方程及其摄动解

圆薄板半径为 R ，厚度为 h 。设横向挠度为 w ，中面薄膜力为 N_r ， N_t ，它们都是半径 r 的函数，并适合Kármán方程：

$$\left. \begin{aligned} D \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} &= N_r \frac{dw}{dr} + \frac{qr}{2} + \frac{P}{2\pi r} \\ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r^2 N_r) + \frac{Eh}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0 \\ N_t &= -\frac{d}{dr} (r N_r) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

式中， E 为杨氏模量， $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ ， μ 为泊松比。

边界条件是：

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } r=R \quad w=0, \frac{dw}{dr}=0, (1-\mu)N_r + r \frac{dN_r}{dr} &= 0 \\ \text{当 } r=0 \quad \frac{dw}{dr}, N_r &\text{有限} \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

现引入无量纲变数：

$$\left. \begin{aligned} x=r^2/R^2 \quad W &= \sqrt{3(1-\mu^2)} w/h \\ S=3(1-\mu^2)R^2 N_r/Eh^3 \quad T &= 3(1-\mu^2)R^2 N_t/Eh^3 \\ \alpha Q &= \frac{3}{4} (1-\mu^2) \sqrt{3(1-\mu^2)} R^2 P/\pi Eh^4 \\ \beta Q &= \frac{3}{4} (1-\mu^2) \sqrt{3(1-\mu^2)} R^4 q/Eh^4 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

则Kármán方程化为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(x \frac{dW}{dx} \right) &= S \frac{dW}{dx} + Q \left(\beta + \frac{\alpha}{x} \right) \\ \frac{d^2}{dx^2} (xS) + \frac{1}{2} \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 &= 0 \\ T &= S + 2x \frac{dS}{dx} \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

边界条件化为：

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } x=1 \quad W=0, \frac{dW}{dx}=0, (1-\mu)S + 2 \frac{dS}{dx} &= 0 \\ \text{当 } x=0 \quad \sqrt{x} \frac{dW}{dx}, S &\text{有限} \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

在方程(2.4)中，由于引入载荷分布函数， $\beta + \frac{\alpha}{x}$ ，复合载荷依单参数 Q 变化。当载荷以均布力为主时，可取 $\beta=1$ ，由(2.3)式

$$Q = \frac{3}{4} (1-\mu^2) \sqrt{3(1-\mu^2)} R^4 q / Eh^4$$

其物理意义是无量纲均布载荷集度, 而 $\alpha = P / \pi R^2 q$, 可视为无量纲集中力. 当载荷以集中力为主时, 可取 $\alpha = 1$, 则

$$Q = \frac{3}{4} (1-\mu^2) \sqrt{3(1-\mu^2)} R^2 P / \pi Eh^4$$

是无量纲集中力, 而 $\beta = \pi R^2 q / P$, 可视为无量纲均布载荷.

摄动参数选取加权均方根挠角:

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 r^{-\lambda} \cdot 2\pi r dr \quad (2.6)$$

当 $\lambda=0$, ε 是均方根挠角; 当 $\lambda=1$, ε 是沿半径平均的均方根挠角; 当 $\lambda=2$, ε 是均方根环向曲率. 下面仅用这三种位移摄动参数求解. 结果以 $\lambda=1$ 为佳.

令

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\frac{dW}{dx} \right)^2 x^{1-\frac{\lambda}{2}} dx = \frac{3(1-\mu^2)}{16h^2} R^{2+\lambda} \varepsilon^2 \quad (2.7)$$

载荷参数 Q , 无量纲挠度 W 和中面力 S , T 均可用 ε 展开:

$$\left. \begin{aligned} Q &= q_1 \varepsilon + q_3 \varepsilon^3 + \dots \\ W &= w_1(x) \varepsilon + w_3(x) \varepsilon^3 + \dots \\ S &= s_2(x) \varepsilon^2 + \dots \\ T &= t_2(x) \varepsilon^2 + \dots \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

