应用数学和力学，第4卷第5期（1983年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

粘-弹性介质中渗流的有限元法分析*

金问鲁　　吴淦卿

（杭州市建筑设计院，1982年9月23日收到）

摘　　要

R. S. Sandhu和E. L. Wilson提出了弹性介质中渗流分析的有限元法[1]，可以用来分析较复杂的工程问题，本文将此方法推广到粘-弹性介质情况．当土骨架是粘-弹性介质时，应力与应变的关系随时间变化，增加了问题的复杂性．本文提出了折算弹性张量的概念，即当有限元法计算中的时间间隔 Δt 预先给定时，在此间隔内应力增量和应变增量可以近似表示为线性关系．这些线性比例常数将称为折算弹性张量．Sandhu 和 Wilson 方法仅能用于弹性介质情况，根据折算张量概念，本文方法适用范围推广到粘-弹性介质情况．

一、折 算 弹 性 张 量

1. 粘-弹性介质三体模型和本构关系

粘性元件的应力-应变关系可以写成：

$$\sigma_{ij}=\eta_{ijkl}\dot{e}_{kl} \tag{1.1}$$

e_{kl} 上面的点号表示对时间求导数，η_{ijkl} 是粘滞张量．类似于弹性张量 C_{ijkl}，也存在如下对称关系：

$$\eta_{ijkl}=\eta_{jikl}=\eta_{ijlk}=\eta_{klij} \tag{1.2}$$

将介质看作如图1所示的三体模型，采用如下两个条件寻求应力-应变关系．

$$e_{ij}=e_{ij}^{(1)}+e_{ij}^{(2)},\quad \sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)} \tag{1.3a,b}$$

首先作分部分析，今有如下的逆对关系：

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}^{(1)}e_{kl}^{(1)},\quad e_{ij}^{(1)}=F_{ijkl}^{(1)}\sigma_{kl} \tag{1.4a,b}$$

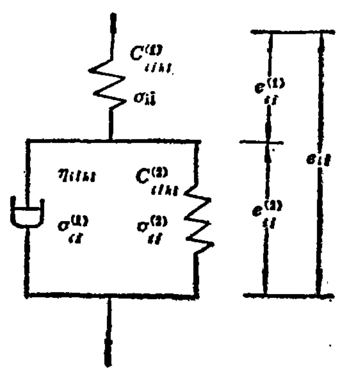


图 1　介质三体模型

式中，$C_{ijkl}^{(1)}$和$F_{ijkl}^{(1)}$各为模型弹簧（1.1）的刚性和柔性张量．其次有：

$$\sigma_{ij}^{(1)}=\eta_{ijkl}\dot{e}_{kl}^{(2)},\quad \sigma_{ij}^{(2)}=C_{ijkl}^{(2)}e_{kl}^{(2)} \tag{1.5a,b}$$

η_{ijkl}是粘性元件的粘滞张量，$C_{ijkl}^{(2)}$是弹簧(1.2)的刚性张量．将(1.5a,b)式代入(1.3b)中：

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{(1)}+\sigma_{ij}^{(2)}=C_{ijkl}^{(2)}e_{kl}^{(2)}+\eta_{ijkl}\dot{e}_{kl}^{(2)}$$

$$=\left(C_{ijkl}^{(2)}+\eta_{ijkl}\frac{\partial}{\partial t}\right)e_{kl}^{(2)} \tag{1.6}$$

* 钱伟长推荐．

(1.4b) 式可改写为：$e_{kl}^{(1)}=F_{klpq}^{(1)}\sigma_{pq}$，则有

$$\left(C_{ijkl}^{(2)}+\eta_{ijkl}\frac{\partial}{\partial t}\right)e_{kl}^{(1)}=F_{klpq}^{(1)}\left(C_{ijkl}^{(2)}+\eta_{ijkl}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{pq} \tag{1.7}$$

将(1.6)，(1.7)两式相加，考虑到(1.3)的第一式得：

$$\left(C_{ijkl}^{(2)}+\eta_{ijkl}\frac{\partial}{\partial t}\right)e_{kl}=\sigma_{ij}+F_{klpq}^{(1)}\left(C_{ijkl}^{(2)}+\eta_{ijkl}\frac{\partial}{\partial t}\right)\sigma_{pq}$$

$$=\left[\delta_{ip}\delta_{jq}+F_{klpq}^{(1)}\left(C_{ijkl}^{(2)}+\eta_{ijkl}\frac{\partial}{\partial t}\right)\right]\sigma_{pq} \tag{1.8}$$

(1.8)式即所要求的“本构关系”.

