

# 横观各向同性材料的剪切模量

张建平\*

(美国怀俄明大学土木工程系, 1982年9月9日收到)

## 摘 要

本文提出了一个决定横观各向同性材料的独立剪切模量的新的简单方法. 给出了数学公式和推导及其解, 也提出了测定仪器及其测定结果. 本法曾用 Green 河岩层的油页岩试验过, 这种油页岩就是横观各向同性材料. 本文结果也和其它近似结果并和声学试验法的结果比较过. 本文也用已知剪切模量的材料来校核本文的测定方法.

## 一、引 论 及 理 论

具有一个对称轴的各向异性材料称为横观各向同性材料<sup>[1]</sup>. 在地面上分布最广的可能就是这种材料. 它们包括很多复合材料即分层材料和地壳中大量的水成岩. 在水成岩中, 每层很薄, 其厚度甚至只有 0.025 毫米, 即 0.001 英寸 (图1). 在人造的复合材料中, 层厚一般要厚得很多. 从力学和化学上看, 每层都是各向同性的; 但其性质则各层之间都不相同. 宏观上看, 分层比较均匀的总体的材料特性可以用弹性常数  $E_1$ ,  $E_3$ ,  $\nu_{12}$ ,  $\nu_{31}$  和  $G_{13}$  来表示; 其中轴1和轴2都是各向同性轴, 轴3为对称轴;  $G_{13}$  = 1-3坐标面上的剪切模量. 为了完全确定横观各向同性材料的特性, 我们必须决定这五个常数.

一般讲来, 这些材料都是超弹性<sup>[4]</sup>的, 也是非线性的<sup>[2,3]</sup>. 所以, 用声学方法<sup>[5]</sup>是难以测定这五个非线性弹性常数的. 力学上讲, 从单轴试验, 求得杨氏模量和泊桑比是很简单的. 对正交各向异性材料而言, 我们共有九个独立弹性常数. Witt 等<sup>[6]</sup>和蔡 (Tsai)<sup>[7]</sup>曾设计用方板的扭变试验方法测定这些正交各向异性材料的剪切模量. 横观各向同性材料可以看作是正交各向异性材料的受有限制的子属. 不过, 对横观各向同性材料而言, 各层之间的变化通常比较明显 (图1). 因此, 垂直于层片平面的试件尺寸  $b$  应该比平行于层片的试件尺寸  $a$  小, 见图2. 这就是说, 用矩形板试件比用方板试件更为适宜.

按习惯符号<sup>[2,3]</sup>, 设  $x_1, x_2, x_3$  为原点在板中面上中心点的右手卡氏坐标 (图2), 而  $x_2, x_3$  为板面内的坐标. 于是  $x_1$  和  $x_2$  轴处于层面内, 而  $x_3$  轴则垂直于层面. 并设  $u, v, w$  各为  $x_1, x_2, x_3$  轴方向的位移. 对各向异性材料而言:

$$\{\varepsilon\} = [C]\{\tau\} \quad (1.1)$$

其中  $\{\varepsilon\}$  和  $\{\tau\}$  分别是应变张量和应力张量, 而  $[C]$  为柔度矩阵, 它是广义虎克定律中刚度矩阵的逆矩阵. 对于平板的解而言, 用了简化标号系统<sup>[8]</sup>以后, 在 2, 3 轴内, 方程 (1.1) 可以化

\* 本刊特邀编委, 美国怀俄明大学土木工程系教授.