将 (2.8) 式代入 (2.4)、(2.5) 式. 由于等式对于任意 ε 值成立, 故可依 ε 的不同幂次, 分别相等, 得到:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(x \frac{dw_1}{dx} \right) &= q_1 \left(\beta + \frac{\alpha}{x} \right) \\ w_1(1) &= 0, \quad w_1'(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} w_1'(x) \text{ 有限} \end{aligned} \right\} \quad (\text{I})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (x s_2) &= -\frac{1}{2} w_1'^2 \\ (1-\mu) s_2(1) + 2s_2'(1) &= 0, \quad s_2(0) \text{ 有限} \end{aligned} \right\} \quad (\text{II})$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(x \frac{dw_3}{dx} \right) &= s_2 w_1' + q_3 \left(\beta + \frac{\alpha}{x} \right) \\ w_3(1) &= 0, \quad w_3'(1) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} w_3'(x) \text{ 有限} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III})$$

$$\text{且 } t_2 = s_2 + 2x \frac{ds_2}{dx}.$$

同样, 将 (2.8) 式代入 (2.7) 式可得:

$$\int_0^1 w_1'^2 x^{1-\frac{\lambda}{2}} dx = 4 \quad (2.9)$$

$$\int_0^1 w_1' w_3' x^{1-\frac{\lambda}{2}} dx = 0 \quad (2.10)$$

顺序解问题 (I), (II), (III), 即可确定 $w_1(x)$, $w_3(x)$, $s_2(x)$ 和 $t_2(x)$, 由 (2.9)、(2.10) 式可确定常数 q_1 , q_3 , 从而得到复合载荷下圆薄板大挠度问题的摄动解。

由问题 (I)

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left(x \frac{dw_1}{dx} \right) = q_1 \left(\beta + \frac{\alpha}{x} \right) \\ w_1(1) = 0, w_1'(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} w_1'(x) \text{ 有限} \end{cases}$$

解得:

$$\begin{cases} w_1(x) = q_1 [\beta x^2 - 2x(2\alpha + \beta) + (4\alpha + \beta) + 4\alpha x \ln x] / 4 = q_1 I_1(x) \\ w_1'(x) = q_1 [\beta(x-1) + 2\alpha \ln x] / 2 = q_1 J_1(x) \end{cases} \quad (2.11)$$

由问题 (II)

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} (x s_2) = -\frac{1}{2} w_1'^2 \\ (1-\mu) s_2(1) + 2s_2'(1) = 0, s_2(0) \text{ 有限} \end{cases}$$

解得:

$$s_2(x) = q_1^2 [-3x^3\beta^2 + 4x^2(3\beta^2 + 5\alpha\beta) - 18x(\beta^2 + 6\alpha\beta + 14\alpha^2) + e - 72\alpha^2 x \ln^2 x - 24\alpha\beta x^2 \ln x + 72x \ln x(3\alpha^2 + \alpha\beta)] / 288 = q_1^2 f_2(x) \quad (2.12)$$

$$\text{其中 } e = [36\alpha^2(9-7\mu) + 8\alpha\beta(16-11\mu) + 3\beta^2(5-3\mu)] / (1-\mu) \quad (2.13)$$

且有

$$t_2(x) = q_1^2 [-21x^3\beta^2 + 4x^2(15\beta^2 + 13\alpha\beta) - 18(3\beta^2 + 10\alpha\beta + 18\alpha^2) + e - 216\alpha^2 x \ln x - 120\alpha\beta x^2 \ln x + 72x \ln x(5\alpha^2 + 3\alpha\beta)] / 288 = q_1^2 g_2(x) \quad (2.14)$$

由问题 (III)

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left(x \frac{dw_3}{dx} \right) = s_2 w_1' + q_3 \left(\beta + \frac{\alpha}{x} \right) \\ w_3(1) = 0, w_3'(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} w_3'(x) \text{ 有限} \end{cases}$$