其中δ_{ip}，δ_{jq}均为Kronecker deltas.

2. “本构关系”的积分和“折算弹性张量”

将(1.8)式从t_1到t_2积分可得本构积分关系：

$$C_{ijkl}^{(2)}\int_{t_1}^{t_2}e_{kl}(\tau)d\tau+\eta_{ijkl}[e_{kl}(t_2)-e_{kl}(t_1)]$$

$$=(\delta_{ip}\delta_{jq}+F_{klpq}^{(1)}\ C_{ijkl}^{(2)})\int_{t_1}^{t_2}\sigma_{pq}(\tau)d\tau+F_{klpq}^{(1)}\ \eta_{ijkl}[\sigma_{pq}(t_2)-\sigma_{pq}(t_1)] \tag{1.9}$$

$(t_1,\ t_2)$是有限元法计算的一段时间间隔，在这样的时间间隔$\Delta t=t_2-t_1$中仍存在应变-位移关系：

$$e_{kl}=u_{(k,l)}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l}+\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \tag{1.10}$$

Sandhu和Wilson在时间离散化中，在每一段时间间隔内假定变位u_i，应变e_{ij}和应力σ_{ij}都是时刻t的线性函数，在本文中仍沿用这个假定．今设

$$\left.\begin{aligned}\Delta e_{kl}&=e_{kl}(t_2)-e_{kl}(t_1)\\ \Delta\sigma_{pq}&=\sigma_{pq}(t_2)-\sigma_{pq}(t_1)\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

则有：

$$\left.\begin{aligned}e_{kl}(\tau)&=e_{kl}(t_1)+\frac{\Delta e_{kl}}{\Delta t}(\tau-t_1)\\ \sigma_{pq}(\tau)&=\sigma_{pq}(t_1)+\frac{\Delta\sigma_{pq}}{\Delta t}(\tau-t_1)\qquad(t_1\leqslant\tau\leqslant t_2)\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

将(1.11)、(1.12)代入(1.9)式得

$$\left[\frac{\Delta t}{2}\left(\delta_{ip}\delta_{jq}+F_{klpq}^{(1)}\ C_{ijkl}^{(2)}\right)+F_{klpq}^{(1)}\ \eta_{ijkl}\right]\Delta\sigma_{pq}$$

$$=\left(\frac{\Delta t}{2}C_{ijkl}^{(2)}+\eta_{ijkl}\right)\Delta e_{kl}-[(\delta_{ip}\delta_{jq}+F_{klpq}^{(1)}\ C_{ijkl}^{(2)})\sigma_{pq}(t_1)-C_{ijkl}^{(2)}e_{kl}(t_1)]\Delta t \tag{1.13}$$

t_1作为这段时间的初始时刻，$\sigma_{pq}(t_1)$和$e_{kl}(t_1)$都作为已知值，(1.13)式表示应力增量和应变增量的线性关系．从(1.13)式可以解出形如

$$\Delta\sigma_{ij}=C_{ijkl}^{r}\Delta e_{kl}+\sigma_{ij}^{r}\Delta t \tag{1.14}$$

的关系式，其中C_{ijkl}^{r}是“折算弹性张量”，σ_{ij}^{r}是折算的初始应力．这里C_{ijkl}^{r}在时间间隔Δt中是常数，所以Sandhu和Wilson所构成的公式仍可应用．注意本节所求的(1.13)式虽是近似关系，但是只要在Δt时间段中Δe_{kl}和$\Delta\sigma_{ij}$都能近似地看成线性变化，则(1.14)式是足够准确的．这正是Sandhu和Wilson建议方法所需要的．

3. 平面应变问题的“折算弹性模量”