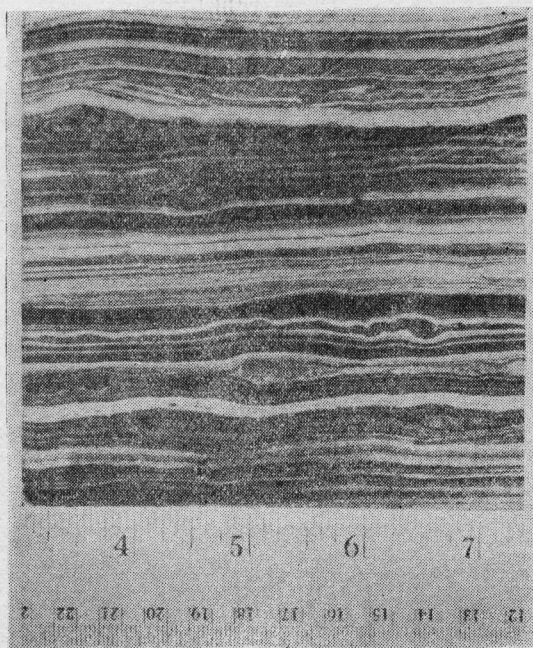


图1 水成岩的典型截面形状

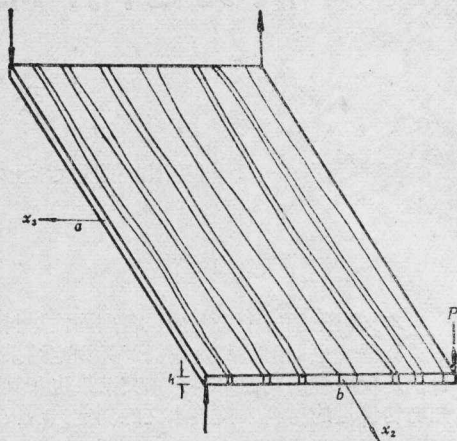


图2 试样板和它的层面分布

为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{22} & C_{23} & C_{26} \\ C_{32} & C_{33} & C_{36} \\ C_{62} & C_{63} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tau_2 \\ \tau_3 \\ \tau_6 \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

对于板的纯弯和纯扭而言

$$v = -x_1 \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad (1.3)$$

$$w = -x_1 \frac{\partial u}{\partial x_3} \quad (1.4)$$

于是, 有

$$\varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial x_2} = -x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = C_{22}\tau_2 + C_{23}\tau_3 + C_{26}\tau_6 \quad (1.5)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial x_3} = -x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = C_{32}\tau_2 + C_{33}\tau_3 + C_{36}\tau_6 \quad (1.6)$$

$$\varepsilon_6 = \frac{\partial v}{\partial x_3} + \frac{\partial w}{\partial x_2} = -2x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} = C_{62}\tau_2 + C_{63}\tau_3 + C_{66}\tau_6 \quad (1.7)$$

剪切应变 $\varepsilon_6$ 是 $\varepsilon_{23}$ 的两倍<sup>[8]</sup>.

设 $\sigma_2, \sigma_3, \sigma_6$ 为平板表面上的应力分量. 于是(1.5), (1.6), (1.7)诸式在 $x_1 = h/2$ 上的值为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{2}{h} (C_{22}\sigma_2 + C_{23}\sigma_3 + C_{26}\sigma_6) \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -\frac{2}{h} (C_{32}\sigma_2 + C_{33}\sigma_3 + C_{36}\sigma_6) \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{1}{h} (C_{62}\sigma_2 + C_{63}\sigma_3 + C_{66}\sigma_6) \quad (1.10)$$

对横观各向同性材料<sup>[2,3,8]</sup>而言:

$$C_{62} = C_{63} = C_{26} = C_{36} = 0 \quad (1.11)$$

于是, (1.8)至(1.10)诸式化为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = -\frac{2}{h} (C_{22}\sigma_2 + C_{23}\sigma_3) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = -\frac{2}{h} (C_{32}\sigma_2 + C_{33}\sigma_3) \quad (1.13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3} = -\frac{1}{h} (C_{66}\sigma_6) \quad (1.14)$$

对于纯扭的板而言, 弯矩 $M_2$ 和 $M_3$ 都是常量, 因此, 应力 $\sigma_2, \sigma_3$ 都不是 $x_2$ 和 $x_3$ 的函数<sup>[7,9]</sup>.

把(1.12)至(1.14)诸式积分, 得

$$u(h/2, x_2, x_3) = -\frac{\sigma_2}{h} (C_{22}x_2^2 + C_{32}x_3^2) - \frac{\sigma_3}{h} (C_{23}x_2^2 + C_{33}x_3^2) - \frac{\sigma_6}{h} C_{66}x_2x_3 + C'_1x_2 + C'_2x_3 + C'_3 \quad (1.15)$$

其中 $C'_1, C'_2, C'_3$ 都是积分常量. 在板的角点上, 弯矩 $M_2$ 和 $M_3$ 都是零, 其实由于 $M_2$ 和 $M_3$ 是均匀的, 因此, 它们在板内各点上都是零<sup>[7,9]</sup>, 而且

$$M_2 = bh^2\sigma_2/6 = 0 \quad (1.16)$$

$$M_3 = ah^2\sigma_3/6 = 0 \quad (1.17)$$

由此, 得

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad (1.18)$$

这是在板角和板内各点都适用的. 于是(1.15)式化为

$$u = -\frac{\sigma_6}{h} C_{66}x_2x_3 + C'_1x_2 + C'_2x_3 + C'_3 \quad (1.19)$$

有下列边界条件适用:

$$u = 0 \quad \text{对 } x_2 = +a/2 \text{ 和 } x_3 = +b/2 \quad (1.20)$$

$$u = 0 \quad \text{对 } x_2 = -a/2 \text{ 和 } x_3 = -b/2 \quad (1.21)$$

$$u = 0 \quad \text{对 } x_2 = -a/2 \text{ 和 } x_3 = +b/2 \quad (1.22)$$

在采用了上述条件后, (1.19)式变成

$$u = -\frac{\sigma_6}{h} C_{66} \left( x_2x_3 - \frac{bx_2}{2} + \frac{ax_3}{2} - \frac{ab}{4} \right) \quad (1.23)$$

