应用数学和力学，第4卷第3期（1983年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

泥沙的群体沉降速度

蔡树棠

（中国科技大学近代力学系，1981年5月20日收到）

摘　要

本文讨论了在浓度很高时候，泥沙的群体沉降速度．作者认为所谓泥沙的群体沉降速度问题从物理本质来说并不是真正的沉降速度问题，而是水在泥沙和水所组成的胶团形成的多孔介质中的渗流问题，也就是水流经这种多孔介质所形成的问题．作者根据这样的认识，写出了泥沙群体沉降速度的数学表达式，并且和黄委会水科所测量得到的实验数据进行了比较．比较的结果是令人满意的．

一、前　言

一般做泥沙沉降实验的人都观察到这样一个事实，即含沙浓度在达到某一个浓度值以后，所有泥沙不论粒径大小都以同一速度下沉，而不再具有分选的作用．这个共同的速度即所谓群体的沉降速度．当实际上做沉速实验的时候，在浓度由稀逐渐增加的过程中，一开始是所有粒径的泥沙处于完全分选的状态，以后在浓度加到某一个值的时候，就出现浑液面．出现浑液面时候的浓度是和泥沙的特性有关的，其中包括粒径级配等性质在内．这时候细的泥沙已经开始形成胶团一起沉降，而较粗的泥沙则还没有完全进入胶团之内，所以对于较粗的泥沙仍有部份的分选作用．当浓度再增加的时候就产生所有泥沙一起沉降的现象．这时不同粒径的泥沙颗粒都合在一起形成胶体集团，集团和集团之间，彼此互相接触，它们中间存在着一定的孔隙，就像通常的多孔介质那样．水就在这种多孔介质中作渗流流动．本文的目的就是讨论最后一种情形的流动状态，即所谓群体沉降运动．这样的渗流型群体沉降模式，从流体流动的角度来看是属于流体在固壁中运动一类的内问题，它只有在泥沙浓度很大时候才能成立．它和稀浓度时候，水绕泥沙颗粒流动所属于的流体在固壁以外运动的外问题是有本质上区别的．所以从渗流模式的群体沉降问题得到的结果是不能向外延伸到稀浓度范围中去的．换句话说，我们从泥沙群体沉降模式得到的群体沉降速度的表达式不能外插到s_v趋于零的情形．对s_v趋于零的情形应该用其他模式来进行处理才行．在这里还必须强调一点，本文所讨论的是均匀沉降的情形，即孔隙率不变的定常运动的情形，它和孔隙率在不断改变的，非定常的压密过程是不同的．

二、群体沉降速度公式的推导

按照上面所说的图案，我们取随胶团一起运动的运动坐标系．这样泥沙胶团在水中沉降

的图案，就变成了水在多孔介质中作渗透运动的图案。而泥沙的群体沉降速度也就转变成多孔介质中水的渗流速度。在渗流理论里，对一维均匀渗流象图1中所画的那样，有大家所熟知的达尔西定律[1]