以下具体写出平面应变问题的“折算弹性模量”．应力、应变及折算弹性刚度都写成矩阵形式．对各向同性问题采用两个弹性模量：体变弹性模量λ和剪切弹性模量ψ，如图1所示的三体模型，对于剪切有三个元件组成，G_1弹簧以及并联的G_2弹簧和η粘性元件．一般认为λ是常数，而ψ与时间有关，ψ可用算符形式写为[2]

$$\psi=\frac{G_1G_2+G_1\eta p}{(G_1+G_2)+\eta p} \tag{1.15}$$

这里：$p\equiv d/dt$

应力-应变关系可形式地写为：

$$\{\sigma\}=[D]\{e\}$$

这里：

$$\{\sigma\}=\begin{Bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{Bmatrix},\quad \{e\}=\begin{Bmatrix}e_x\\ e_y\\ \gamma_{xy}\end{Bmatrix},\quad [D]=\begin{bmatrix}\lambda+2\psi & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+2\psi & 0\\ 0 & 0 & \psi\end{bmatrix} \tag{1.16}$$

将(1.15)式代入(1.16)式，等式双方均乘以$(G_1+G_2)+\eta p$

得：$\left(G_1+G_2+\eta\frac{d}{dt}\right)\{\sigma\}$

$$=\begin{bmatrix}\lambda(G_1+G_2)+2G_1G_2+(\lambda+2G_1)\eta\frac{d}{dt} & \lambda(G_1+G_2)+\lambda\eta\frac{d}{dt} & 0\\ \lambda(G_1+G_2)+\lambda\eta\frac{d}{dt} & \lambda(G_1+G_2)+2G_1G_2+(\lambda+2G_1)\eta\frac{d}{dt} & 0\\ 0 & 0 & G_1G_2+G_1\eta\frac{d}{dt}\end{bmatrix}\{e\} \tag{1.17}$$

仿照前一小节，将(1.17)式从t_1到t_2积分，注意当$f(t)$在间隔(t_1,t_2)中呈线性变化时，有

$$\int_{t_1}^{t_2}\left(A+B\frac{d}{dt}\right)fdt=Af(t_1)\Delta t+\left(\frac{1}{2}A\Delta t+B\right)\Delta f \tag{1.18}$$

这里：A,B指常数，而$\Delta f=f(t_2)-f(t_1)$

经过简单计算可得

$$\{\Delta\sigma\}=\begin{bmatrix}\lambda+\dfrac{2G_1G_2+4G_1\eta/\Delta t}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t} & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+\dfrac{2G_1G_2+4G_1\eta/\Delta t}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{G_1G_2+2G_1\eta/\Delta t}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t}\end{bmatrix}\{\Delta e\}$$

$$-\frac{2(G_1+G_2)}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t}\{\sigma(t_1)\}$$

$$+\frac{2(G_1+G_2)}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t}\begin{bmatrix}\lambda+\dfrac{2G_1G_2}{G_1+G_2} & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+\dfrac{2G_1G_2}{G_1+G_2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{G_1G_2}{G_1+G_2}\end{bmatrix}\{e(t_1)\}$$

(1.19)

(1.19) 式可简写为如下形式：

$$\{\Delta\sigma\}=[D_{\Delta e}]\{\Delta e\}-D_\sigma\{\sigma\}+[D_e]\{e\} \tag{1.20}$$

这里：

$$[D_{\Delta e}]=\begin{bmatrix}\lambda+\dfrac{2G_1G_2+4G_1\eta/\Delta t}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t} & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+\dfrac{2G_1G_2+4G_1\eta/\Delta t}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{G_1G_2+2\eta/\Delta t}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t}\end{bmatrix} \tag{1.21a}$$

$$D_\sigma=\frac{2(G_1+G_2)}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t} \tag{1.21b}$$

$$[D_e]=\frac{2(G_1+G_2)}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t}\begin{bmatrix}\lambda+\dfrac{2G_1G_2}{G_1+G_2} & \lambda & 0\\ \lambda & \lambda+\dfrac{2G_1G_2}{G_1+G_2} & 0\\ 0 & 0 & \dfrac{G_1G_2}{G_1+G_2}\end{bmatrix} \tag{1.21c}$$

4. 一维问题的“折算弹性模量”

在一维情况有：$\sigma_x=(\lambda+2\psi)e_x$　　(1.22)