在载荷 $P$ 上 (图2)

$$x_2 = a/2, \quad x_3 = -b/2; \quad u = u_P \quad (1.24)$$

位移 $u_P$ 是可以由实验测得的. 因此, 我们将假定它是已知的. 把(1.24)式代入(1.23)式, 解出 $C_{66}$ :

$$C_{66} = \frac{h}{ab} \cdot \frac{u_P}{\sigma_6} \quad (1.25)$$

应力 $\sigma_6$ 可以用参考文献[1]的表达式表示如下:

$$\sigma_6 = \frac{6M_6}{h^2} \quad (1.26)$$

中其, 根据Kirchhoff的板的理论<sup>[8]</sup>

$$M_6 = P/2 \quad (1.27)$$

把(1.26), (1.27)两式代入(1.25)式, 给出:

$$C_{66} = \frac{h^3 u_P}{3Pab} \quad (1.28)$$

剪切模量  $G_{23}$  在横观各向同性材料中和  $G_{13}$  相等, 它们是  $C_{66}$  的倒数, 于是

$$G_{23} = G_{13} = \frac{1}{C_{66}} = \frac{3Pab}{h^3 u_P} \quad (1.29)$$

油页岩的典型载荷位移曲线 ( $P$  对  $u_P$  的曲线)

见图3. 一般说来, 这条曲线是非线性的. 在这种情况下, 用一个数值代表剪切模量  $G_{13}$  或  $G_{23}$  便失掉意义. 不过, 人们只要把  $G_{13}$  看作是和载

荷(应力)相关的, 则仍能采用关系式  $\epsilon_6 = \frac{\tau_6}{G}$

[参考(1.7), (1.11), (1.29) 诸式]. 在非线性的

情况下,  $G_{13}$  可以表示为各种载荷(应力)

水平下的分段线性函数<sup>[2,3]</sup>.

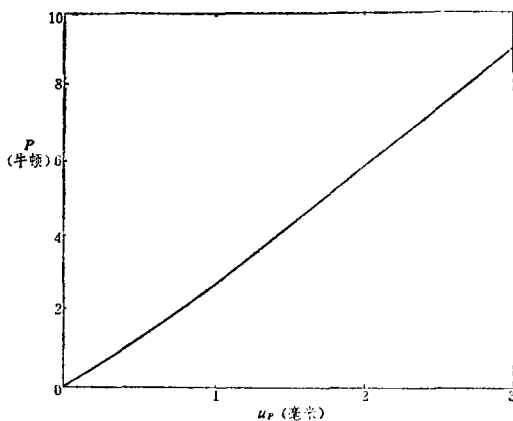


图3 犹他州油页岩的典型载荷 ( $P$ ) 挠度 ( $u_P$ ) 曲线

## 二、实 验

按通常的办法, 试件是用嵌金刚石的锯条锯成需要的尺寸的. 但锯条的冲击常常在材料内引起扰动, 从而导致出现发线状裂纹. 由于这些摩擦裂纹是外界因素引起的, 不代表测试材料的本性, 所以这样的试件是不能用的. 为了克服这种力求避免的裂纹产生, 我们用特制的线锯(图4).

2008型线锯是激光技术有限公司设计的, 它用嵌金刚石的线作为切割工具. 线直径为0.25毫米(0.01英寸), 它的拉伸强度很高, 高到超过3450MN/m<sup>2</sup>(500,000psi). 线锯能光滑地切割, 精密度达0.0254毫米(1/1000英寸). 因为锯线中的拉力是调整锯的至关重要的独一无二的因素, 我们用特制的平衡重量系统来替代通常的弹簧加载系统. 这种线锯的特色是线锯对试样只施加很小很小的力. 这个力一般都小于2.23牛顿(0.5磅). 为了在切割中保持试样的冷却, 我们在线锯上安装了一种洒水系统. 洒出的水一方面当作润滑油; 一方面还带走了锯末. 为了操作方便, 线锯上还安装了一个自控板. 当线锯在正常操作时, 它是切割岩石这样的试件而又不损害其表面的最快最好的工具.