因方程右边第二项和问题 (I) 的相似性, 可以设

$$\begin{cases} w_3(x) = q_3 I_3(x) + q_1^3 I_3(x) \\ w_3'(x) = q_3 J_3(x) + q_1^3 J_3(x) \end{cases} \quad (2.15)$$

其中 $I_3(x)$, $J_3(x)$ 已由 (2.11) 式表出, 问题 (III) 归结为求 $I_3(x)$, $J_3(x)$:

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dx^2} \left(x \frac{dI_3}{dx} \right) = s_2 w_1' / q_1^3 \\ I_3(1) = 0, J_3(1) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} J_3(x) \text{ 有限} \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} I_3(x) = [\xi_0(x) + \xi_1(x) \ln x + \xi_2(x) \ln^2 x + \xi_3(x) \ln^3 x] / 576 \\ J_3(x) = [\eta_0(x) + \eta_1(x) \ln x + \eta_2(x) \ln^2 x + \eta_3(x) \ln^3 x] / 576 \end{cases} \quad (2.16)$$

式中

$$\xi_0(x) = [a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6] / 3600$$

$$\xi_1(x) = x^2[5ae - 20x(64a^3 + 26a^2\beta + 3a\beta^2) + 5x^2(19a^2\beta + 5a\beta^2) - 3a\beta^2x^3]/10$$

$$\xi_2(x) = x^3[8(13a^3 + 3a^2\beta) - 5a^2\beta x]/2$$

$$\xi_3(x) = -8a^3x^3$$

$$\eta_0(x) = [b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 + b_5x^5]/120$$

$$\eta_1(x) = x[2ae - 4x(140a^3 + 66a^2\beta + 9a\beta^2) + 2x^2(33a^2\beta + 10a\beta^2) - 3a\beta^2x^3]/2$$

$$\eta_2(x) = 2x^2[6(11a^3 + 3a^2\beta) - 5xa^2\beta]$$

$$\eta_3(x) = -2x^2a^3$$

其中,

$$a_0 = 300800a^3 + 177975a^2\beta + 34308a\beta^2 + 2310\beta^3 - 1800ae - 500\beta e$$

$$a_1 = -30(22720a^3 + 12170a^2\beta + 2181a\beta^2 + 138\beta^3 - 180ae - 40\beta e)$$

$$a_2 = -900e(4a + \beta)$$

$$a_3 = 200(1904a^3 + 1152a^2\beta + 234a\beta^2 + 18\beta^3 + \beta e)$$

$$a_4 = -75(577a^2\beta + 228a\beta^2 + 30\beta^3)$$

$$a_5 = 18(79a\beta^2 + 30\beta^3)$$

$$a_6 = -60\beta^3$$

$$b_0 = a_1/30$$

$$b_1 = -60e(3a + \beta)$$

$$b_2 = 20(1136a^3 + 840a^2\beta + 198a\beta^2 + 18\beta^3 + \beta e)$$

$$b_3 = -10(463a^2\beta + 198a\beta^2 + 30\beta^3)$$

$$b_4 = 3(67a\beta^2 + 30\beta^3)$$

$$b_5 = -12\beta^3$$

由(2.9)式

$$\int_0^1 w_1' w_1' x^{1-\frac{1}{2}} dx = q_1^2 \int_0^1 J_1^2 x^{1-\frac{1}{2}} dx = 4$$

$$\left. \begin{aligned} \text{设} \quad A &= \int_0^1 J_1^2 x^{1-\frac{1}{2}} dx \\ \text{则} \quad q_1 &= 2/\sqrt{A} \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

由(2.10)式

$$\int_0^1 w_1' w_3' x^{1-\frac{1}{2}} dx = q_1 q_3 A + q_1^4 \int_0^1 J_1 J_3 x^{1-\frac{1}{2}} dx$$

$$\left. \begin{aligned} \text{设} \quad B &= \int_0^1 J_1 J_3 x^{1-\frac{1}{2}} dx \\ \text{则} \quad q_3 &= (-B/A) q_1^4 = K q_1^4 \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