对应于(1.19)式有：

$$\Delta\sigma_x=\left(\lambda+\frac{2G_1G_2+4G_1\eta/\Delta t}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t}\right)\Delta e_x-\frac{2(G_1+G_2)}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t}\sigma_x(t_1)$$
$$+\frac{2(G_1+G_2)}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t}\left(\lambda+\frac{2G_1G_2}{G_1+G_2}\right)e_x(t_1) \tag{1.23}$$

对于以上的平面问题或一维问题来讲，当每次时间间隔Δt 为常数时，折算刚度矩阵$[D_{\Delta e}]$，D_σ和$[D_e]$可一次算好，供多次使用。

二、二维问题的刚度矩阵及基本联立方程

S.R.Sandhu和E.L.Wilson用变分原理建立了离散化的求解方法，见文献[1]的(31)、(32)式。殷宗泽等用虚位移方法[3]推导了相应的公式。本文用[1]的方法，并依据本文第一节所述的折算弹性模量，将位移增量$\{\Delta u\}$和孔隙水压力增量$\{\Delta\pi\}$作为独立变分量，建立泛函式如下：

$$\Omega(\Delta u,\Delta\pi)=\int_V\Big[\frac{1}{2}\{\bar{\sigma}\}^T*\{\Delta e\}+\frac{1}{2}\{\Delta\bar{\sigma}\}^T*\{e\}+\frac{1}{2}\{\Delta\bar{\sigma}\}^T*\{\Delta e\}$$

$$-\{\rho F\}^T*\{\Delta u\}+\pi*\Delta e_{\mathrm{vol}}+\Delta\pi*e_{\mathrm{vol}}+\Delta\pi*\Delta e_{\mathrm{vol}}-\frac{1}{2}g*\{q\}^T*\{\Delta\pi_{,i}\}$$

$$-\frac{1}{2}g*\{\Delta q\}^T*\{\Delta\pi_{,i}\}-\frac{1}{2}g*\{\Delta q\}^T*\{\pi_{,i}+\rho_w F\}\Big]dV$$

$$-\int_{S_1}\{\bar{T}\}^T*\{\Delta u\}\,dS+\int_{S_2}g*\bar{Q}*\Delta\pi dS \tag{2.1}$$

这里假定$\{F\}$，$\{\bar{T}\}$，$\{\bar{Q}\}$是常数矩阵，不随时间变化．应力、应变都看作独立变分量（变位）的函数．$\{\bar{\sigma}\}$表示有效应力矩阵，$\{\Delta\bar{\sigma}\}$表示其由t_{n-1}到t_n的时间间隔Δt上的增量部分．$\{e\}$表示土体的应变矩阵，同样$\{\Delta e\}$表示其增量部分．$\{u\}$与$\{\Delta u\}$表示位移与其增量的矩阵．ρ是土的总质量密度．ρ_w是孔隙水的质量密度．F是体积力．π是孔隙水压力．q是孔隙水的渗透速度，可以应用达西定律求得．如$q_x=k_{xx}(\pi_{,x}+\rho_w F_x)+k_{xy}(\pi_{,y}+\rho_w F_y)$，但其中渗透系数$k_{xy}$常认为是零．故实际只剩下前面一项．$g$是在运用Gurtin原理建立泛函式时采用的函数$g\equiv1$[4]．$\bar{T}$是在$S_1$上规定的边界力．$\bar{Q}$是垂直于表面$S_2$的规定孔隙水流量．$*$表示卷积符号．再用位移与孔隙水压力的结点值$\{u_i\}$与$\{\pi_i\}$来表示(2.1)式中的各项，有：

$$\left.\begin{array}{lll}
\text{单元位移} & \{u\}=[\phi_u]^T\{u_i\} & \text{及}\ \{\Delta u\}=[\phi_u]^T\{\Delta u_i\}\\
\text{单元应变} & \{e\}=[\phi_e]^T\{u_i\} & \text{及}\ \{\Delta e\}=[\phi_e]^T\{\Delta u_i\}\\
\text{孔隙水压力} & \pi=[\phi_\pi]^T\{\pi_i\} & \text{及}\ \Delta\pi=[\phi_\pi]^T\{\Delta\pi_i\}\\
\text{孔隙水压力坡降：} & \{\pi_{,i}\}=[\phi_q]^T\{\pi_i\} & \text{及}\ \{\Delta\pi_{,i}\}=[\phi_q]^T\{\Delta\pi_i\}\\
\text{单元体应变} & e_{\mathrm{vol}}=[\phi_\Delta]^T\{u_i\} & \text{及}\ \Delta e_{\mathrm{vol}}=[\phi_\Delta]^T\{\Delta u_i\}\\
\text{边界力} & \{\bar{T}\}=[\phi_u]^T\{\bar{T}_m\} & \\
\text{边界渗流量} & \{\bar{Q}\}=[\phi_\pi]^T\{\bar{Q}_m\} &
\end{array}\right\} \tag{2.2}$$

