应用数学和力学，第4卷第2期（1983年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

高阶拉氏乘子法和弹性理论中更一般的广义变分原理

钱　伟　长

（清华大学，1982年9月12日收到）

摘　要

作者曾指出[1]，弹性理论的最小位能原理和最小余能原理都是有约束条件限制下的变分原理．采用拉格朗日乘子法，我们可以把这些约束条件乘上待定的拉氏乘子，计入有关变分原理的泛函内，从而将这些有约束条件的极值变分原理，化为无条件的驻值变分原理．如果把这些待定拉氏乘子和原来的变量都看作是独立变量而进行变分，则从有关泛函的驻值条件就可以求得这些拉氏乘子用原有物理变量表示的表达式．把这些表达式代入待定的拉氏乘子中，即可求所谓广义变分原理的驻值变分泛函．

但是某些情况下，待定的拉氏乘子在变分中证明恒等于零．这是一种临界的变分状态．在这种临界状态中，我们无法用待定拉氏乘子法把变分约束条件吸收入泛函，从而解除这个约束条件．从最小余能原理出发，利用待定拉氏乘子法，企图把应力应变关系这个约束条件吸收入有关泛函时，就发生这种临界状态．用拉氏乘子法，从余能原理只能导出 Hellinger-Reissner 变分原理[2],[3]，这个原理中只有应力和位移两类独立变量，而应力应变关系则仍是变分约束条件，人们利用这个条件，从变分求得的应力中求应变．所以 Hellinger-Reissner 变分原理仍是一种有条件的变分原理．

普通的拉氏乘子法，只考虑变分条件的线性项．当这个线性项的拉氏系数等于零时，这个条件就没法吸收入泛函之中．为此，我们推广拉氏乘子法，不仅考虑变分条件的线性项，而且也考虑变分条件的二次项．我们称这种拉氏乘子法为高次拉氏乘子法．在用了这种高次拉氏乘子法后，不仅从 Hellinger-Reissner 原理的基础上，找到比现有一切广义变分原理更加一般的广义变分原理．在特殊的情况，这个更一般的广义变分原理，可以还原为各种现已知道的弹性理论广义变分原理．同样，我们也可以从胡海昌-鹫津久一郎变分原理[4,5]中，用高次拉氏乘子法，求得比该原理更一般的广义变分原理．

我们也讨论了上述两种更一般的广义变分原理的等价定理，以及有关的等价条件．

一、弹性理论小位移问题的数学形式

一个弹性体，在其体积V内受体积力$\bar{F}_i(i=1,2,3)$的作用，在其外力已知的边界S_σ上受已知边界外力$\bar{p}_i$的作用，在其位移已知边界S_u上，边界位移已知为$\bar{u}_i$．在静力平衡时，表明这个弹性体的应变状态的应力σ_{ij}，应变e_{ij}和位移u_i必满足下列五个条件，即

（1）静力平衡方程

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{1.1}$$

其中$\sigma_{ij,j}$代表$\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$，$j$为哑标．

(2) 应力应变关系

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}e_{kl} \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{1.2a}$$

或

$$e_{ij}=b_{ijkl}\sigma_{kl} \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{1.2b}$$

其中 a_{ijkl} 和 b_{ijkl} 分别为弹性常数和柔性常数.

（3） 应变位移关系

$$e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{1.3}$$

（4） 位移已知的边界条件

$$u_i=\bar{u}_i \qquad \text{在}S_u\text{上} \tag{1.4}$$

（5） 外力已知的边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i \qquad \text{在}S_\sigma\text{上} \tag{1.5}$$

其中S_u为位移已知的边界面，S_σ为外力已知的边界面，设总边界面为S，则

$$S=S_u+S_\sigma \tag{1.6}$$

人们就从(1.1)、(1.2)、(1.3)的15个式中，在(1.4)、(1.5)的边界条件下求解V中的σ_{ij}，e_{ij}，u_i。

二、变分极值原理和变分条件

弹性理论小位移静力问题的有条件的极值变分原理有下列两种：

（1） 最小位能原理

$$\delta\Pi_P=0 \tag{2.1}$$

$$\Pi_P=\iiint\limits_V\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\bar{F}_iu_i\right)dV-\iint\limits_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS \tag{2.2}$$

其变分条件为

$$\sigma_{ij}=a_{ijkl}e_{kl}, \qquad e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \qquad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.3a, b}$$

$$u_i=\bar{u}_i \quad (\text{在 }S_u\text{ 上}), \quad S_u+S_\sigma=S \tag{2.4}$$

其中$\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}$为应变能密度。

（2） 最小余能原理

$$\delta\Pi_C=0 \tag{2.5}$$

$$\Pi_C=\iiint\limits_V\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}dV-\iint\limits_{S_u}\bar{u}_in_j\sigma_{ij}dS \tag{2.6}$$

其变分条件为

$$e_{ij}=b_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad e_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}), \quad \sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0 \quad (\text{在}V\text{内}) \tag{2.7a, b, c}$$

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i, \quad (\text{在 }S_\sigma\text{上}), \quad \text{其中}S_\sigma+S_u=S \tag{2.8}$$

