

论三维非线性断裂动力学中的 的路径无关积分*

陆美子**

(山东矿业学院, 1982年9月15日收到)

摘 要

本文讨论三维非线性断裂动力学中的路径无关积分, 它是文[4]关于二维情况结果的拓充. 在研究三维非线性固体中埋藏裂纹或表面裂纹的动力传播问题中, 这种拓充是必要的. 固体介质是非线性弹性的或弹塑性的情况均被加以考虑, 并作出了相应的向量型路径无关积分. 解释了这种路径无关积分的力学意义, 它被证明联系于动力裂纹扩展力, 因而, 它们可用于构造非线性断裂动力学中的断裂准则.

一、引 言

1968年, J. R. Rice^[1]提出了二维非线性弹性断裂静力学中的著名路径无关积分 J . 从此, 利用 J 积分作为一种非线性断裂准则取得了很大成功. 我们有

$$J = \int_{\Gamma} W dy - \bar{T} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dS \quad (1.1)$$

其中

$$W = \int \sigma_{ij} de_{ij} \quad (1.2)$$

是应变能密度, Γ 是环绕裂纹顶端的积分路径 (图 1), \bar{T} 是 Γ 上的面力向量. J 积分的最重要特性是它的路径无关性, 这就使它能视为一种物理参数. 由于 J 积分路径无关性的证明是基于塑性形变理论之上的, 这就使它不能应用于裂纹传播问题, 其中卸载就在裂纹顶端附近发生^[2,3].

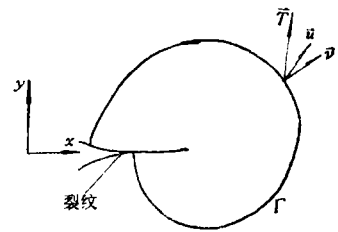


图 1

最近, 欧阳曾教授^[4]提出了非线性断裂动力学中的若干路径无关积分 Y , 但它们均是二维情况下的结果.

本文中我们考虑三维非线性断裂动力学中的路径无关积分. 当我们研究三维非线性固体介质中埋藏裂纹或表面裂纹的动力传播时, 就需要考虑将文[4]的创造性工作加以拓充, 以供应用. 我们考虑了非线性弹性介质和弹塑性介质的情况, 并提出了相应的向量型路径无关积分. 为了解释所得积分的力学含义, 研究了具有钝前缘的

* 欧阳曾推荐.

** 本文完成于作者访问美国德克萨斯大学计算力学研究所 (TICOM) 期间.

平面裂纹，证明这种积分与动力裂纹扩展力相联系。因此，它们可以作为三维非线性断裂动力学中的一种断裂准则。

二、非线性弹性介质中的裂纹传播

首先，我们研究非线性弹性介质的情况。如图2所示，设三维固体中有一平面裂纹 Π 。对于动力问题，我们有下面的连续方程和运动方程：

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + X_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \right) = 0 \tag{2.2}$$

这里 σ_{ij} 是应力张量， X_i 是单位体积的体力，且设它们与 x, y 无关。 ρ 是密度， x_i 是笛卡尔直角坐标， t 是时间。

设 S 是环绕裂纹某段前缘的曲面（图2），我们可得到下面的

定理1 向量型积分

$$\begin{aligned} \bar{Y}_1 = & \int_{t_0}^{t_1} \int_S ((W - X_i u_i - K) \bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i) dS dt \\ & + \int_V \rho v_i \bar{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} \end{aligned} \tag{2.3}$$

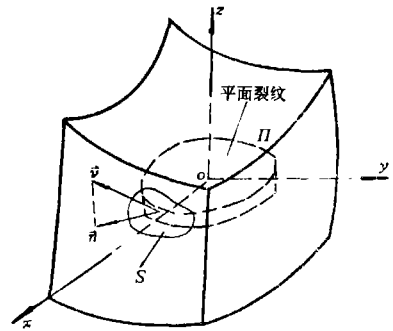


图 2 三维物体中的平面裂纹

对任何环绕裂纹某段边缘的曲面 S 和时间 $t_1 > t_0 \geq 0$ 来说是路径无关的。这里 \bar{n} 是 S 的外法向在 x, y 面上的投影（图3），而 $\bar{\nabla}$ 是算子 $i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y}$ 。应变能密度