这里的$[\phi_u]$,$[\phi_e]$,$[\phi_\pi]$,$[\phi_q]$,$[\phi_\Delta]$是相应的插入函数矩阵．将这些式子代入(2.1)式中，并引用(1.19)式可得：

$$\Omega(\Delta u,\Delta\pi)=\sum_{m=1}^{M}\int_V\Big(\Big[\frac{1}{2}\{\bar{\sigma}(t_{n-1})\}^T*[\phi_e^m]^T-\frac{1}{2}D_\sigma\{\bar{\sigma}(t_{n-1})\}^T*\{\phi_e^m\}^T$$

$$+\frac{1}{2}\{e(t_{n-1})\}^T[D_e]^T*[\phi_e^m]^T-\{\rho F\}^T*[\phi_u^m]^T+\pi(t_{n-1})*[\phi_\Delta^m]^T\Big]\{\Delta u_i\}$$

$$+\{\Delta u_i\}^T\Big[\frac{1}{2}[\phi_e^m][D_{\Delta e}]^T*\{e(t_{n-1})\}\Big]$$

$$+\frac{1}{2}\{\Delta u_i\}^T[\phi_e^m][D_{\Delta e}]^T*[\phi_e^m]^T\{\Delta u_i\}+e_{\mathrm{vol}}*[\phi_\pi^m]^T\{\Delta\pi_i\}$$

$$+[\phi_\pi^m]^T\{\Delta\pi_i\}*[\phi_\Delta^m]^T\{\Delta u_i\}-\frac{1}{2}g*\{\pi_i(t_{n-1})\}^T[\phi_q^m][K]^T*[\phi_q^m]^T\{\Delta\pi_i\}$$

$$-\frac{1}{2}g*\{\Delta\pi_i\}^T[\phi_q^m][K]^T*[\phi_q^m]^T\{\Delta\pi_i\}$$

$$-\frac{1}{2}g*\{\Delta\pi_i\}^T[\phi_q^m][K]^T*[\phi_q^m]^T\{\pi_i(t_{n-1})\}$$

$$-g*\{\rho_w F\}^T[K]^T*[\phi_q^m]^T\{\Delta\pi_i\}\Big)dV$$

$$-\sum_{m=1}^{M}\int_{S_1}[\phi_u^m]^T[\phi_u^m]\{\bar{T}_m\}dS\{\Delta u_i\}+\sum_{m=1}^{M}\int_{S_2}g*[\phi_\pi^m]^T[\phi_\pi^m]\{\bar{Q}_m\}dS\{\Delta\pi_i\} \tag{2.3}$$

注意在 (2.3) 式中有些项对下一步求变分时不产生影响，为了书写方便起见在这里没有列出。将(2.3)式对$\{\Delta u_i\}$，$\{\Delta\pi_i\}$求一次变分，且令其结果为零得平衡方程如下：

$$\left.\begin{aligned}&[K]\{\Delta u_i\}+[C]^T\{\Delta\pi_i\}=-\{M_1(t_{n-1})\}-\{M_3(t_{n-1})\}\\&\qquad+\{M_4(t_{n-1})\}+\{M_2\}+\{P_1\}\\&[C]\{\Delta u_i\}-g*[\bar{K}]\{\Delta\pi_i\}=g*\{M_5\}-\{M_6(t_{n-1})\}+g*\{M_7(t_{n-1})\}-g*\{P_2\}\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