当 $\lambda=0$, 积分得:

$$A = (36a^2 + 20a\beta + 3\beta^2)/144$$

$$\left. \begin{aligned} B &= [611060625a^4 + 543082092a^3\beta + 178569230a^2\beta^2 + 25902600a\beta^3 \\ &\quad + 1441125\beta^4 - e(3552500a^2 + 2021250a\beta + 294000\beta^2)]/15240960000 \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

当 $\lambda=1$,

$$\begin{aligned}
 A &= 4(700\alpha^2 + 336\alpha\beta + 45\beta^2)/4725 \\
 B &= \frac{349252}{4084101}\alpha^4 + \frac{136555571}{1890355320}\alpha^3\beta + \frac{3635502769}{159750027360}\alpha^2\beta^2 \\
 &\quad + \frac{310647433}{97394497200}\alpha\beta^3 + \frac{2791}{16216200}\beta^4 - e\left(\frac{7}{13500}\alpha^2\right. \\
 &\quad \left. + \frac{1297}{4762800}\alpha\beta + \frac{1}{27216}\beta^2\right)
 \end{aligned} \quad (2.20)$$

当 $\lambda=2$,

$$\begin{aligned}
 A &= (24\alpha^2 + 9\alpha\beta + \beta^2)/12 \\
 B &= [102368000\alpha^4 + 80361750\alpha^3\beta + 23724414\alpha^2\beta^2 + 3148635\alpha\beta^3 \\
 &\quad + 161550\beta^4 - e(661500\alpha^2 + 308000\alpha\beta + 36750\beta^2)]/435456000
 \end{aligned} \quad (2.21)$$

综上所述, 复合载荷圆薄板大挠度问题的解为:

$$\begin{aligned}
 Q &= q_1\epsilon + q_3\epsilon^3 \\
 W(x) &= q_1I_1(x)\epsilon + [q_3I_1(x) + q_1^2I_3(x)]\epsilon^3 \\
 S(x) &= f_2(x)q_1^2\epsilon^2 \\
 T(x) &= g_2(x)q_1^2\epsilon^2
 \end{aligned} \quad (2.22)$$

其中 $q_1=2/\sqrt{A}$, $q_3=(-B/A)q_1^3$, A, B 见(2.19)、(2.20)、(2.21)式, $I_1(x)$ 见(2.11)式, $I_3(x)$ 见(2.16)式, $f_2(x)$ 见(2.12)式, $g_2(x)$ 见(2.14)式.

三、中心点挠度为零的情况

假定在加载和卸载时均布载荷和集中力保持固定的比例. 首先, 我们寻求按小挠度理论中心点挠度保持为零的条件. 由(2.22)式, 中心点挠度为:

$$W(0) = q_1I_1(0)\epsilon + [q_3I_1(0) + q_1^2I_3(0)]\epsilon^3 \quad (3.1)$$

由(2.11)式和(2.3)式, 可知 $I_1(0)=0$ 的条件是

$$P = -\pi R^2 q/4 \quad (3.2)$$

因此, 当集中力是均布载荷总量的四分之一, 且方向相反, 在小挠度范围内中心点挠度保持为零.

其次, 讨论一下在非线性弹性变形过程中, 中心点挠度通过零点的条件. 由(3.1)式可知, $W(0)=0$ 的条件是

$$\epsilon^2 = A^2 I_1(0) / \{4[BI_1(0) - AI_3(0)]\} \quad (3.3)$$

今取 $\mu=0.3$, 由(2.13)式求 e , 代入(2.11)、(2.15)式求出 $I_1(0)$, $I_3(0)$, 对于 $\lambda=0, 1, 2$ 取(2.19)、(2.20)、(2.21)三组 A, B 值分别求出中心点挠度通过零点的 ϵ 值, 如图1所示.