$$W = \int \sigma_{ij} de_{ij} \tag{2.4}$$

e_{ij} 是应变张量，动能密度

$$K = \frac{1}{2} \rho v_i v_i \tag{2.5}$$

$v_i = \frac{\partial u_i}{\partial t}$ 是速度，区域 V 是 S 和裂纹面包围的区域，（图2）。

证明 作为第一步，考虑一个封闭曲面 S ，其内部不包含裂纹前缘（图4）。我们有

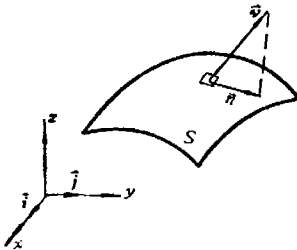


图 3 向量 \bar{n}

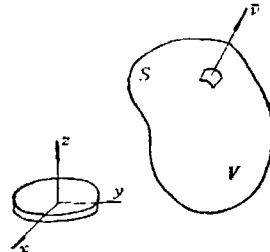


图 4

$$\begin{aligned} \int_S T_i \tilde{\nabla} u_i dS &= \int_S \sigma_{ij} v_j \tilde{\nabla} u_i dS = \int_V \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ij} \tilde{\nabla} u_i) dV \\ &= \int_V \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \tilde{\nabla} u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \tilde{\nabla} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \end{aligned} \quad (2.6)$$

利用(1.2)及应变-位移关系

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.7)$$

从(2.6)得到

$$\begin{aligned} \int_S T_i \tilde{\nabla} u_i dS &= \int_V \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - X_i \right) \tilde{\nabla} u_i dV + \int_V \sigma_{ij} \tilde{\nabla} e_{ij} dV \\ &= \int_V \left(\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - X_i \right) \tilde{\nabla} u_i dV + \int_V \tilde{\nabla} W dV \\ &= \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tilde{\nabla} u_i dV + \int_S (W - X_i u_i) \tilde{n} dS \end{aligned}$$

因此有

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_S \left((W - X_i u_i) \tilde{n} - T_i \tilde{\nabla} u_i \right) dS dt = - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tilde{\nabla} u_i dV dt \quad (2.8)$$

并且,

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tilde{\nabla} u_i dV dt = \int_V \int_{t_0}^{t_1} \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \tilde{\nabla} u_i dt dV \\ &= \int_V \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \tilde{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_V dV \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial u_i}{\partial t} \left(\rho \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\nabla} u_i + \frac{\partial \rho}{\partial t} \tilde{\nabla} u_i \right) dt \end{aligned} \quad (2.9)$$

从连续方程, 我们有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \right)$$

因此, 在(2.9)式的括号中, 项 $\frac{\partial \rho}{\partial t} \tilde{\nabla} u_i$ 相对于其中另一项来说, 是一高阶小量, 因而可以略去。

这样, 我们就得到

$$\begin{aligned} L &= \int_V \rho v_i \tilde{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho v_i \tilde{\nabla} v_i dV dt = \int_V \rho v_i \tilde{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_V \tilde{\nabla} \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV \right) dt = \int_V \rho v_i \tilde{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_S K \tilde{n} dS dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

以(2.9), (2.10)代入(2.8), 便得到下面的式子:

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_S \left((W - K) \tilde{n} - T_i \tilde{\nabla} u_i \right) dS dt + \int_V \rho v_i \tilde{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \quad (2.11)$$

假若有二个不同的曲面 S_1, S_2 环绕裂纹的某段前缘, 如图5所示, 则我们取 $S = S_1 + II^+ + S_2^- + II^-$, 这里 II^+, II^- 表示在 S_1, S_2 间的上、下裂纹面, S_2^- 表示将 S_2 的外法向逆转所得的曲面。由(2.11), 有

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_S ((W-K)\bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i) dS dt + \int_{V_0} \rho v_i \bar{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} = 0$$

这里 V_0 是 S_1, S_2 之间的区域。由于在 Π^+, Π^- 上有 $\bar{n}=0, T_i=0$, 又 $V_1=V_2+V_0$, 从以上方程可得

$$\int_{t_0}^{t_1} \int_{S_1} ((W-K)\bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i) dS dt + \int_{V_1} \rho v_i \bar{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S_2} ((W-K)\bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i) dS dt + \int_{V_2} \rho v_i \bar{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (2.12)$$

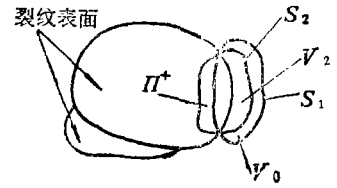


图 5

Q.E.D.