其中$\{\Delta u_i\}$，$\{\Delta\pi_i\}$在这里表示对所有单元进行集合而成的整体未知量列阵。

$$\left.\begin{aligned}&[K]=\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_e^m][D_{\Delta e}]^T[\phi_e^m]^TdV,\quad [C]=\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_\pi^m][\phi_\Delta^\pi]^TdV\\&[\bar{K}]=\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_q^m][K]^T[\phi_q^m]^TdV,\quad \{M_1\}=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_e^m]\{\sigma(t_{n-1})\}(1-D_\sigma)dV\\&\{M_2\}=\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_u^m]\{\rho F\}dV,\qquad \{M_3\}=\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_\Delta^m]\pi(t_{n-1})dV\\&\{M_4\}=\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_e^m]\left([D_e]+\frac{1}{2}[D_{\Delta e}]\right)\{e(t_{n-1})\}dV,\{P_1\}=\sum_{m=1}^{M}\int_{S_1}[\phi_u^m][\phi_u^m]^T\{\bar{T}_m\}dS\\&\{M_5\}=\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_q^m][K]\{\rho_w F\}dV,\quad \{M_6\}=\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_\pi^m]][\phi_\Delta^m]^T\{u(t_{n-1})\}dV\\&\{M_7\}=\sum_{m=1}^{M}\int_V[\phi_q^m][K][\phi_q^m]^T\{\pi_i(t_{n-1})\}dV,\{P_2\}=\sum_{m=1}^{M}\int_{S_2}[\phi_\pi^m]^T[\phi_\pi^m]\{\bar{Q}_m\}dS\end{aligned}\right\}$$

(2.5)

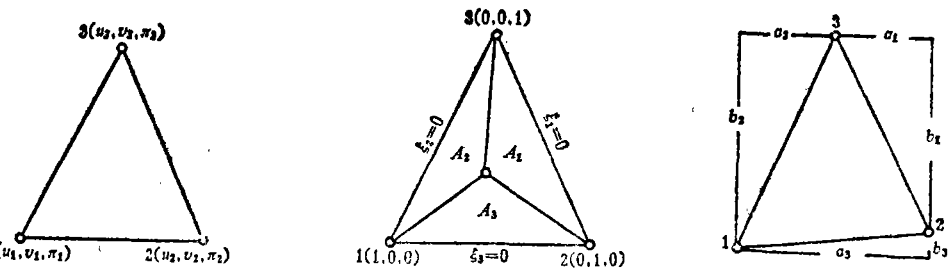
它们分别表示刚度矩阵，渗流矩阵及其间的相互矩阵以及初应力影响矩阵，体积力影响矩阵，初始孔隙水压力影响矩阵，初应变影响矩阵，边界力影响矩阵，体积力对渗流的影响矩阵，孔隙水压力的影响矩阵，孔隙水压力坡降对渗流的影响矩阵和边界渗流的影响矩阵。

然后再将(2.4)式对时间进行离散，并假定以上各量在时刻t_1与t_2之间呈线性变化，可得到最后的基本方程表达式如下：

$$\left.\begin{aligned}&[K]\{\Delta u_i\}+[C]^T\{\Delta\pi_i\}=-\{M_1(t_{n-1})\}+\{M_2\}-\{M_3(t_{n-1})\}+\{M_4(t_{n-1})\}\\&[C]\{\Delta u_i\}-[\bar{K}]\frac{\Delta t}{2}\{\Delta\pi_i\}=[\bar{K}]\{\pi(t_{n-1})\}\Delta t+\Delta t[\{M_5(t_{n-1})\}\\&\qquad+\frac{1}{2}\{\Delta M_5\}]-\{M_6(t_{n-1})\}+\Delta t[\{M_7(t_{n-1})\}+\frac{1}{2}\{\Delta M_7\}]\\&\qquad-\Delta t[\{P_2(t_{n-1})+\frac{1}{2}\{\Delta P_2\}]\end{aligned}\right\} \tag{2.6}$$

三、单元的选择及插值函数的计算

以下采用三角形单元，每个结点采用两个变位参数 u_i, v_i 和一个水压参数 π_i，如图2(a)



(a) 复合单元(变位,水压)　　(b) 三角形自然坐标 $\xi_i=A_i/A$; $\xi_1+\xi_2+\xi_3=1$　　(c) 单元尺寸 $2A=a_3b_3-a_2b_2$ $\sum_1^3 a_i=\sum_1^3 b_i=0$

图 2　三角形单元

三角形单元的自然坐标和单元尺寸见图2(b),(c).

