

湍流的Markov过程理论与Kolmogoroff理论 的联系以及对Kolmogoroff定律的推广 ——Ⅱ 对Kolmogoroff“2/3定 律”和“-5/3定律”的推广

岳曾元 张彬

(北京大学地球物理系, 1981年12月22日收到)

摘 要

在前一部分分析大雷诺数湍流的Markov过程理论与Kolmogoroff理论联系的基础上, 以适当方式建立了两种理论之间的定量联系. 从而由拉格朗日观点的弥散运动的结果得出欧拉观点的结构函数、关联函数和能谱函数. 所得结果不但适用于惯性子范围, 而且适用于比惯性子范围波数更小的全部范围. 熟知的Kolmogoroff“2/3定律”和“-5/3定律”为本结果当 r 很小(或 k 很大)时的渐近解. 因而本结果是Kolmogoroff“2/3定律”和“-5/3定律”的推广.

一、引 言

在第一部分中我们分析了Markov过程扩散理论与Kolmogoroff理论的内在联系, 指出这两个理论从不同侧面反映了大雷诺数湍流的物理结构. 并指出, Richardson定律适用阶段 $T_* \lesssim t \ll \beta^{-1}$ 对应于Kolmogoroff理论的惯性子范围. 然而我们注意到, 文[1]所得到的弥散运动的解不只适用于 $T_* \lesssim t \ll \beta^{-1}$, 而且适用于整个 $T_* \lesssim t < \infty$ 的弥散阶段. 这就启发我们, 有可能从拉格朗日观点所得结果出发, 在某种合理的物理假设的基础上, 得到大雷诺数湍流的关联函数与能谱函数, 使它们不仅适用于惯性子范围, 而且适用于比惯性子范围尺度更大(或波数更小)的全部范围.

二、平稳化引理

我们考虑大雷诺数均匀各向同性湍流. 在粘性作用下, 湍流实际上处在连续的衰变过程中. 反映湍流整体性质的物理量(如脉动速度均方值 \bar{u}^2 , 能量耗损率 ϵ 等)均为时间 t 的函数, 而纵向与横向速度关联函数 $f(r)$, $g(r)$, 纵向与横向结构函数 $D_{11}(r)$, $D_{nn}(r)$ 和能谱函数 $E(k)$ 等均以时间 t 为参数. 然而我们注意到, 所有这些函数均只由该时刻的瞬时随机速度场所决定. 换言之, 如果我们在任一给定时刻 t 将湍流“平稳化”, 即以某种理想的方式从外界输入能量, 使能量输入率恰等于该时刻的能量耗损率, 并且不破坏湍流的均匀各向同

性, 则所得到的均匀各向同性平稳湍流的 $f(r)$, $g(r)$, $D_{ii}(r)$, $D_{nn}(r)$, $E(k)$ 便分别与实际的 (衰变的) 湍流在时刻 t 的相应函数相等. 我们把这一点概述为如下引理.

平稳化引理. 为求实际的 (衰变的) 湍流在任一指定时刻 t 的关联函数、结构函数和能谱函数, 可将该时刻的湍流加以平稳化而不影响结果的正确性. 换言之, 这些函数等于所得平稳湍流中的相应函数.

这一引理不过叙述了一个简单的事实, 然而它却给我们带来很大方便. 借助于这一引理, 我们在求湍流的关联函数、结构函数和能谱函数时, 只需考虑平稳湍流, 而反映湍流衰变性质的物理量 (如 $u^2(t)$, $\epsilon(t)$ 等) 只是以参数的形式出现在我们的求解过程中.

三、全系综与弥散系综

为描述湍流速度场的统计相关性质, 最简单而常用的量是二元速度关联张量和结构张量. 它们的定义为

$$R_{ij}(\vec{r}) = \overline{u_i(P)u_j(P')} \quad (3.1)$$

和

$$D_{ij}(\vec{r}) = \overline{[u_i(P') - u_i(P)][u_j(P') - u_j(P)]} = \overline{w_i w_j}(\vec{r}) \quad (3.2)$$

其中 P, P' 为两个空间点, \vec{w} 为绝对速度, \vec{w} 为两点的相对速度. 结构张量是Kolmogoroff为突出湍流的微结构而首先引进的. $R_{ij}(\vec{r})$ 和 $D_{ij}(\vec{r})$ 都是欧拉观点的物理量, 即表征同一时刻 t 在相距 \vec{r} 的两个空间点的速度的统计相关性质. 然而, 湍流速度场是由流体质点 (以下简称质点) 的运动构成的, 如果我们能够仔细地把这种“构成”方式弄清楚, 则欧拉观点的物理量原则上应当能用相应的拉格朗日观点的量表达出来.