三、已知的广义变分原理

人们已知的广义变分原理有下列四种：

（1） Hu-Washizu（胡海昌-鹫津久一郎）原理（1954—55）[4,5]

$$\delta \Pi_{HW}=0 \tag{3.1}$$

$$\Pi_{HW}=\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\sigma_{ij}(e_{ij}-u_{i,j})-\bar{F}_iu_i\right\}dV$$

$$-\iint_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS-\iint_{S_u}\sigma_{ij}n_j(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{3.2}$$

这是一条完全没有约束条件的驻值变分原理，共有三类独立变量：σ_{ij}，e_{ij}，u_i。胡海昌[4]曾称之为“广义位能原理”，作者曾证明[1]：它是可以用拉氏乘子法把最小位能原理的变分约束条件吸收入有关泛函从而解除其约束而求得的。作者曾建议[1]，把这个变分原理称为弹性理论小位移问题的完全（无约束）的广义变分原理。

（2） Hellinger-Reissner 原理（1950）[2],[3]

$$\delta \Pi_{HR}=0 \tag{3.3}$$

$$\Pi_{HR}=\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right\}dV$$

$$+\iint_{S_u}\bar{u}_in_j\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS \tag{3.4}$$

这是有两类独立变量（σ_{ij}，u_i）的驻值变分原理．求e_{ij}的条件为

$$e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0 \tag{3.5}$$

也即是说，e_{ij}并不是独立变量，(3.5) 也可以看作为变分约束条件．所以，Hellinger-Reissner 原理并不是完全无约束的广义变分原理，但业已解除了最小余能原理中有关（1）应变位移关系，（2）平衡条件，和（3）外力已知边界条件的约束．它应该是不完全的广义变分原理．作者在本文后面将证明，用一般常见的线性拉氏乘子法，我们无法解除 (3.5) 式的变分约束条件．我们必须指出，(3.4) 中的泛函 Π_{HR}，和常见的 Hellinger-Reissner 泛函差一个正负号．这是卞学镄教授所建议的[6]．我们很易证明，在(3.5)式的条件下，Π_{HW} 和 Π_{HR} 完全相等，我们称之为等价原理[7]。

（3） 所谓“广义余能原理”（1954）[8]

$$\delta \Pi_{GC}=0 \tag{3.6}$$

$$\Pi_{GC}=\iiint_V\left\{-e_{ij}\sigma_{ij}+\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right\}dV$$

$$+\iint_{S_u}\bar{u}_in_j\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}u_i(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)dS \tag{3.7}$$

这里有三类独立变量，即 e_{ij}，σ_{ij}，u_i，是一个完全没有约束条件的广义变分原理．泛函 Π_{GC} 和通常所用的泛函差了一个正负号，这也是卞学镄教授所建议的[6]．我们很易证明，

Π_{HW}和Π_{GC}无条件完全相等，这个等价原理业已分别由钱伟长[7]和鹫津久一郎[8]证明。(3.6)也是一个驻值原理。

(4) 梁国平-傅子智的广义变分原理(1982)[9]

$$\delta\Pi_{LF}=0 \tag{3.8}$$

$$\Pi_{LF}=\iiint_V\left\{\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\left(e_{ij}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}\right)\right]\right.$$

$$\left.-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right\}dV+\iint_{S_u}\bar{u}_i n_j\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS \tag{3.9}$$

这是一个三类变量的驻值原理，即σ_{ij}，e_{ij}，u_i，也是一个完全没有约束条件的广义变分原理。Π_{LF}和梁-傅原来的泛函差一个正负号。

在下面，我们将用拉氏乘子法从最小位能原理或最小余能原理推导这些广义变分原理。

四、线性的拉氏乘子法和 Hu-Washizu 和 Hellinger-Reissner 原理的推导

设变分条件为$f=0$，由于这个条件而对泛函的修正项应写成$\phi(f)$，而且

$$\phi(f)_{f\to0}=0 \tag{4.1}$$

设$\phi(f)$为f的正规函数，则$\phi(f)$可以用 Tayler 级数展开

$$\phi(f)=\alpha_1 f+\alpha_2 f^2+\cdots \tag{4.2}$$

当f很小时，略去f的高次项，

$$\phi(f)=\alpha_1 f\qquad \alpha_1\text{待定，}\quad \text{但}\neq0 \tag{4.3}$$

α_1即为待定的拉氏乘子。

最小位能原理(2.1)有三个变分约束条件，为此，我们可以引进三种独立的待定拉氏乘子，α_{ij}，β_{ij}，γ_i，而根据(4.3)式，把这三种约束条件(2.3a, b)，(2.4)吸收入泛函Π_P后，得广义变分原理的泛函

$$\Pi_P^*=\Pi_P+\iiint_V\left\{\alpha_{ij}\left[e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\right]\right.$$

$$\left.+\beta_{ij}(\sigma_{ij}-a_{ijkl}e_{kl})\right\}dV+\iint_{S_u}\gamma_i(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{4.4}$$