单元结点的变位和孔隙水压列阵各为

$$\{u(t)\}=[u_1\ v_1\ u_2\ v_2\ u_3\ v_3]^T,\quad \{\pi(t)\}=[\pi_1\ \pi_2\ \pi_3]^T \tag{3.1}$$

利用图2(b)所示的自然坐标系可得插入矩阵$[\phi_u]^T$和$[\phi_\pi]^T$各为

$$[\phi_u]^T=\begin{bmatrix}\xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3 & 0\\ 0 & \xi_1 & 0 & \xi_2 & 0 & \xi_3\end{bmatrix},\quad [\phi_\pi]^T=[\xi_1\ \ \xi_2\ \ \xi_3] \tag{3.2}$$

由于在自然坐标中该坐标ξ_i对 x,y 求偏导数存在着关系：

$$\xi_{i,x}=b_i/2A,\qquad \xi_{i,y}=a_i/2A \tag{3.3}$$

a_i, b_i的意义见图2(c)。具体用结点坐标写出是

$$\left.\begin{aligned}&\xi_{1,x}=(y_2-y_3)/2A,\quad \xi_{2,x}=(y_3-y_1)/2A,\quad \xi_{3,x}=(y_1-y_2)/2A\\ &\xi_{1,y}=(x_3-x_2)/2A,\quad \xi_{2,y}=(x_1-x_3)/2A,\quad \xi_{3,y}=(x_2-x_1)/2A\end{aligned}\right\} \tag{3.4}$$

根据应变-变位关系 $e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$ 或采用矩阵形式(1.16)可得应变的插入函数为：

$$[\phi_e]^T=\begin{bmatrix}\xi_{1,x} & 0 & \xi_{2,x} & 0 & \xi_{3,x} & 0\\ 0 & \xi_{1,y} & 0 & \xi_{2,y} & 0 & \xi_{3,y}\\ \xi_{1,y} & \xi_{1,x} & \xi_{2,y} & \xi_{2,x} & \xi_{3,y} & \xi_{3,x}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0\\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & a_3\\ a_1 & b_1 & a_2 & b_2 & a_3 & b_3\end{bmatrix} \tag{3.5}$$

根据以上各式以及(1.21a)式，参考[1]可得单元m的应力。应变张量的刚度矩阵是

$$[K^m]=A[\phi_e^m][D_{\Delta e}][\phi_e^m]^T$$

$$
=\frac{1}{4A}\begin{bmatrix}
b_1^2(\lambda+2G_r)+a_1^2G_r & a_1b_1(\lambda+G_r) & b_1b_2(\lambda+2G_r)+a_1a_2G_r & b_1a_2\lambda+b_2a_1G_r & b_1b_3(\lambda+2G_r)+a_1a_3G_r & b_1a_3\lambda+b_3a_1G_r \\
 & a_1^2(\lambda+2G_r)+b_1^2G_r & b_1a_2\lambda+a_2b_1G_r & a_1a_2(\lambda+2G_r)+b_1b_2G_r & b_3a_1\lambda+a_3b_1G_r & a_1a_3(\lambda+2G_r)+b_1b_3G_r \\
 & & b_2^2(\lambda+2G_r)+a_2^2G_r & b_2a_2(\lambda+G_r) & b_2b_3(\lambda+2G_r)+a_2a_3G_r & b_2a_3\lambda+a_2b_3G_r \\
 & \text{对} & & a_2^2(\lambda+2G_r)+b_2^2G_r & b_3a_2\lambda+a_3b_2G_r & a_2a_3(\lambda+2G_r)+b_2b_3G_r \\
 & & \text{称} & & b_3^2(\lambda+2G_r)+a_3^2G_r & b_3a_3(\lambda+G_r) \\
 & & & & & a_3^2(\lambda+2G_r)+b_3^2G_r
\end{bmatrix} \tag{3.6}
$$

其中 $G_r=\dfrac{G_1G_2+2G_1\eta/\Delta t}{(G_1+G_2)+2\eta/\Delta t}$ (3.7)