$$W=k\frac{\Delta H}{\Delta L} \tag{2.1}$$

式中W就是渗流速度，ΔH为上下的水头差，ΔL为多孔介质的厚度。k为渗流系数。水头H为

$$H=z+\frac{p}{\rho g} \tag{2.2}$$

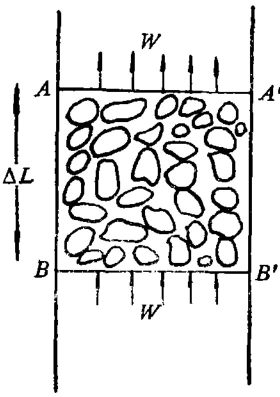

图 1

式中z为高程，p为压强，ρ为纯水的密度，g为重力加速度。在高浓度含泥沙的浑水没有整体流动的时候，泥沙作静水沉降运动，B、A两点上的水头分别为

$$H_B=z_B+\frac{p_B}{\rho g}, \qquad H_A=z_A+\frac{p_A}{\rho g}$$

A、B两点之间的高程差为

$$z_A-z_B=\Delta L$$

而在BB'面上的压强，则按流体的静压强公式为

$$p_B=p_A+\rho_e g(z_A-z_B) \tag{2.3}$$

式中ρ_e为浑水的密度。而ρ_e的表达式为

$$\rho_e=\rho(1-s_v)+\rho_s s_v=\rho+(\rho_s-\rho)s_v \tag{2.4}$$

式中ρ_s为泥沙密度，s_v为浑水的体积含沙量。所以

$$\Delta H=H_B-H_A=z_B-z_A+\frac{p_B-p_A}{\rho g}=-(z_A-z_B)+\frac{\rho_e g}{\rho g}(z_A-z_B)$$

$$=(z_A-z_B)\left(\frac{\rho_e}{\rho}-1\right)=(z_A-z_B)\frac{(\rho_s-\rho)}{\rho}s_v=\Delta L\frac{(\rho_s-\rho)}{\rho}s_v$$

把ΔH代入达尔西定律，就得到渗流速度W的表达式为

$$W=k\frac{\rho_s-\rho}{\rho}s_v \tag{2.5}$$

现在我们来分析渗流系数k的量纲表达式。我们想像水在多孔介质中的渗流运动有些像水在直径极细的管子中的流动，W对应于其平均流速。因为渗流速度是很小的量，所以雷诺数很小。因此在定常运动时候，我们可以略去整个加速度项。于是我们有水的运动方程式

$$-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\mu_0\nabla^2 V_i=0$$

式中p为压强，μ_0为动力粘性系数，V_i为水流速度。如果p用压力水头H代入，上式就变成

$$-\rho g\frac{\partial H}{\partial x_i}+\mu_0\nabla^2 V_i=0$$

利用量纲分析考虑

$$W\sim\frac{\rho g a^2}{\mu_0}\frac{\Delta H}{\Delta L}$$

式中 a 就是圆管的半径. 对照实际的渗透流动, 我们就可以看出渗流系数的量纲表达式为 k 与 $\frac{\rho g a^2}{\mu_0}$ 成正比. 即

$$k \sim \frac{\rho g a^2}{\mu_0}$$

或

$$k = b' \frac{\rho g a^2}{\mu_0} \tag{2.6}$$

式中 a 为多孔介质孔隙的线尺度, b' 为比例系数.

我们进一步引入一个极为粗糙的模型. 假设泥沙颗粒组成胶团, 再由胶团组成多孔介质. 设每个胶团的体积为 v_2, 其中泥沙所占的体积为 v_0[2]. 则单位体积中胶团的数目为 n

$$n = \frac{s_v}{v_0} \tag{2.7}$$

胶团的半径 r 可由胶团的体积求出

$$\frac{4}{3}\pi r^3 = v_2 \tag{2.8}$$

则有

$$r = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} v_2} \tag{2.9}$$

我们令

$$v_2 = C v_0 \tag{2.10}$$

式中 C 为比例系数. v_0, v_2, C, r 都和胶团的性质、水中离子的性质、以及温度等因素有关. 于是

$$r = \sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}\; v_0^{\frac{1}{3}} \tag{2.11}$$

另一方面两个胶团之间的平均距离等于

$$n^{-\frac{1}{3}} = v_0^{\frac{1}{3}} / s_v^{\frac{1}{3}} \tag{2.12}$$

这样就得到胶团之间孔隙的线尺度 a

$$a \sim n^{-\frac{1}{3}} - D\sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}\; v_0^{\frac{1}{3}}$$

式中 D 为和胶团性质、水中离子的性质、以及温度等因素有关系的系数. 把 $n^{-\frac{1}{3}}$ 用 $v_0^{\frac{1}{3}}/s_v^{\frac{1}{3}}$ 代入, 就有

$$a \sim v_0^{\frac{1}{3}}\left(1/s_v^{\frac{1}{3}} - D\sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}\right) \tag{2.13}$$

把 a 的量纲表达式 (2.13) 代入 k 的表达式 (2.6), 就得到

$$k \sim \frac{\rho g}{\mu_0} v_0^{\frac{2}{3}}\left(1/s_v^{\frac{1}{3}} - D\sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}\right)^2 \tag{2.14}$$