本实验所需要的矩形板试件(图2)就是用这种嵌金刚石的线锯制成的<sup>[2,3]</sup>. 板的厚度方向是在1-3平面上切割出来的(图2和5). 矩形板的两个对角点向上支撑, 第三支撑角点向下支承, 第四角点上向下加载, 这样使它产生纯扭变形(图2). 载荷点的位移( $u_P$ )和载荷  $P$  是由  $x-y$  曲线仪自动记录绘制的.

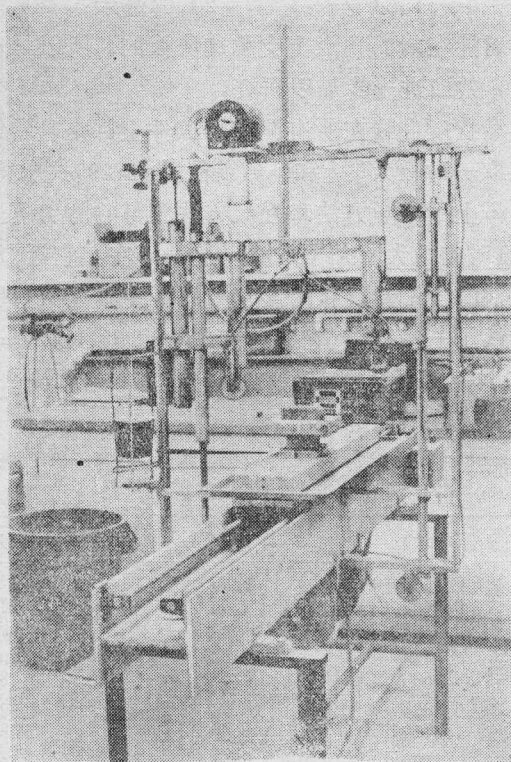


图4 用线锯制备板型试件

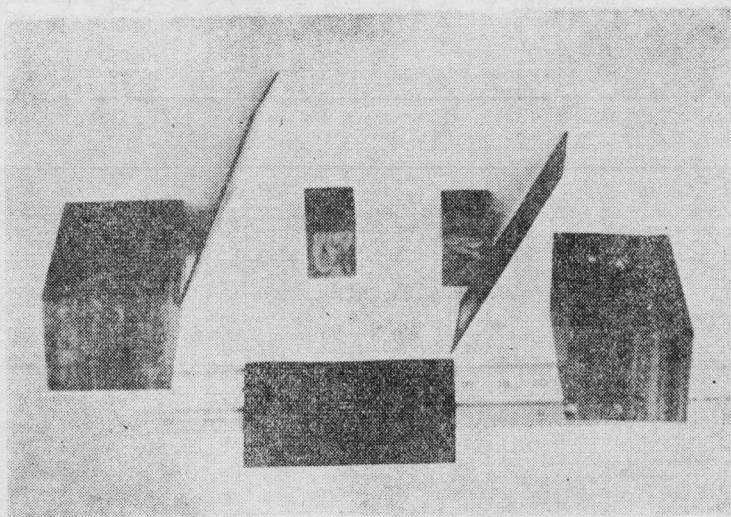


图5 从同一水平面上切割的板和其它试件

### 三、结 果

每次测定至少用三个相似的试件，从中取两个最接近的记录的平均值作为测试结果。如果三个相似试件的测试数据相差在10%以内，则取三个数据的平均值作为测试结果。表1总结列出了从美国犹他州Bonanza附近取出的岩芯中赤褐色部份的不同深度油页岩试样的测试结果。载荷和支承点之间的距离为

$$a=51.31\text{毫米}, \quad b=29.64\text{毫米}$$

从物理上看, 我们不可能在板的角点上支承这块板的, 所以, 试样板的总尺寸通常应该大于 $a$ 和 $b$ 。我们计划对边界效应进一步加以研究。

对于小挠度而言, 载荷挠度曲线在所有测试的试件上都是非常线性的(图3), 因此我们只要在测得的曲线上一次取一对最大的 $P$ 和 $u_P$ 值就能从(1.29)式求得 $G_{13}$ 。把它和从地质相似的科罗拉多州油页岩<sup>[10,11,21]</sup>上用声学方法和近似方法测得的剪切模量相比, 其量级是相同的。这里也观察到,  $G_{13}$ 值对应力大小并不敏感, 这一点在其它近似方法测得的也相同<sup>[21]</sup>。我们正在计划测定表1中试件的含油量, 和用其它方法测定其近似剪切模量<sup>[21]</sup>。