现在我们设想在均匀各向同性平稳湍流中独立地进行 N 个实验, 每个实验的内容是随意地挑选一对相距 \vec{r} 的质点而同时测量它们的速度. 设 N 是一个极大的数目, 于是测量结果将呈现明确的概率分布. 因而这 N 次测量的全体, 或者这 N 个被测量的相距 \vec{r} 的质点对的全体, 便构成一个统计系综. 我们称之为相距 \vec{r} 的质点对的完全系综, 简称全系综. 显然, $R_{ij}(\vec{r})$ 和 $D_{ij}(\vec{r})$ 不过是这一系综中的相关矩. 因而, 只要知道这一系综的概率分布, 则可求出 $R_{ij}(\vec{r})$ 和 $D_{ij}(\vec{r})$. 遗憾的是, 这一概率分布在理论上是未知的. 因此, 我们无法直接从这一系综出发计算关联函数和结构函数.

现在我们来考察上述全系综之中的一个子系综, 即在全体 N 个随意挑选的相距 \vec{r} 的质点对中考察那样一些质点对: 其中的两个质点曾经在以前某个时刻“贴近”过*. 换言之, 两个质点是在弥散运动的中途到达 P 点和 P' 点 (从而相距为 \vec{r}) 的. 由于这个缘故, 我们称这个子系综为弥散系综. 如果随意挑选的 N 个相距 \vec{r} 的质点对中有 N_1 个质点对属于弥散系综, 则当 N 极大时, N_1 也会充分大, 从而使得弥散系综也呈现出明确的统计规律. 由于对两质点的弥散运动我们已有办法做统计描述^[1], 因此, 如果能以某种方式建立全系综与弥散系综之间的联系, 则可借助于弥散运动的已知统计规律来求出全系综中的有关统计量, 如关联函数、结构函数、能谱函数等. 为此, 让我们首先从物理上来分析全系综与弥散系综之间的联系和区别, 然后再提出方便的数学表达式.

首先, 我们注意到, 无论全系综或弥散系综中的质点对, 当它们分别到达 P 点和 P' 点

*所谓“贴近”, 指两质点距离比湍流微尺度 λ 小得多, 但仍比内尺度 η 足够大. 这在雷诺数充分大时是有意义的.

时，它们的速度之所以有统计相关性，都是由于湍流中存在着一定数量的，尺度可与 r 相比或者比 r 更大的漩涡。事实上，假如湍流中最大的漩涡其尺度也远远小于 r ，则 P 点与 P' 点的速度便可认为统计独立。在整体看来极端混乱的湍流运动中，漩涡是某种意义上的“规则”运动。这种“规则性”虽然在空间上是局部的，在时间上是短暂的，但在空间和时间两方面都是宏观的。湍流中二质点速度保持统计相关性的距离之所以比分子热运动和布朗运动情形长得多，原因就在于湍流中存在着宏观意义的“规则”运动——漩涡。

通常我们说湍流中存在着极其混乱的、不规则的漩涡运动。这里所说的“不规则”是对湍流整体而言的。各种尺度的漩涡交错混杂，此长彼消，构成一幅整体看来极端不规则的图象。然而，每一个漩涡从形成到破灭的一段生存时间里，它的图案确实是有某种规则的。

总之，由于全系综和弥散系综中的质点对，当距离为 r 时，其速度相关性都是由湍流场中尺度可与 r 相比或比 r 更大的漩涡运动造成的。因此，相距 \vec{r} 的弥散质点对与相距 \vec{r} 的全系综质点对的速度相关性应当存在着密切的数量关系。

我们再来分析这两类相距 \vec{r} 的质点对的区别。全系综中的一对质点，它们可以从四面八方到达 P 点和 P' 点，对它们以前的相对位置并未加以任何限制；弥散系综中相距 \vec{r} 的一对质点，以前曾经“贴近”过，它们是在弥散运动的中途经过 P 点和 P' 点的，因此在统计上表现出一种倾向于沿 \vec{r} 方向继续分开的趋势。这在数学上表现为，弥散运动在相空间 (\vec{r}, \vec{w}) 中的概率密度 $W(\vec{r}, \vec{w}, t)$ 当 \vec{w} 与 \vec{r} 方向相同时最大(见下面(3.6)式)。当二质点初始距离为 \vec{r}_0 ，初始相对速度为 \vec{w}_0 时，经过时间 t 在相空间 (\vec{r}, \vec{w}) 中的概率密度为

$$W(\vec{r}, \vec{w}, t; \vec{r}_0, \vec{w}_0) = \frac{1}{8\pi^3 D^3 (FG - H^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{F|\vec{R}|^2 - 2H\vec{R} \cdot \vec{S} + G|\vec{S}|^2}{2D(FG - H^2)}\right] \quad (3.3)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \vec{R} &= \vec{r} - \vec{r}_0 - \frac{\vec{w}_0}{\beta}(1 - e^{-\beta t}), & \vec{S} &= \vec{w} - \vec{w}_0 e^{-\beta t} \\ F &= \beta(1 - e^{-2\beta t}), & H &= (1 - e^{-\beta t})^2 \\ G &= \frac{1}{\beta}(2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t}) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