一般说来, 当集中力和均布载荷方向相反时, 圆板中心点挠度有可能等于零. 而当单一载荷作用或集中力和均布载荷方向相同时, 圆板中心点挠度为零就是难以接受的了. 以此为原则, 从图1中可以看出, 三种平均挠角中, 以 $\lambda=1$ 为佳.

从摄动解看来, 中心点挠度为零这一种情况, 对于线性变形来说, 是中心点保持不动(条件是(3.2)式); 对于非线性变形来说, 是中心点挠度从正值, 经过零, 变成负值, 或从负值, 经过零, 变成正值(通过零点的 ϵ 值见(3.3)式). 这种非线性变形过程在第五节中还将通过变形曲线的发展的具体算例(图4)予以说明.

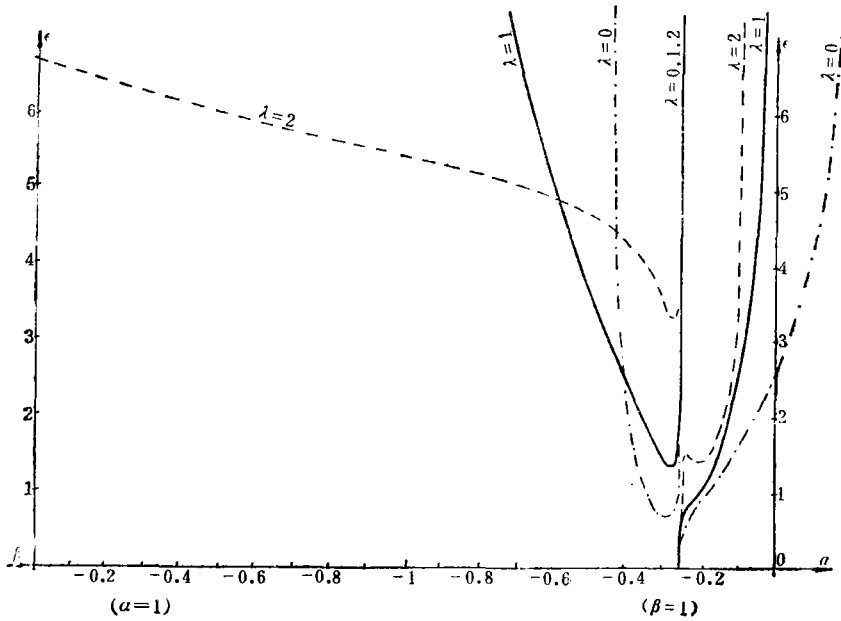


图 1 中心点挠度为零的 ϵ 值

四、以中心点挠度作为摄动参数

如果选取中心点挠度作为摄动参数，则(2.17)~(2.21)各式失效，代以下关系式：

$$\left. \begin{aligned} \because w_1(0) &= q_1 I_1(0) = 1 & \therefore q_1 &= 1/I_1(0) \\ \because w_3(0) &= q_3 I_1(0) + q_1^3 I_3(0) = 0 & \therefore q_3 &= [-I_3(0)/I_1(0)] q_1^3 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

如同(2.18)式一样，也记 $q_3 = K q_1^3$ ，则 $K = K_0 = -I_3(0)/I_1(0)$ ，此时(2.22)式和(2.11~2.16)诸式继续有效。

如果把摄动参数仅仅看作是一个媒介，可令 $\epsilon_1 = q_1 \epsilon$ ，则(2.22)式化为

$$\left. \begin{aligned} Q &= \epsilon_1 + K \epsilon_1^3 \\ W(x) &= I_1(x) \left\{ \epsilon_1 + \left[K + \frac{I_3(x)}{I_1(x)} \right] \epsilon_1^3 \right\} \\ S(x) &= f_2(x) \epsilon_1^2 \\ T(x) &= g_2(x) \epsilon_1^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