把 k 代入渗流速度 W 的关系式(2.5), 就得到

$$W = b\frac{\rho g}{\mu_0} v_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{1}{s_v^{\frac{1}{3}}} - D\sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}\right)^2\left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\right)s_v$$

式中 b 为和胶团性质、水中离子的性质、以及温度等因素有关系的另一个比例系数。把上式化简以后，就得到

$$W=\frac{bg}{\mu_0}(\rho_s-\rho)v_0^{\frac{2}{3}}\left(1-D\sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}s_v^{\frac{1}{3}}\right)^2 s_v^{\frac{1}{3}} \tag{2.15}$$

我们把这个公式和较粗颗泥沙在带有极细泥沙的浑水中的沉降速度的公式

$$W^*=\frac{1}{18\mu_e}d^2(\rho_s-\rho_e)g=\frac{1}{18}\frac{d^2}{\mu_0}(\rho_s-\rho)g\frac{(1-s_v)}{1+2.5s_v} \tag{2.16}$$

相比较。我们可以看到几个物理因子除 $v_0^{\frac{2}{3}}$ 和 d^2 不相同以外，其他的物理因素都是相同的。但是在对 s_v 的关系上，则相差比较大。因为 $s_v^{\frac{1}{3}}$ 远比 s_v 来得大，所以(2.15)式随 s_v 增大而减小远比(2.16)式来得快。从这里也可以说明沉速比值 $\frac{W}{W_0}$ 在浓度增加时减小得远比 $(1-s_v)$ 来得快。而且当它和 $(1-s_v)^n$ 相比较时候，n 并非常数。很明显现在(2.15)式中的 $v_0^{\frac{2}{3}}$ 已不再是某一泥沙粒径的平方，而是胶团线尺度的平方。它和胶团性质，水中离子的性质，以及温度等因素有关系。它是所有泥沙颗粒共同的性质。我们设泥沙浓度很稀的时候的静水沉速为 W_0

$$W_0=\frac{1}{18}\frac{d_{50}^2}{\mu_0}(\rho_s-\rho)g \tag{2.17}$$

于是

$$\frac{W}{W_0}=18b\frac{v_0^{\frac{2}{3}}}{d_{50}^2}\left(1-D\sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}s_v^{\frac{1}{3}}\right)^2 s_v^{\frac{1}{3}} \tag{2.18}$$

化简以后，就得到

$$\left(\frac{W}{W_0}s_v^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=(18b)^{\frac{1}{2}}\frac{v_0^{\frac{1}{3}}}{d_{50}}-(18b)^{\frac{1}{2}}D\sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}\frac{v_0^{\frac{1}{3}}}{d_{50}}s_v^{\frac{1}{3}} \tag{2.19}$$

或

$$\left(\frac{W}{W_0}s_v^{-\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=A-Bs_v^{\frac{1}{3}} \tag{2.19}$$

式中

$$A=(18b)^{\frac{1}{2}}\frac{v_0^{\frac{1}{3}}}{d_{50}}\qquad B=(18b)^{\frac{1}{2}}D\sqrt[3]{\frac{3C}{4\pi}}\frac{v_0^{\frac{1}{3}}}{d_{50}}$$

式中 A 和 B 都是和胶团性质、水中离子的性质、泥沙的级配以及温度等因素有关系的系数。

三、理论结果和实验数据的比较

把(2.19)式和黄委会水科所有关群体沉降的实验数据进行比较，结果见图2。从图上可以看到，实验数据是和理论曲线符合得很好的。

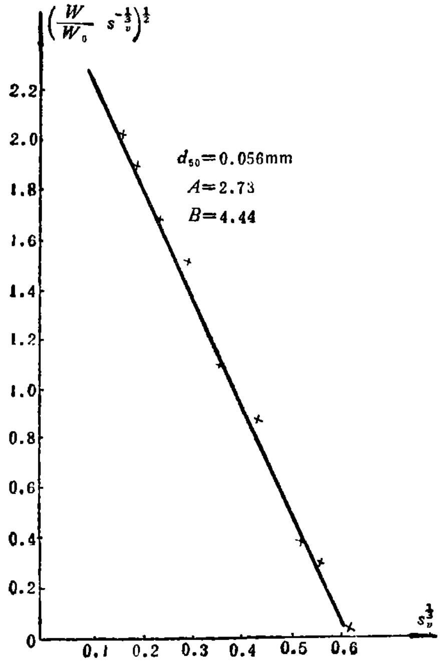

图 2(a)