这一结果可由文献[1]结果(那里只考虑一维运动)加以简单推广而得到。

在我们所考虑的 $\vec{r}_0 = \vec{w}_0 = 0$ 情形，有

$$\vec{R} = \vec{r}, \quad \vec{S} = \vec{w} \quad (3.5)$$

于是(3.3)式变为

$$W(\vec{r}, \vec{w}, t) = \frac{1}{8\pi^3 D^3 (FG - H^2)^{3/2}} \exp\left[-\frac{F|\vec{r}|^2 - 2H\vec{r} \cdot \vec{w} + G|\vec{w}|^2}{2D(FG - H^2)}\right] \quad (3.6)$$

由此式，在 \vec{r} 和 $|\vec{w}|$ 取定的条件下，可知当 \vec{w} 与 \vec{r} 同方向时 $W(\vec{r}, \vec{w}, t)$ 达最大值。 \vec{w} 的概率分布在 \vec{r} 方向上的这种优越性是弥散系综的特点，也是相距 \vec{r} 的弥散质点对与相距 \vec{r} 的全系综质点对的主要区别。

四、平均化假设

我们用 $(\overline{\quad})$ 表示全系综平均，用 $(\overline{\quad})$ 表示弥散系综平均。由上节的分析，我们可认为两个系综的平均量之间存在着密切的数量关系。然而由于两个系综的区别，我们不能

简单地认为相同的平均量相等。例如，不能认为 $\bar{w}_l^2(r)$ 与 $\bar{w}_i^2(r)$ 相等（下标 l 表示“纵向”，即 \bar{w} 与 \bar{r} 同方向），因为在弥散系综中 \bar{w} 所具有的径向优越性在全系综中是不存在的。因此，为建立两个系综中平均量之间的数量关系，应当对弥散系综中的量采取某种球面平均方法，把速度 \bar{w} 在径向所表现的优越性平均掉。具体地说，如设 $\overline{PP'}$ 方向指向笛卡尔坐标 (x, y, z) 的 x 方向，则与 $D_{ll}(r) = \bar{w}_l^2(r) = [u_x(P') - u_x(P)]^2$ 相联系的不是 $[u_x(P') - u_x(P)]^2$ 而是后者当 P' 点在以 P 为中心， r 为半径的球面上变动时的平均值。而这一平均值不是别的，正是 $\bar{w}_x^2(r)$

（由各向同性，有 $\bar{w}_x^2(r) = \bar{w}_y^2(r) = \bar{w}_z^2(r) = \frac{1}{3} |\bar{w}^2|(r)$ ）。在确定假设的具体数学形式时，

除考虑到以上的物理思想外，还考虑到数学处理的简单性。我们知道，随着弥散时间 t 的增加，弥散距离 r （平均说来）在增加， \bar{w}_x^2 也在增加，因此 \bar{w}_x^2 与 r 可通过弥散时间而联系起来。 r 应理解为与均方根距离 $\sqrt{\bar{r}^2(t)}$ 成正比。因此我们具体提出如下假设：

平均化假设。假设全系综的平均量与弥散系综的平均量有如下关系：

$$\bar{w}_l^2(r) = \bar{w}_x^2(r) \quad (4.1)$$

其中 $\bar{w}_x^2(r)$ 满足参数方程

$$\begin{cases} \bar{w}_x^2 = \bar{w}_x^2(t) \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} r = \sigma [\bar{r}^2(t)]^{1/2} \end{cases} \quad (4.3)$$

σ 为一与1同阶的绝对常数。下面我们将给出 σ 的确定方法。

五、绝对常数 σ 的确定

由文献[1]的结果，有

$$\bar{w}_x^2 = 2\bar{u}^2(1 - e^{-2\beta t}) \quad (5.1)$$

和

$$(\bar{r}^2)^{1/2} = \frac{1}{\beta} \sqrt{6\bar{u}^2(2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t})} \quad (5.2)$$

其中 \bar{u}^2 为一固定点脉动速度平方的平均值， β 为Langevin方程中的阻力系数⁽¹⁾。将(5.1)和(5.2)代入平均化假设，并求 $r \rightarrow 0$ （相应地有 $t \rightarrow 0$ ）的渐近式，我们得到

$$D_{ll} \sim \left(\frac{4}{3\sigma}\right)^{2/3} \bar{u}^{2/3} r^{2/3} \quad (5.3)$$