为了校核, 我们又测试了一些钢板(它的剪切模量已知约为87GPa), 其测得的结果见表2, 其数据很接近87GPa, 这就表示对线性弹性材料而言, 这种测试方法是可靠的。我们正在进一步研究大挠度和非常非线性材料的情况。

表1 犹他州油页岩的剪切模量

深度(英尺)	$h$ (毫米)	$P$ (牛顿)	$u_P$ (毫米)	$G_{13}$ (GPa)
453.8	0.9576	1.50	0.54	14.4
	0.9423	1.50	0.57	14.3
	0.9754	1.35	0.50	13.3
475.4	1.0414	0.86	0.30	11.7
	0.9500	0.58	0.28	11.0
480.5	0.8636	0.92	0.59	11.0
	1.0719	1.76	0.58	11.2
514.1	0.7366	0.52	0.81	7.3
	0.9500	0.82	0.82	5.3
542.8	1.0160	1.24	0.86	6.3
	1.0475	1.16	0.65	7.1
456.5	0.5740	0.10	0.35	5.9
	1.0058	0.20	0.12	6.2

表2 钢的剪切模量

试样号码	$h$ (毫米)	$a$ (毫米)	$b$ (毫米)	$P$ (牛顿)	$u_P$ (毫米)	剪切模量(GPa)	
						本法	从手册
1	0.635	26.99	50.8	3.5	0.64	88.5	87
2	0.635	26.99	50.8	5.0	0.90	89.7	87

## 四、结 论

本文叙述了单独测定横观各向同性材料的剪切模量的一个方法。相似试件的测量数据很接近, 测得数据和已知的剪切模量可以相互校核, 都指出这个测量方法是富有重现性和可靠性的。

**致谢** 作者向怀俄明大学的 Donald F. Adams 教授致谢, 是他导致作者对蔡<sup>[7]</sup>氏文章的注意。还有, 顾问 John Ward Smith 博士, 科学家 David E. Walrath 先生, 以及学生 J. L. Chen, K. Uenishi, J. P. Turner, E. S. Borgman 等对本工作的帮助, 作者也深致谢意。



## 参 考 文 献

- [ 1 ] Lekhnitskii, S. G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, translated by P. Fern, edited by J. J. Brandstatter, Holden-Day, Inc., San., Francisco, CA (1963).
- [ 2 ] Chong, K. P., K. L. Costello and J. W. Smith, Three Dimensional Characterization of the Mechanical Properties of Green River Formation Oil Shale of Wyoming's Tipton Member, Society for Experimental Stress Analysis Spring Meeting, San Francisco, CA (1979), Paper No. CR-6, 20.
- [ 3 ] Chong, K. P., K. Uenishi, J. W. Smith and A. C. Munari, Nonlinear three-dimensional mechanical characterization of oil shale, *Int. J. Rock Mech. and Mining Sci.*, Pergamon Press, London, 17, (1980), 339-347.
- [ 4 ] Eringen, A. C., *Nonlinear Theory of Continuous Media*, McGraw-Hill, (1962).
- [ 5 ] Schreiber, E., L. A. Orson and N. Soga, *Elastic Constants and Their Measurement*, McGraw-Hill, (1973).
- [ 6 ] Witt, R. K., W. H. Hoppmann II and R. S. Buxbaum, Determination of elastic constants of orthotropic materials with special reference to laminates, *ASTM Bulletin*, (1953), 53-57.
- [ 7 ] Tsai, S.W., Experimental determination of the elastic behavior of orthotropic plates, *Journal for Engineering for Industry*, ASME, (1965), 315-318.
- [ 8 ] Boresi, A. P., and P. P. Lynn, *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice-Hill, (1974).
- [ 9 ] Timoshenko, S. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, 2nd Ed., McGraw-Hill, (1959).
- [ 10 ] Morris, C. E., *Elastic Constants of Oil Shale, Explosively Produced Fracture of Oil Shale*, Compiled by W. J. Carter, LA-7164-PR, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, NM, (1978).
- [ 11 ] Podio, A. L., A. R. Gregory, and K. E. Gray, Dynamic properties of dry and water-saturated green river shale under stress, *Soc. of Petroleum Engineers J.*, (1968). 389-404.

## Shear Modulus of Transversely Isotropic Materials

K. P. Chong

*(Civil Engineering Department, University of Wyoming, U. S. A.)*

### Abstract

A new and simple method is presented to determine the independent shear modulus of transversely isotropic material. Mathematical formulation, derivation and solution are given, as well as test apparatus and results are presented. The method was tested on one of such materials—Green River Formation oil shale. Comparison with other approximate results and acoustical methods are made. Confirmation of the test method with materials having known shear moduli is also presented.