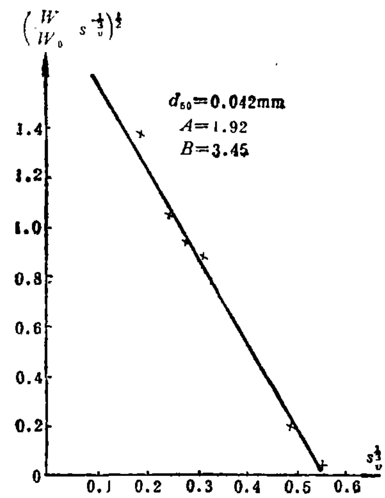

图 2(b)

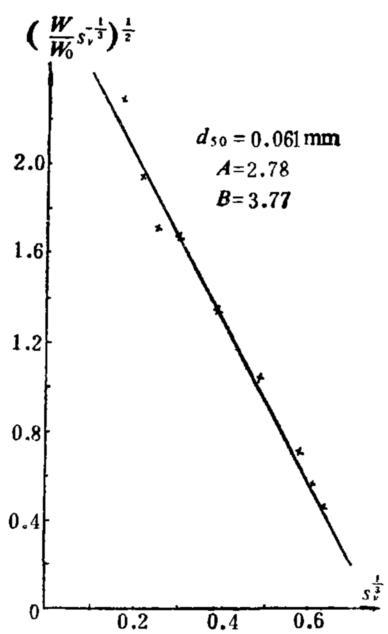

图 2(c)

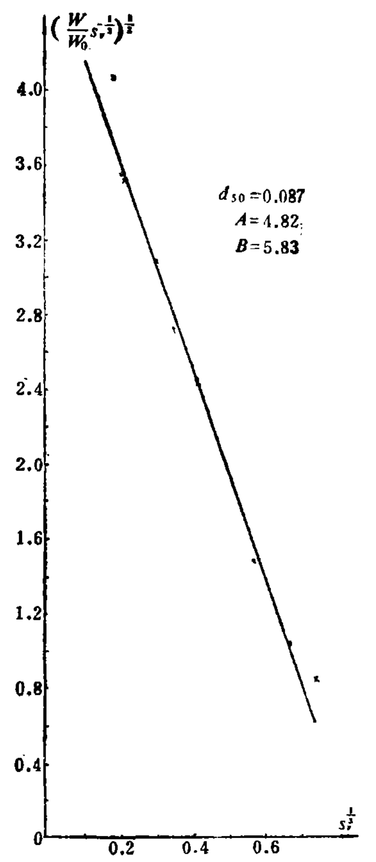

图 2(d)

参 考 文 献

[1] 考夫曼, W., 《工程流体力学》, 1957年12月第1版, 科学技术出版社, 265--266.
[2] 蔡树棠, 科学通报, 26. 2(1981, 1), 89—92.

The Velocity of the Collective Motion of Sedimentation of Sand and Clay

Tsai Shu-tang
(The Department of Modern Mechanics of the University of Science and Technology of China, Hefei)

Abstract

In this article, we shall discuss the velocity of the collective motion of sedimentation, when the concentration of clay particles is very high. We believe that the problem of the so-called velocity of the collective motion of edimentation is not a real problem of sedimentation in physical nature, but it is a problem of filtration in the porous medium which is composed of the colloidal clusters. That is to say those clusters consist of water and clay particles. It is a problem of the water passing through the porous medium. Based upon this consideration, we put down the mathematical expression of the velocity of the collective motion of sedimentation. In comparing with the theoretical curves with the experimental data of the Institute of Hydraulic Research of the Yellow River Conservancy Commission, we get congruous results.