在某些情况下, 选取随时间 t 变化的曲面 S 是较为方便的。例如, 当我们研究裂纹的定常传播时, 最好选取 S 与裂纹前缘一道运动。在这种情况下, 有 $S=S(t)$, 且成立着下面的定理。

定理2 积分

$$\bar{Y}_2 = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S(t)} ((W + \overline{\rho a_i - X_i \cdot u_i}) \bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i) dS dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{V(t)} \rho u_i \bar{\nabla} a_i dV dt \quad (2.13)$$

或简单地

$$\bar{Y}_3 = \int_{S(t)} ((W + \overline{\rho a_i - X_i \cdot u_i}) \bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i) dS - \int_{V(t)} \rho u_i \bar{\nabla} a_i dV \quad (2.14)$$

对任意环绕裂纹某段前缘的曲面和 $t_1 > t_0 \geq 0$ 是路径无关的, 其中 a_i 是加速度 $\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ 。

证明 这里只须从下面的等式开始:

$$\int_S T_i \bar{\nabla} u_i dS = \int_S (W - X_i u_i) \bar{n} dS + \int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \bar{\nabla} u_i dV \quad (2.15)$$

最后一项可重写为

$$\int_V \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \bar{\nabla} u_i dV = \int_V \rho a_i \bar{\nabla} u_i dV = \int_S \rho a_i u_i \bar{n} dS - \int_V \rho u_i \bar{\nabla} a_i dV \quad (2.16)$$

于是, 以 (2.16) 代入 (2.15), 得

$$\int_S ((W + \overline{\rho a_i - X_i \cdot u_i}) \bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i) dS - \int_V \rho u_i \bar{\nabla} a_i dV = 0 \quad (2.17)$$

从 (2.17), 容易证明 \bar{Y}_2 或 \bar{Y}_3 的路径无关性。

三、弹塑性介质中的裂纹传播

在塑性范围内, σ_{ij} 和 ϵ_{ij} 之间没有一一对应的关系, 故应变能密度 W 将失去明确的含义, 假如应力历史不给定的话。为了避免这一困难, 考虑另外的积分

$$\bar{Y}_4 = \int_{t_0}^{t_1} \int_S ((W_0 - K - X_i u_i) \bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i) dS dt$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_p} \sigma_{ij} \tilde{\nabla} e_{ij}^p dV + \int_V \rho v_i \tilde{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} \quad (3.1)$$

这里 W_e 是弹性应变能密度:

$$W_e = \int \sigma_{ij} d e_{ij}^e$$

对 Prandtl-Reuss 材料, 有

$$W_e = \frac{1}{2} (\sigma_{xx} e_{xx}^e + \sigma_{yy} e_{yy}^e + \sigma_{xy} (2e_{xy}^e)) \quad (3.3)$$

V_p 是 S 内的塑性区 (图6).

对弹塑性情况的裂纹传播, 我们提出下面的

定理 3 对任何环绕裂纹的某段前缘的曲面 S 和 $t_1 > t_0 \geq 0$, 积分 \tilde{Y} 是路径无关的.

证明 对于内部不含有裂纹前缘的封闭曲面 S , 我们有

$$\begin{aligned} L_e &= \int_S (W_e \tilde{n} - T_i \tilde{\nabla} u_i) dS \\ &= \int_V (\tilde{\nabla} W_e - \sigma_{ij} \tilde{\nabla} e_{ij}) dV - \int_V (\rho a_i - X_i) \tilde{\nabla} u_i dV \\ &= \int_V (\sigma_{ij} \tilde{\nabla} e_{ij}^e - \sigma_{ij} \tilde{\nabla} e_{ij}) dV - \int_V (\rho a_i - X_i) \tilde{\nabla} u_i dV \\ &= - \int_{V_p} \sigma_{ij} \tilde{\nabla} e_{ij}^p dV - \int_V (\rho a_i - X_i) \tilde{\nabla} u_i dV \end{aligned}$$

利用等式 (2.10):

$$L = \int_V \rho v_i \tilde{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \int_S K \tilde{n} dS dt$$

得

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} \int_S ((W_e - K - X_i u_i) \tilde{n} - T_i \tilde{\nabla} u_i) dS dt \\ + \int_{t_0}^{t_1} \int_{V_p} \sigma_{ij} \tilde{\nabla} e_{ij}^p dV dt + \int_V \rho v_i \tilde{\nabla} u_i dV \Big|_{t_0}^{t_1} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

对于环绕裂纹某段前缘的二个不同的曲面 S_1, S_2 , 构作 $S = S_1 + \Pi^+ + S_2^- + \Pi^-$, 则从 (3.4) 容易看出 (3.1) 是路径无关的.