其中$\alpha_{ij}=\alpha_{ji}$，$\beta_{ij}=\beta_{ji}$，γ_i，σ_{ij}，e_{ij}，u_i都是独立变量。变分驻值的条件通过分部积分后，可以写成

$$\delta\Pi_P^*=\iiint_V\left\{(a_{ijkl}e_{kl}+\alpha_{ij}-\beta_{kl}a_{ijkl})\delta e_{ij}+\beta_{ij}\delta\sigma_{ij}+(\alpha_{ij,j}-\bar{F}_i)\delta u_i\right\}dV$$

$$+\iiint_V\left\{\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\alpha_{ij}+(\sigma_{ij}-a_{ijkl}e_{kl})\delta\beta_{ij}\right\}dV$$

$$+\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\gamma_i dS+\iint_{S_u}(\gamma_i-n_j\alpha_{ij})\delta u_i dS-\iint_{S_\sigma}(n_j\alpha_{ij}+\bar{p}_i)\delta u_i dS=0 \tag{4.5}$$

由此，得下列各独立方程

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad a_{ijkl}e_{kl}-\beta_{kl}a_{ijkl}+\alpha_{ij}=0\\&(2)\quad \beta_{ij}=0\\&(3)\quad \alpha_{ij,j}-\bar{F}_i=0\\&(4)\quad e_{ij}-\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})=0\\&(5)\quad \sigma_{ij}-a_{ijkl}e_{kl}=0\end{aligned}\right\}\text{（在}V\text{内）}\tag{4.6a, b, c, d, e}$$

$$\left.\begin{aligned}&(6)\quad u_i-\bar{u}_i=0\\&(7)\quad \gamma_i-n_j\alpha_{ij}=0\end{aligned}\right\}\text{（在}S_u\text{上）}\tag{4.7a、b}$$

$$(8)\quad n_j\alpha_{ij}+\bar{p}_i=0\qquad\text{（在}S_\sigma\text{上）}\tag{4.8}$$

(4.6d, e)、(4.7a)、(4.8)分别为Π_P的原有变分约束条件，从(4.6a, b)、(4.7b)可以求得

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_{ij}=-\sigma_{ij},\quad \beta_{ij}=0\ \text{（在}V\text{内）}\\&\gamma_i=-n_j\sigma_{ij}\quad\text{（在}S_u\text{上）}\end{aligned}\right\}\tag{4.9a, b, c}$$

把(4.9a)代入(4.6c)得

$$\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0\qquad\text{（在}V\text{内）}\tag{4.10}$$

它即为平衡条件。这里的待定拉子乘子β_{ij}虽然等于零，但有关的变分约束条件$\sigma_{ij}=a_{ijkl}e_{kl}$业已在证明(4.9a)中采用过了。所以，如果把(4.9a, b, c)中的拉氏乘子代入Π_P^*时，即得完全的广义变分原理，即Hu-Washizu原理。其泛函为Π_{HW}，见(3.2)。把e_{ij}, σ_{ij}, u_i作为独立变量，对Π_{HW}变分的驻值条件给出弹性理论小位移问题的全部条件(1.1)—(1.5)式。所以拉氏乘子法的确解除了最小位能原理的一切约束。这是线性拉氏乘子法解除约束变分条件的一个成功的例。

在下面我们将给出线性拉氏乘子法一个不成功的例。即从余能原理Π_C用线性拉氏乘子法推导不出所谓"广义余能原理"Π_{GC}，而只能导出Hellinger-Reissner原理Π_{HR}。

设α_{ij}, β_{ij}, γ_i, μ_i为有关拉子乘子，把最小余能原理的变分约束条件(2.7a,b, c), (2.8)分别乘上述乘子，然后吸收入泛函Π_C之中，建立新的泛函

$$\Pi_C^*=-\Pi_C+\iiint_V\left\{\alpha_{ij}(e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})+\beta_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\right\}dV$$

$$+\iiint_V\gamma_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)dV+\iint_{S_\sigma}\mu_i(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)dS\tag{4.11}$$

其中Π_C见(2.6)。我们在Π_C前换了负号，其目的只是为了导出卞学鐄教授所建议的Π_{HR}泛函(3.4)。

变分驻值条件通过部份积分后得到

$$\delta\Pi_C^*=\iiint_V\{(-b_{ijkl}\sigma_{kl}-b_{ijkl}\alpha_{kl}-\gamma_{i,j})\delta\sigma_{ij}+(\alpha_{ij}+\beta_{ij})\delta e_{ij}+\beta_{ij,j}\delta u_i\}dV$$

$$+\iiint_V\left\{(e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl})\delta\alpha_{ij}+\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)\delta\beta_{ij}+(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta\gamma_i\right\}dV$$

$$+\iint_{S_\sigma}(n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i)\delta\mu_i dS+\iint_{S_\sigma}(\gamma_i+\mu_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS+\iint_{S_u}(\gamma_i+\bar{u}_i)n_j\delta\sigma_{ij}dS$$

$$-\iint_{S_u}\beta_{ij}n_j\delta u_i dS-\iint_{S_\sigma}\beta_{ij}n_j\delta u_i dS=0 \tag{4.12}$$

由于 δu_i, $\delta\sigma_{ij}$, δe_{ij}, $\delta\alpha_{ij}$, $\delta\beta_{ij}$, $\delta\gamma_i$, $\delta\mu_i$ 等都是独立的变分，于是从(4.12)给出下列11个方程：

在V内，我们有

(1) $-b_{ijkl}\sigma_{kl}-b_{ijkl}\alpha_{kl}-\frac{1}{2}\gamma_{i,j}-\frac{1}{2}\gamma_{j,i}=0$ (4.13a)