(4.2)式对各种摄动参数都适用，在这里非线性结构进一步简化，选取不同的摄动参数所得到的摄动解，仅仅在常数 K 的数值上有不大的差别。今以三种平均挠角作为摄动参数，由(2.19)、(2.20)、(2.21)式分别求出 K 值并与以中心点挠度为摄动参数求出的 K_0 对比，结果如图2所示。

从图2看出，平均挠角作摄动参数的 K 值仅在 $P = -\pi R^2 q/4$ 附近和中心点挠度作摄动参数的 K_0 值有较大偏差。如第三节所讨论，这是中心点挠度可能为零的特殊情况，此时中心点挠度作为摄动参数失效。对 $\lambda=1$ ， $|K/K_0 - 1| > 0.05$ 仅发生在 $\beta=1$ ， $-0.56 < \alpha < -0.07$ ，在这个范围以外，中心点挠度是简便而又理想的摄动参数。

从图2还可看出，在 $\beta=1$ ， $\alpha > 0.02$ 和 $\alpha=1$ ， $\beta > -0.98$ 的多数情况下， $\lambda=1$ 的 K/K_0 值在 $1 \sim 1.025$ 范围内，其刚度比用中心点挠度摄动的计算结果稍小一点。

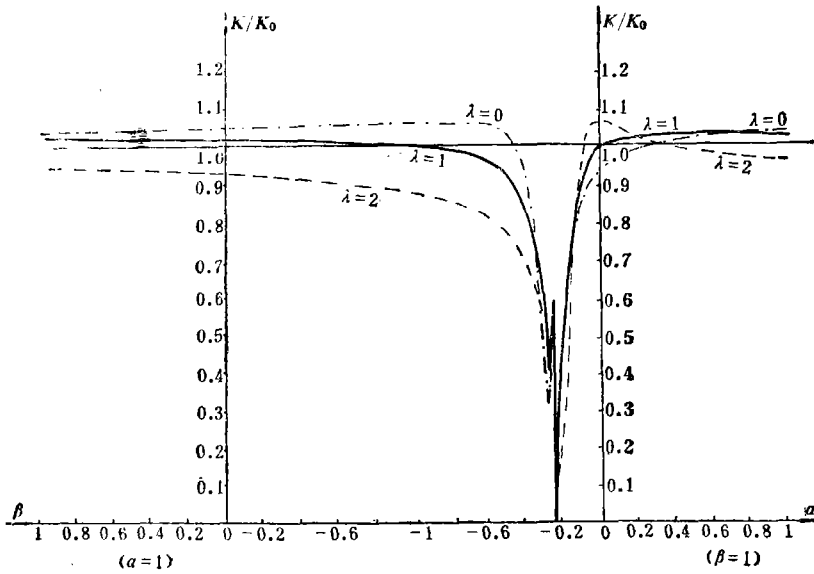


图 2 不同摄动参数的 K/K_0

五、圆薄板的大挠度变形形状和某些变形过程

图3给出了 $\mu=0.3$ 的圆薄板在不同载荷比例下的变形形状，是用 $\lambda=1$ 的平均挠角进行摄动计算，且 $\beta=1$ ， $\epsilon=0.5$ 。

从图3可以看出，当集中力与均布载荷方向相反时，板的中心有明显凹陷。

图4给出了 $\mu=0.3$ 的圆薄板，在 $\beta=1$ ， $\alpha=-0.24723$ 的载荷下的变形过程。当 $\epsilon=0.5$ 时，中心点挠度通过零点。在集中力和均布载荷按比例加载的过程中，当 $\epsilon < 0.5$ ，中心点挠度为