对于一个运动的曲面 $S(t)$, 容易证明下面的

定理 4 积分

$$\tilde{Y}_6 = \int_{t_0}^{t_1} \int_{S(t)} ((W_e + \overline{\rho a_i - X_i u_i^e}) \tilde{n} - T_i \tilde{\nabla} u_i^e) dS dt - \int_{t_0}^{t_1} \int_V \rho u_i^e \tilde{\nabla} a_i dV dt \quad (3.5)$$

或简单地

$$\tilde{Y}_6 = \int_{S(t)} ((W_e + \overline{\rho a_i - X_i u_i^e}) \tilde{n} - T_i \tilde{\nabla} u_i^e) dS - \int_{V(t)} \rho u_i^e \tilde{\nabla} a_i dV \quad (3.6)$$

对任何环绕裂纹某段前缘的曲面 $S(t)$ 和 $t_1 > t_0 \geq 0$ 是路径无关的. 这里 V 是 $S(t)$ 和裂纹面包围的体积, u_i^e 是弹性位移.

四、定常的裂纹传播

不失一般性, 设裂纹前缘某处场的传播速度为 ci , 且选取以这一速度运动的新坐标系 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, 则从 t, x, y, z 到 $\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 的转换是

$$\bar{x} = x - ct \quad c: \text{常数}, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad \bar{t} = t \quad (4.1)$$

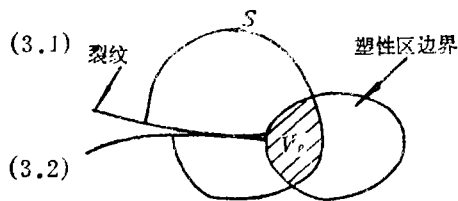


图6 塑性区 V_p

我们有

$$u_i(x, y, z, t) = u_i(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{t}) \quad (4.2)$$

和

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \frac{\partial \bar{x}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \bar{x}}, & \frac{\partial}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial \bar{y}} \\ \frac{\partial}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, & \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial \bar{t}} - c \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

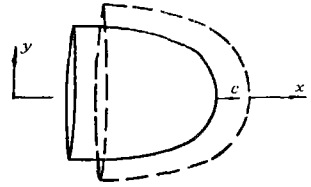


图 7

因此, 可得

$$\left. \begin{aligned} v_i &= \frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial \bar{t}} - c \frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}} \\ a_i &= \frac{\partial v_i}{\partial t} = \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{t}^2} - 2c \frac{\partial}{\partial \bar{x}} \left(\frac{\partial u_i}{\partial \bar{t}} \right) + c^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2} \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

对于定常的裂纹运动, 有

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = 0 \quad (4.5)$$

因此, 从(4.4)得

$$v_i = -c \frac{\partial u_i}{\partial \bar{x}}, \quad a_i = c^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2} \quad (4.6)$$

这样, 我们考虑 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ 系中的一个不变路径 \bar{S} , 从定理 2, 对于非线性弹性情况:

$$\bar{Y}_7 = \bar{Y}_8 = \int_{\bar{S}} \left((W + c^2 \rho u_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2} - X_i u_i) \bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i \right) d\bar{S} - \int_V c^2 \rho u_i \bar{\nabla} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2} d\bar{V} \quad (4.7)$$

对于不同的 \bar{S} 是路径无关的; 或对于弹塑性情况: 积分

$$\bar{Y}_8 = \bar{Y}_8 = \int_{\bar{S}} \left((W_e + \rho c^2 \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2} - X_i \cdot u_i^e) \bar{n} - T_i \bar{\nabla} u_i \right) d\bar{S} - \int_V \rho c^2 u_i^e \bar{\nabla} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \bar{x}^2} d\bar{V} \quad (4.8)$$

五、Y积分和动力裂纹扩展力

如图 8 所示, 考虑一个平面缺口, 在物体边界 S_T 上给定了面力 T_i . 假设缺口沿着 A 处 x, y 面内的外法向 \bar{n}_0 扩展一个小距离 Δa (图 8), 让我们来分析扩展过程中, 内外力作的功.