(2) $\alpha_{ij}+\beta_{ij}=0$ (4.13b)

(3) $\beta_{ij,j}=0$ (4.13c)

(4) $e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$ (4.13d)

(5) $e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$ (4.13e)

(6) $\sigma_{ij,j}+F_i=0$ (4.13f)

在S_u上，有

(7) $\beta_{ij}=0$ (4.14a)

(8) $\gamma_i+\bar{u}_i=0$ (4.14b)

在S_σ上，有

(9) $\beta_{ij}=0$ (4.15a)

(10) $n_j\sigma_{ij}-\bar{p}_i=0$ (4.15b)

(11) $\gamma_i+\mu_i=0$ (4.15c)

从(4.13c)、(4.14a)、(4.15a)，我们得 β_{ij} 的齐次微分方程及其齐次边界条件。其解可以写成

$$\beta_{ij}=0 \qquad (\text{在}V+S\text{内}) \tag{4.16}$$

代入(4.13b)，得

$$\alpha_{ij}=0 \qquad (\text{在}V+S\text{内}) \tag{4.17}$$

于是，从(4.13a)、(4.13d)、(4.13e)中消去 σ_{ij}, e_{ij}，得

$$(u_i+\gamma_i)_{,j}+(u_j+\gamma_j)_{,i}=0 \tag{4.18}$$

如果略去变形中的刚体位移，则(4.18)的解可以写成

$$u_i+\gamma_i=0, \quad \text{或} \quad \gamma_i=-u_i \qquad (\text{在}V+S\text{中}) \tag{4.19}$$

边界条件(4.14b)业已满足，从(4.15c)，得

$$\mu_i=-\gamma_i=+u_i \qquad (\text{在}S_\sigma\text{上}) \tag{4.20}$$

而其它各式，即(4.13d)、(4.13e)、(4.13f)、(4.14b)、(4.15b)，分别为原弹性理论静力学问题的各关系式(1.1)－(1.5)。把(4.16)、(4.17)、(4.19)、(4.20)中所定出的拉氏乘子代入(4.11)，即得 Hellinger-Reissner 变分原理的泛函Π_{HR}，见(3.4)。原来引入Π_C的变分条件 $e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$ 和 $e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}=0$ 的拉氏乘子 α_{ij} 和 β_{ij} 都恒等于零。也即是说，在确定拉氏乘子的过程中，又把这两个变分条件丢失了。其实这两个条件在确定γ_i的过程中曾经联合起来使用过一次（即求得(4.18)的过程中使用过）。所以真正丢失的只有 $e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$ 这一个条件。这就证明了 Hellinger-Reissner 原理只有两类变量，而e_{ij}是从剩下的变分约束条件(3.5)中求得的。

以上证明了，用线性的拉氏乘子法，只能求得Π_{HW}的变分原理，无法解除一切变分约束条件，其原因为，在 Π_C^* 的驻值条件中，有关这个变分条件的拉氏乘子恒等于零。亦即这个拉氏乘子不满足原来假定它不等于零的条件(4.3)。在拉氏乘子恒等于零的条件下，$\phi(f)$ 的展开式(4.2)中，线性项恒等于零，为了解除这个约束条件，我们必须采用 $\phi(f)$ 展开式的高次项 a_2f^2。我们称这个变分条件为**临界变分条件**。

五、临界变分条件和高次拉氏乘子法

我们遇见了临界变分条件

$$f=e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0 \tag{5.1}$$

设

$$\phi(f)=A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq}) \tag{5.2}$$

其中 A_{ijkl} 为高次项的拉氏乘子，其实是 f^2 二次项的乘子。它有下列对称性

$$A_{ijkl}=A_{klij}=A_{jikl}=A_{ijlk} \tag{5.3}$$

它是待定的。

建立新的泛函

$$\Pi_{HR}^*=\Pi_{HR}+\iiint_V A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})dV \tag{5.4}$$

Π_{HR}^* 的驻值条件为

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{HR}^*=&\iiint_V\left\{-b_{ijkl}\sigma_{kl}+\frac{1}{2}u_{i,j}+\frac{1}{2}u_{j,i}-2A_{mnkl}b_{mnij}(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})\right\}\delta\sigma_{ij}dV\\&+\iiint_V 2A_{ijkl}(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})\delta e_{ij}dV\\&+\iiint_V\left\{(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\delta u_i+(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})\delta A_{ijkl}\right\}dV\\&-\iint_{S_u}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}n_jdS+\iint_{S_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)\delta u_idS=0\end{aligned} \tag{5.5}$$

由于V 中的$\delta\sigma_{ij}$，δe_{ij}，δu_i，δA_{ijkl}，S_u 中的$n_j\delta\sigma_{ij}$，和$\delta\sigma$ 中的 δu_i 都是独立变分，所以其系数都等于零。

在V 中

(1) $\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i=0$ (5.6a)

(2) $b_{ijkl}\sigma_{kl}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}-2A_{mnkl}b_{mnij}(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})=0$ (5.6b)

(3) $2A_{ijkl}(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})=0$ (5.6c)

(4) $(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})=0$ (5.6d)

在 S_u 上

(5) $u_i=\bar{u}_i$ (5.7)

在$\delta\sigma$ 上

(6) $\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i$ (5.8)