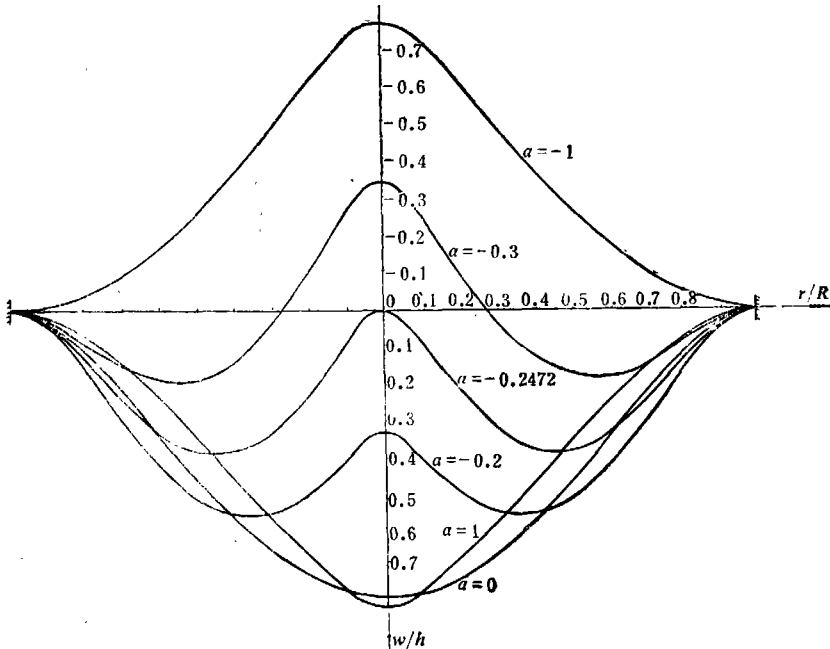


图 3 圆薄板变形曲线 ($\mu=0.3$ ， $\beta=1$ ， $\epsilon=0.5$)

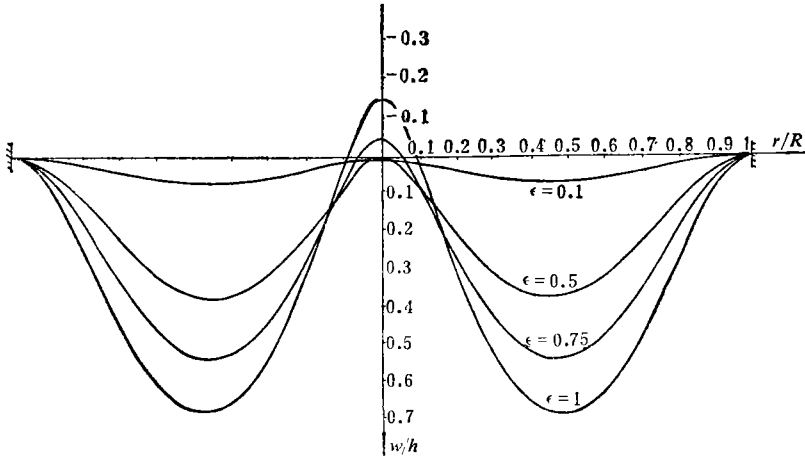


图 4 圆薄板非线性变形过程

($\mu=0.3, \beta=1, \alpha=-0.24723$)

正; 当 $\epsilon > 0.5$, 中心点挠度为负. 这是非线性变形特有的现象.

表 1

($P \leq \pi R^2 q$) $\beta=1, \alpha=P/\pi R^2 q$

α	q_1	q_3				
		$\mu=0.25$	$\mu=0.275$	$\mu=0.3$	$\mu=0.325$	$\mu=0.35$
-1.00	3.3989	3.4326	3.4886	3.5487	3.6132	3.6827
-0.75	5.0300	4.9041	4.9800	5.0612	5.1485	5.2425
-0.50	9.5323	8.3719	8.4813	8.5984	8.7242	8.8597
-0.25	31.539	9.9634	10.155	10.361	10.582	10.820
0.00	10.247	12.781	13.067	13.374	13.703	14.058
0.25	5.2299	6.1739	6.3004	6.4359	6.5815	6.7383
0.50	3.4897	4.0123	4.0914	4.1763	4.2674	4.3655
0.75	2.8154	2.9641	3.0214	3.0828	3.1488	3.2198
1.00	2.0907	2.3482	2.3931	2.4411	2.4927	2.5483