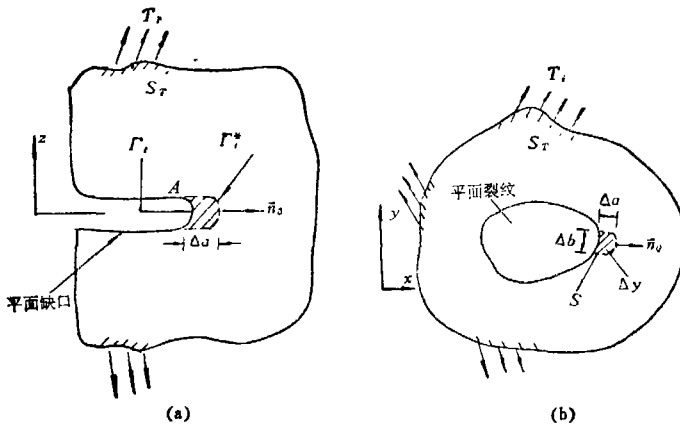


图 8 动力裂纹扩展力

面力功为

$$\Delta A_T = \int_{S_r} T_i \Delta u_i dS$$

其中 Δu_i 是裂纹扩展中的位移增量。体力之功由两部分构成：

a) 在裂纹扩展中释放的，阴影区 ΔV 上之功：

$$\Delta A_{B_1} = - \int_{\Delta V} (X_i - \rho a_i) u_i^0 dV$$

b) 在区域 $V - \Delta V$ 上之功，它等于：

$$\Delta A_{B_2} = \int_{V - \Delta V} (X_i - \rho a_i) \Delta u_i dV$$

内力功也由两部分构成：

a) 在区域 ΔV 上之功。它等于裂纹扩展中释放的弹性应变能：

$$\Delta A' = - \int_{\Delta V} W_e dV$$

b) 另一部分为 $V - \Delta V$ 上之功：

$$\Delta A'' = \int_{V - \Delta V} \sigma_{ij} \Delta e_{ij} dV$$

Δe_{ij} 是裂纹扩展中的应变增量。

于是， A 处的裂纹扩展力由下式决定：

$$\tilde{G} \Delta b \Delta a = \Delta A_T + \Delta A_{B_1} + \Delta A_{B_2} - (\Delta A' + \Delta A''),$$

故

$$\begin{aligned} \tilde{G} \Delta b &= \int_{S_r} T_i \frac{\Delta u_i}{\Delta a} dS + \int_V (X_i - \rho a_i) \frac{\Delta u_i}{\Delta a} dV - \int_V \sigma_{ij} \frac{\Delta e_{ij}}{\Delta a} dV \\ &\quad + \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Delta V} W_e dV - \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta a} \int_{\Delta V} (X_i - \rho a_i) u_i^0 dV \\ &= \int_S (W_e - (X_i - \rho a_i) u_i^0) \nu_n dS \end{aligned}$$

当 $\Delta b \ll 1$ 时，得

$$\tilde{G} \Delta b \approx \int_S (W_e - (X_i - \rho a_i) u_i^0) \nu_{n_0} dS \quad (5.1)$$

从 (3.6)，我们看到：当 $\Delta b \ll 1$ 时，

$$\vec{Y}_e \cdot \vec{n}_0 = \int_S (W_e - (X_i - \rho a_i) u_i^0) \nu_{n_0} dS \quad (5.2)$$

于是，有

$$\tilde{G} \Delta b = \vec{Y}_e \cdot \vec{n}_0 \quad (5.3)$$

这一式子 (5.3) 将 V 积分与动力裂纹扩展力联系起来。

从 (5.1)，当 $\Delta b \rightarrow 0$ 时，可得

$$G = \int_{\Gamma_r} (W_e - (X_i - \rho a_i) u_i^0) \nu_{n_0} dS / \Delta b = \int_{\Gamma_r} (W_e - (X_i - \rho a_i) u_i^0) dz \quad (5.4)$$

这里，曲线 Γ_r 如图 7(a) 中所示。

当着缺口的宽度趋于零时，我们得到

$$G \Delta b = \vec{Y}_e \cdot \vec{n}_0 \quad (5.5)$$

这意味着：沿着裂纹前缘的平均值 $\bar{Y}_e \cdot \bar{n}_0 / \Delta b$ 给出三维的动力裂纹扩展力。因此， Y 积分也可作为三维非线性断裂动力学中断裂准则的基础。

参 考 文 献

- [1] Rice, J. R., *J. A. M.*, 35, 2 (1968).
- [2] Ouyang Chang, *Int'l J. Eng. Sci.*, 18, 2 (1980).
- [3] Ouyang Chang, TICOM Report, UT Austin, U. S. A., (1981).
- [4] 欧阳轲, 非线性断裂动力学中的路径无关积分和断裂准则, *应用数学和力学*, 3, 3 (1982), 297—305.

On Path-Independent Integrals in 3-Dimensional Nonlinear Fracture Dynamics

Lu Mei-zi

(Shandong Mining College Shandong)

Abstract

This paper deals with the path-independent integrals in nonlinear 3-dimensional fracture dynamics. It is an extension of [4] for 2-dimensional case. Both the nonlinear elastic and elastic-plastic case are considered, and related path-independent integrals are worked out. Then a relation between this integral and dynamical crack extension force is established, and the physical meaning of such integrals becomes clear. Thus, fracture criterion in nonlinear fracture dynamics may be formed on the basis of these integrals.