(5.6a)、(5.7)、(5.8)都是原弹性理论中的平衡方程和边界条件。从(5.6c)、(5.6d)，我们得

$$e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0 \qquad (\text{在}V\text{中}) \tag{5.9}$$

和

$$A_{ijkl}\ \text{未定（可以是}\ x_i\ \text{的任意函数）}\neq 0 \tag{5.10}$$

把(5.9)、(5.10)代入(5.6b)，即得应力位移关系，

所以，(5.4)式为一种新的三类变量的广义变分原理，它是比任何第三节中已知的广义变分原理更加一般化的广义变分原理，其中 A_{ijkl} 为一任意的拉氏乘子。当 $A_{ijkl}=0$ 时，(5.4)式还原为二变量的 Hellinger-Reissner 原理的泛函。我们称Π^*_{HR}为 Π_{G1}，即第一种三变量的更一般的广义变分原理的泛函。它可以写成

$$\delta\Pi_{G1}=0 \qquad (\text{驻值}) \tag{5.11}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{G1}=&\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)+A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})\right\}dV\\&+\iint_{S_u}\bar{u}_i n_j\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS\end{aligned} \tag{5.12}$$

其中 A_{klij} 是任意的，但满足对称条件(5.3)的乘子，而且不等于零。它是用高次拉氏乘子法从余能原理或 Hellinger-Reissner 原理中导出的；是三类变量的完全的广义变分原理的更一般的形式。

让我们取 A_{ijkl} 为下列特殊形式

$$A_{ijkl}=\frac{1}{2}\lambda a_{ijkl} \tag{5.13}$$

其中 λ 为任意标量，a_{ijkl} 为弹性常数（见(1.2a)式） 于是

$$\begin{aligned}&A_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})\\&=\frac{1}{2}\lambda(a_{ijkl}e_{ij}-\sigma_{kl})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})\\&=\lambda\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-e_{ij}\sigma_{ij}\right)\end{aligned} \tag{5.14}$$

于是，上述更一般的广义变分原理 $\delta\Pi_{G1}=0$ 可以化为

$$\delta\Pi_{G\lambda}=0 \qquad (\text{驻值}) \tag{5.15}$$

$$\begin{aligned}\Pi_{G\lambda}=&\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right.\\&\left.+\lambda\left(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-e_{ij}\sigma_{ij}\right)\right\}dV\\&+\iint_{S_u}\bar{u}_i n_j\sigma_{ij}dS+\iint_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS\end{aligned} \tag{5.16}$$

其中 λ 是一个任意标量，也可以是 x_i 的任意标量函数。

我们很易看到，当 λ 取下列各值时，(5.16)式还原为前面所提到的各种广义变分原理：

$$\left.\begin{aligned}&(1)\quad \lambda=1\ \text{时}\quad (\Pi_{G\lambda})_{\lambda=1}=\Pi_{GC},\ \text{见}(3.7)\\&(2)\quad \lambda=\frac{1}{2}\text{时}\quad (\Pi_{G\lambda})_{\lambda=\frac{1}{2}}=\Pi_{LP},\ \text{见}(3.9)\end{aligned}\right\} \tag{5.17}$$

当然 $\lambda=0$ 时，$\Pi_{G\lambda}$ 还原为 Hellinger-Reissner 原理的泛函 Π_{HR}，但 $\delta\Pi_{HR}=0$ 已经不是完全的广义变分原理。

六、从Π_{HW} 或从Π_P导出的更一般的广义变分原理

用相同的方法，即增加高次拉氏乘子项，我们可以从Π_{HW}，或从Π_P 导出下列更一般的广义变分原理

$$\Pi_{G\mathrm{II}}=\iiint\limits_V\Big\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+B_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})$$

$$-\sigma_{ij}\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)-\bar{F}_iu_i\Big\}dV$$

$$-\iint\limits_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS-\iint\limits_{S_u}n_j\sigma_{ij}(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{6.1}$$

$$\delta\Pi_{G\mathrm{II}}=0 \tag{6.2}$$

其中 B_{ijkl} 为高次项的拉氏乘子，是任意的，有和(5.3)式的 A_{ijkl} 相同的对称性。

让我们取 B_{ijkl} 为下列特殊形式

$$B_{ijkl}=\frac{1}{2}\lambda'a_{ijkl} \tag{6.3}$$

其中λ'为又一任意标量，a_{ijkl} 为(1.2a)式的弹性常数。于是$\Pi_{G\mathrm{II}}$可以写成

$$\Pi_{G\lambda'}=\iiint\limits_V\Big\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\lambda'\Big(\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-e_{ij}\sigma_{ij}\Big)$$

$$-\sigma_{ij}\Big(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\Big)-\bar{F}_iu_i\Big\}dV$$

$$-\iint\limits_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS-\iint\limits_{S}n_j\sigma_{ij}(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{6.4}$$

$$\delta\Pi_{G\lambda'}=0 \tag{6.5}$$

我们很易证明，当 λ' 取下列各值时，(6.4)式还原为前面所提到的各种广义变分原理：

$$\left.\begin{array}{llll}(1) & \lambda'=0 & (\Pi_{G\lambda'})_{\lambda'=0}=\Pi_{HW} & \text{见(3.2)}\\ (2) & \lambda'=-1 & (\Pi_{G\lambda'})_{\lambda'=-1}=\Pi_{HR} & \text{见(3.4)}\end{array}\right\} \tag{6.6}$$