表 2

($P \geq \pi R^2 q$) $\alpha=1, \beta=\pi R^2 q/P$

β	q_1	q_3				
		$\mu=0.25$	$\mu=0.275$	$\mu=0.3$	$\mu=0.325$	$\mu=0.35$
-1.00	3.3989	3.4326	3.4886	3.5487	3.6132	3.6827
-0.75	3.1596	3.2800	3.3150	3.3740	3.4372	3.5054
-0.50	2.9492	3.0986	3.1523	3.2099	3.2717	3.3383
-0.25	2.7633	2.9485	3.0008	3.0568	3.1170	3.1818
0.00	2.5981	2.8093	2.8601	2.9145	2.9730	3.0359
0.25	2.4506	2.6804	2.7297	2.7825	2.8392	2.9003
0.50	2.3182	2.5611	2.6089	2.6601	2.7150	2.7742
0.75	2.1988	2.4506	2.4969	2.5465	2.5998	2.6571
1.00	2.0907	2.3482	2.3931	2.4411	2.4927	2.5483

六、非线性刚度系数

表1、表2给出了以 $\lambda=1$ 的平均挠角为摄动参数, 不同 μ 值在不同比例的复合载荷下的非线性刚度系数 q_1, q_3 . 再利用 (2.22) 式和 (2.11) ~ (2.15) 式, 即可进行复合载荷下圆薄板大挠

度的实用计算。

本文忽视了集中力的局部剪力效应；故当 $P \neq 0$ 时，在板的中心点附近，半径为厚度数倍的小范围内，上述计算无效。

感谢：本文所研究的问题本身以及解法，都是钱伟长教授提出来的，他还给予具体指导，谨表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] von Kármán, Th., The engineer grapples with nonlinear problem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 46, (1940), 615-683.
- [2] Chien Wei-zang (钱伟长), Large deflection of a circular clamped plate under uniform pressure, *Chinese Journal of Physics*, 7, (1947), 102-113.
- [3] 钱伟长、叶开沅, 圆薄板大挠度问题, 物理学报, 10 (1954), 209-238.
- [4] 叶开沅, 边缘载荷下环形薄板的大挠度问题, 物理学报, 9 (1953), 110-129.
- [5] 胡海昌, 在均布及中心集中载荷作用下圆板的大挠度问题, 物理学报, 10, (1954), 383-394.
- [6] 潘立宙, 固定边椭圆形薄板的大挠度问题, 未发表, (1954).
- [7] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅, 弹性圆薄板大挠度问题, (文集), 中国科学院, (1954).
- [8] 陈山林, 浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征, 应用数学和力学, 1, 2(1980), 261-272.
- [9] Nash, W. A. and I. D. Cooly, Large deflection of a clamped elliptical plate subjected to uniform pressure, *Trans. ASME, J. of Appl. Mech.*, 26, 2 (1959), 291-293.
- [10] Schmidt, R. and D. A. DaDeppo, A new approach to the analysis of shells, plates and membranes with finite deflections, *Inter. J. of Non-linear Mech.*, 9, 5 (1974), 409-419.
- [11] DaDeppo, D. A. and R. Schmidt, Moderately large deflections of a loosely damped circular plate under a uniformly distributed pressure, *Indus. Math.*, 25, 1 (1975), 17-28.
- [12] 陈山林、光积昌, 圆薄板大挠度问题的摄动参数, 应用数学和力学, 2, 1 (1981), 131-144.

Large Deflection of Circular Plate under Compound Load

Hwang Chien

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

By means of the perturbation method, this paper presents an approximate solution for large deflection of clamped circular plate under uniform pressure together with a concentrated load at the center. The special case of vanishing central deflection is also discussed. In this paper, a load distribution function is introduced so as to make the compound loads depend on a single load parameter, and average angular deflection is being used as the single displacement perturbation parameter.