渗透系数一般在二个方向上取得相同．因此有

$$[k]=k\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix} \tag{3.8}$$

其中k是渗透系数．再由水力坡降矩阵：

$$\begin{bmatrix}\partial\pi/\partial x\\ \partial\pi/\partial y\end{bmatrix}=\frac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\pi_1\\ \pi_2\\ \pi_3\end{bmatrix}$$

可得： $[\phi_q]^T=\dfrac{1}{2A}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}$ (3.9)

又

$$[\bar{K}]=\frac{k}{4A}\begin{bmatrix}b_1 & a_1\\ b_2 & a_2\\ b_3 & a_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}b_1 & b_2 & b_3\\ a_1 & a_2 & a_3\end{bmatrix}=\frac{k}{4A}\begin{bmatrix}b_1^2+a_1^2 & b_1b_2+a_1a_2 & b_1b_3+a_1a_3\\ \text{对} & b_2^2+a_2^2 & b_2b_3+a_2a_3\\ & \text{称} & b_3^2+a_3^2\end{bmatrix} \tag{3.10}$$

再计算单元体应变：$\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{1}{2A}[b_1\ a_1\ b_2\ a_2\ b_3\ a_3]\{u_i\}$

可得 $\{\phi_\Delta\}^T=\dfrac{1}{2A}[b_1\ a_1\ b_2\ a_2\ b_3\ a_3]$ (3.11)

再由

$$[C]=\int_V[\phi_\pi][\phi_\Delta]^T dV=\frac{1}{3!}\begin{bmatrix} b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \\ b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & b_3 & a_3 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

四、具体解题步骤

在具体解题时可参照下列步骤进行

1. 将平面问题划分成一系列三角形单元。

2. 按照(3.2)、(3.5)、(3.6)、(3.9)、(3.10)、(3.11)、(3.12)式分别计算 $[\phi_u^m]^T$，$[\phi_e^m]^T$，$[\phi_\pi^m]^T$，$[\phi_q^m]^T$，$[\phi_\Delta^m]^T$，$[K^m]$，$[C^m]$，$[\bar{K}^m]$。

3. 由边界条件计算结点值$\{\bar{T}_m\}$及$\{\bar{Q}_m\}$。

4. 在第一次求解时，可与Wilson提出的办法一样，在(2.6)式中令$\Delta t=0$来求解$\Delta\pi_i$与$\Delta u_i=0$，并将其作为初始值使相应之应力、应变均取零值，这表示初始时荷载全由孔隙水来承担.

5. 选定合适的Δt以后即可按(2.5)式求得$\{M_1\}$，$\{M_2\}$，$\{M_3\}$，$\{M_4\}$，$\{M_5\}$，$\{M_6\}$，$\{M_7\}$及$\{P_1\}$，$\{P_2\}$。

6. 解方程组(2.6)式，并将求得的u_n，π_n值代入插值公式，再重新求出(2.5)式中的各个矩阵式子.

7. 反复步骤6可求得任意时刻的u与π，即得到了沉降曲线。

参 考 文 献

[1] Sandhu, R. S. and Edward L. Wilson, Finite element analysis of seepage in elastic media, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 95, EM3 (1969), 641-652.

[2] 金问鲁、吴淦卿，土木工程学报，15，2(1982).

[3] 殷宗泽，《土工原理与计算》(上册)，水利出版社(1979)，225.

[4] Gurtin, M. E., Variational principles for linear elastodynamics, *Archiv. for Rational Mechanics and Analysis*, 16(1964), 34-50.

Finite Element Analysis of Seepage in Viscoelastic Media

Jin Wen-lu Wu Gan-qing

(Architecture Designing Institute of Hangzhou, Hangzhou)

Abstract

R. S. Sandhu and E. L. Wilson presented "Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media"[1], by which complex problems in engineering can be solved. In this paper, it is extended to the case of viscoelastic media. If the soil skeleton is regarded as the viscoelastic media, the stress-strain relation will be changed with time, which increases the complexity of the problems. By making use of finite-element method to solve such problems, the linear stress-strain increment relation is considered in every preselective interval of time. The linear proportional constants here is called "equivalent elastic tensor". On the basis of the equivalent elastic tensor, this paper deduces the formulation to solve problems in viscoelastic media.