从上述讨论中，我们可以看到，本文所找到的诸广义变分原理，如$\Pi_{G\mathrm{I}}$，$\Pi_{G\mathrm{II}}$，$\Pi_{G\lambda}$，$\Pi_{G\lambda'}$比以前所提出的广义变分原理更加一般。它们的各种特殊情况还原为前所已知的各种广义变分原理，如 Π_{HW}，Π_{HR}，Π_{GC}，Π_{LF}。

七、等　价　原　理

各种广义变分原理既然代表同一物理问题的解，而且是用同样的变量 (e_{ij}，σ_{ij}，u_i) 来描写的。在数学上，它们必然是等价的，例如 $\Pi_{G\mathrm{I}}$，$\Pi_{G\mathrm{II}}$虽然前者从余能原理导出，后者从位能原理导出，其驻值条件又代表相同的静力学问题，所以一定是等价的，即

$$\Pi_{G\mathrm{I}}=\Pi_{G\mathrm{II}} \tag{7.1}$$

或即

$$\Pi_{G\mathrm{II}}-\Pi_{G\mathrm{I}}=\iiint_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}+B_{ijkl}-A_{ijkl}\right\}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})dV=0 \tag{7.2}$$

由于 $e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn}$ 不一定等于零，因此，我们得

$$\frac{1}{2}a_{ijkl}+B_{ijkl}-A_{ijkl}=0 \tag{7.3}$$

这就是说，A_{ijkl}和B_{ijkl}不是独立的，它们必须满足(7.3)。我们称(7.3)为**等价关系**。或即是说，由于A_{ijkl}和B_{ijkl}满足等价关系，因此$\Pi_{G\mathrm{I}}$和$\Pi_{G\mathrm{II}}$是等价，即从位能原理导出的更一般的广义变分原理$\delta\Pi_{G\mathrm{II}}=0$，和从余能原理导出的另一广义变分原理$\delta\Pi_{G\mathrm{I}}=0$完全等价。

如果把(5.13)、(6.3)，代入(7.3)，得$\Pi_{G\lambda}$和$\Pi_{G\lambda'}$的等价关系

$$1+\lambda'-\lambda=0 \tag{7.4}$$

例如，取$\lambda'=0$，其泛函Π_{HW}(见(6.6))必和$\lambda=1$的泛函Π_{G0}(见(5.17))等价。又例如$\lambda'=-1$的$\Pi_{G\lambda'}$，必和$\lambda=0$的$\Pi_{G\lambda}$等价，或即下列两个泛函是等价的。

$$(\Pi_{G\lambda'})_{\lambda'=-1}=\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}+\frac{1}{2}\sigma_{ij}(u_{i,j}+u_{j,i})-\bar{F}_iu_i\right\}dV$$

$$-\iint_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS-\iint_{S_u}n_j\sigma_{ij}(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{7.5}$$

$$(\Pi_{G\lambda})_{\lambda=0}=\Pi_{HR}=\iiint_V\left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right\}dV$$

$$+\iint_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS+\iint_{S_u}\bar{u}_in_j\sigma_{ij}dS \tag{7.6}$$

它们都是两种变量的广义变分原理的泛函。通过部份积分，很易证明(7.5)、(7.6)是相等的。

又例如$\lambda=\frac{1}{2}$时，其泛函$\Pi_{G\lambda}$为梁国平-傅子智原理的泛函Π_{LF}，见(3.9)。和它等价的泛函$\Pi_{G\lambda'}$相当于$\lambda'=-\frac{1}{2}$。亦即

$$(\Pi_{G\lambda'})_{\lambda'=-\frac{1}{2}}=\iiint_V\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}\left(e_{ij}\sigma_{ij}-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right)\right\}dV$$

$$-\iiint_V\left\{\sigma_{ij}\left(e_{ij}-\frac{1}{2}u_{i,j}-\frac{1}{2}u_{j,i}\right)+\bar{F}_iu_i\right\}dV$$

$$-\iint_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS-\iint_{S_u}n_j\sigma_{ij}(u_i-\bar{u}_i)dS \tag{7.7}$$

我们通过部份积分，很易证明(7.7)和(3.9)式是等价的泛函。

上面所讨论的等价关系中，像Π_{HW}和Π_{G0}的等价，以及Π_{LF}和$(\Pi_{G\lambda'})_{\lambda'=-\frac{1}{2}}$的等价，

都是完全的无约束条件的广义变分原理的等价。像Π_{HR}和$\Pi_{G\lambda'}$在$\lambda'=-1$时的等价，则又都是只有一个约束变分条件$e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$的二种变量的广义变分原理的等价。

我们可以看到Π_{HR}在变分约束条件$e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0$的约束下变分所解决的物理问题，和$\Pi_{HW}$在无条件变分所解决的物理问题完全相等，因此，这两个变分问题也是等价的。现在让我们证明这一点。

Π_{HR}的变分约束条件为

$$e_{ij}-b_{ijkl}\sigma_{kl}=0 \tag{7.8}$$

于是，我们有

$$\frac{1}{2}a_{ijkl}(e_{ij}-b_{ijmn}\sigma_{mn})(e_{kl}-b_{klpq}\sigma_{pq})$$

$$=\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}+\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}=0 \tag{7.9}$$

或可写成

$$\iiint\limits_V\left\{-\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\right\}dV=\iiint\limits_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}\right\}dV \tag{7.10}$$

把(7.10)式代入(3.4)式，得

$$\Pi^*_{HR}=\iiint\limits_V\left\{\frac{1}{2}a_{ijkl}e_{ij}e_{kl}-\sigma_{ij}e_{ij}-u_i(\sigma_{ij,j}+\bar{F}_i)\right\}dV$$

$$+\iint\limits_{S_u}\bar{u}_in_j\sigma_{ij}dS+\iint\limits_{S_\sigma}u_i(\sigma_{ij}n_j-\bar{p}_i)dS \tag{7.11}$$

这个替代运算是完全允许的，因为(3.4)式的Hellinger-Reissner原理的变分约束条件为(7.8)式。很易看到(7.11)和(3.7)式中的Π_{GC}完全相等，但Π_{GC}和Π_{HW}是等价，因此，Π_{HR}在约束条件(7.8)下的变分和Π_{HW}的完全无条件的广义变分也是等价的。

八、各种广义变分原理的关系图

现把各种广义变分原理的关系图表示如下。目前所知的最一般的广义变分原理$\Pi_{G\text{I}}$和$\Pi_{G\text{II}}$在表的最下端，它们在等价关系(7.3)的条件下是等价的，它们可以分别从余能原理和位能原理用高次拉氏乘子法求得。当把条件(2)，(3)，(4)作为变分约束条件时，$\Pi_{G\text{II}}$即还原为Π_P。当把(1)，(2)，(3)，(5)作为变分约束条件时，$\Pi_{G\text{I}}$即还原为Π_C。$\Pi_{G\text{II}}$，$\Pi_{G\text{I}}$也可以用高次拉氏乘子法从Π_{HW}和Π_{HR}导得，反之，当$\Pi_{G\text{II}}$和$\Pi_{G\text{I}}$中的A_{ijkl}，B_{ijkl}等于零时，$\Pi_{G\text{II}}$，$\Pi_{G\text{I}}$又还原为Π_{HW}和Π_{HR}。

图中$\Pi_{G\lambda}$、$\Pi_{G\lambda'}$也是较一般的广义变分原理，它们是$\Pi_{G\text{I}}$，$\Pi_{G\text{II}}$的特殊情况，它们在$1+\lambda'-\lambda=0$的条件下也是等价的。Π_{HW}，Π_{GC}，Π_{LF}和$\lambda'=-\frac{1}{2}$时的$\Pi_{G\lambda'}$都是$\Pi_{G\lambda}$，$\Pi_{G\lambda'}$的特殊情况，但都是三变量的完全的广义变分原理。Π_{HR}是$\Pi_{G\lambda}$，$\Pi_{G\lambda'}$的特殊情况，而且是二变量的有约束条件(2)的广义变分原理。

$\Pi_{G\text{I}}$，$\Pi_{G\text{II}}$，$\Pi_{G\lambda}$，$\Pi_{G\lambda'}$等都是本文导出的较目前已知的广义变分原理更一般的新的广义变分原理。

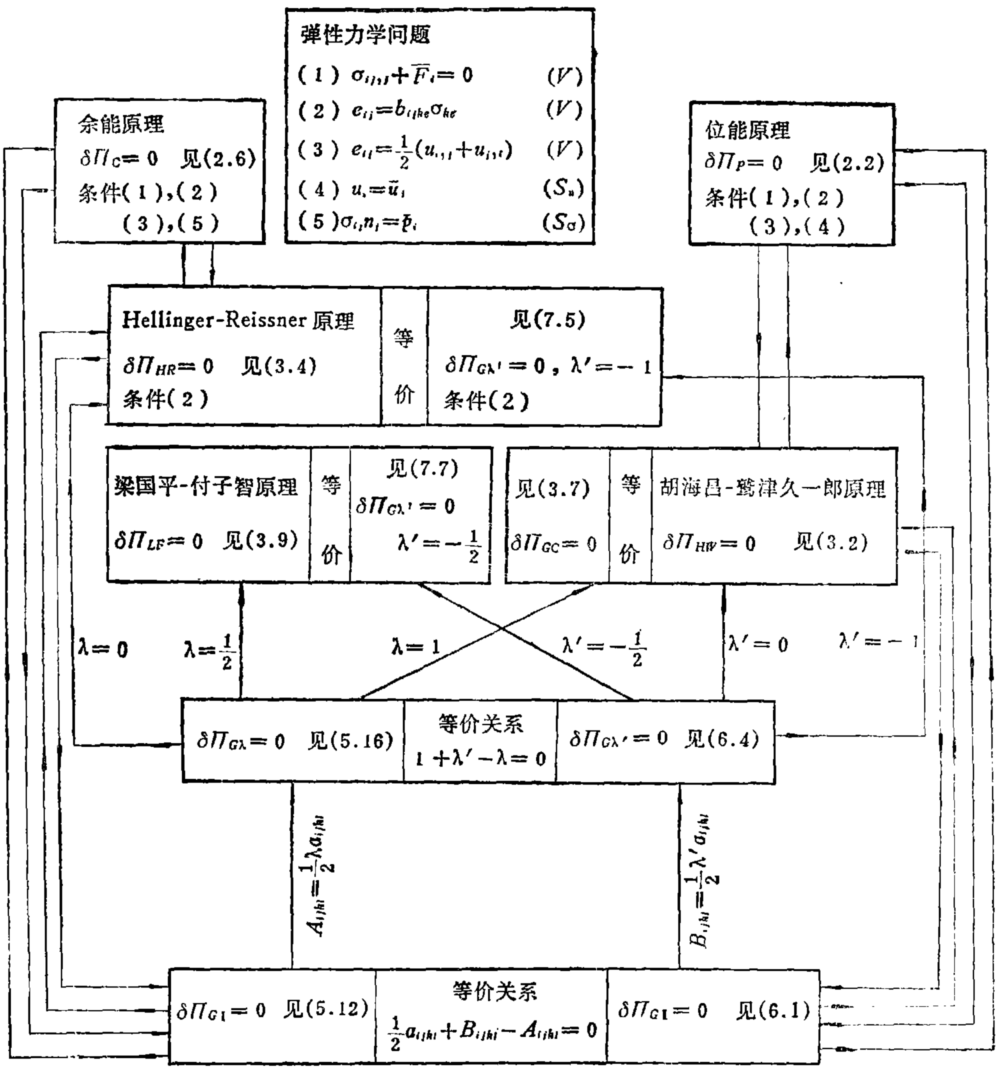

图1 各种弹性理论小位移问题的广义变分原理的关系图

参 考 文 献

[1] 钱伟长，弹性理论中广义变分原理的研究及其在有限元计算中的应用，机械工程学报，15，2 (1979)，1—23.

[2] Hellinger, E., *Der Allgemeine Ansatz der Meshanik der Kontinua*, Encyclopadia der Mathematishen Wissenshaften, Vol · Ⅳ4, (1914), 602—694.

[3] Reissner, E., On a variational theorem in elasticity, *Journal of Mathematics and Physics*, 29, 2(1950), 90—95.

[4] 胡海昌，弹塑性理论中的一些变分原理，中国科学，4，1(1955)，33—54.

[5] Washizu, K. (鷲津久一郎), On the variational principles of elasticity and plasticity, Aeroelastic and Structures Research Laboratory, Massachusettes Institute of Technology, Technical Report, 25—18号(1955).

[6] 卞学鐄，在大连举行的国际混合杂交元研究讨论班的讲话，1982年8月11—28日.

[7] 钱伟长，《变分法和有限元》(上册)，科学出版社，北京 (1980)，439—440.

[8] Washizu, K. (鷲津久--郎), Variational Methods in Elasticity and Plasticity, Pergamon, London, (1st Ed., (1968); 3rd Ed. (1977)).

[9] 梁国平、傅子智，混合杂交罚函数有限元法及其应用，在大连举行的国际混合杂交元研究讨论班上的报告，1982年8月11—28日.

Method of High-Order Lagrange Multiplier and Generalized Variational Principles of Elasticity with More General Forms of Functionals

Chien Wei-zang

(*Qinghua University, Beijing*)

Abstract

It is known[1] that the minimum principles of potential energy and complementary energy are the conditional variation principles under respective conditions of constraints. By means of method of Lagrange multipliers, we are able to reduce the functionals of conditional variation principles into new functionals of non-conditional variation principles. This method can be described as follows: Multiply undetermined Lagrange multipliers to various constraints, and add these products into original functionals. Considering these undetermines Lagrange multipliers and the original variables in these new functionals as independent variables of variation, the stationary conditions of these functionals give these undetermined Lagrange multipliers in terms of original variables. The substitutions of these results for Lagrange multipliers into above functionals lead to the functionals of these non-conditional variation principles.

However, in certain cases, some of undetermined Lagrange multipliers may turn out to be zero during variation. This is a critical state of variation. In this critical state, the corresponding variational constraint can not be eliminated by means of simple Lagrange multiplier method. This is indeed the case when one tries to eliminate the constraint condition of stress-strain relation in variational principle of minimum complementary energy by the method of Lagrange multiplier. By means of Lagrange multiplier method, one can only derive, from minimum complementary energy principle, the Hellinger-Reissner principle[2,3], in which only two types of independent variables, stresses and displacements, exist in the new functional. The strain stress relation remains to be a constraint, from which one derives the strain from given stress. Thus the Hellinger-Reissner principle remains to be a conditional variation principle with one constraint uneliminated.

In ordinary Lagrange multiplier method, only linear terms of constraint conditions are taken into consideration. It is impossible to incorporate this condition of constraint into functional whenever the corresponding Lagrange multiplier turns out to be zero. Hence, we extend the Lagrange multiplier method by considering not only the linear term, but also the high-order terms, such as quadratic terms of constraint in the Taylor's series expansion. we call this method as high-order Lagrange multiplier method. With this method, we find more general form of functional of generalized variational principle ever known to us from the Hellinger-Reissner principle. In particular, this more general form of functional can be reduced into all known functionals of existing generalized variational principles in elasticity. Similarly, we can also find more general form of functional from Hu-Washizu principle[4,5].

It is shown also that there are equivalent theorem and related equivalent relation between these two general forms of functionals in elasticity.