其中

$$\epsilon = 3\beta\bar{u}^2 \quad (5.4)$$

为湍能耗损率⁽¹⁾。另一方面，在Kolmogoroff理论中，在惯性子范围，有⁽²⁾

$$D_{ll} \sim \left(-\frac{4}{5S}\right)^{2/3} \epsilon^{2/3} r^{2/3} \quad (5.5)$$

其中 S 为偏斜因子，定义为⁽²⁾

$$S = D_{lll}(r) / [D_{ll}(r)]^{3/2} \quad (5.6)$$

它在惯性子范围中为一绝对常数*。既然当 r 小时，我们的结果应当代表惯性子范围的结果（见第I部分的分析），比较(5.3)与(5.5)式，我们得到

* S 的实测值在-0.36到-0.42之间，典型值可取为-0.4。

$$\sigma = \frac{5}{3} |S| \quad (5.7)$$

其中 S 为惯性子范围内的偏斜因子。这样来确定常数 σ 之后,便保证由平均化假设所得出的关联函数、结构函数当 r 小时与Kolmogoroff理论的惯性子范围结果相一致。但Kolmogoroff理论惯性子范围的结果对于 r 超出惯性子范围便不再成立了,而我们的结果直到 $r \rightarrow \infty$ 都是合理的。为看清这一点,我们只需将(5.1)、(5.2)式代入平均化假设并令 $r \rightarrow \infty$ ($t \rightarrow \infty$),立即得到

$$D_{ii}(r) \rightarrow 2\bar{u}^2 \quad (\text{当 } r \rightarrow \infty) \quad (5.8)$$

这当然正是物理上所期望的,因为当 r 很大时,两点的随机速度可认为统计独立,于是自然地应当有(5.8)式。注意,渐近式(5.8)式与常数 σ 的选取无关。即无论 σ 取何值,我们的结果当 r 大时都是合理的; σ 取特定值 $\frac{5}{3}|S|$ (见(5.7)式)则保证了我们的结果当 r 小时也是合理的。

六、结构函数与关联函数的分析表达式

将(5.1)、(5.2)式代入平均化假设,我们得到纵向结构函数 $D_{ii}(r)$ 的如下分析表达式

$$\begin{cases} D_{ii} = 2\bar{u}^2(1 - e^{-2\beta t}) & (6.1) \\ r = \frac{\sigma}{\beta} [6\bar{u}^2(2\beta t - 3 + 4e^{-\beta t} - e^{-2\beta t})]^{1/2} & (6.2) \end{cases}$$

其中含有参数

$$\hat{t} = \beta t \quad (6.3)$$

消去这一参数,我们便得到 $D_{ii}(r)$ 的如下表达式

$$r^2 = \frac{\sigma^2}{\beta^2} 6\bar{u}^2 \left[-\ln \left(1 - \frac{D_{ii}}{2\bar{u}^2} \right) - 4 + 4\sqrt{1 - \frac{D_{ii}}{2\bar{u}^2} + \frac{D_{ii}}{2\bar{u}^2}} \right] \quad (6.4)$$

利用(5.4)和(5.7)式,(6.4)式右端的系数也可用更熟悉的物理量表出:

$$6\bar{u}^2 \frac{\sigma^2}{\beta^2} = 54 (\bar{u}^2)^3 \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{5}{3} |S| \right)^2 = 150 \left(\frac{|S|}{\varepsilon} \right)^2 (\bar{u}^2)^3 \quad (6.5)$$

于是(6.4)式可改写为

$$r^2 = 150 \left(\frac{|S|}{\varepsilon} \right)^2 (\bar{u}^2)^3 \left[-\ln \left(1 - \frac{D_{ii}}{2\bar{u}^2} \right) - 4 + 4\sqrt{1 - \frac{D_{ii}}{2\bar{u}^2} + \frac{D_{ii}}{2\bar{u}^2}} \right] \quad (6.6)$$

这就是我们求得的纵向结构函数 $D_{ii}(r)$ 的表达式。

如引进无量纲量

$$\hat{D}_{ii} = D_{ii} / (2\bar{u}^2) \quad (6.7)$$

和

$$\hat{r} = r / \left(\frac{\sqrt{6 \cdot 5} |S|}{\varepsilon} (\bar{u}^2)^{3/2} \right) \quad (6.8)$$

则(6.6)式可简化为

$$\hat{r}^2 = -\ln(1 - \hat{D}_{ii}) - 4 + 4\sqrt{1 - \hat{D}_{ii} + \hat{D}_{ii}} \quad (6.9)$$

这就是纵向结构函数的无量纲表达式。

由于纵向二元关联函数 $f(r)$ 与纵向结构函数 $D_{11}(r)$ 有如下关系^[2]

$$D_{11} = 2\bar{u}^2(1-f) \quad (6.10)$$

于是由(6.6)式和(6.9)式, 我们立即得到 $f(r)$ 的有量纲和无量纲分析表达式:

$$r^2 = 150 = \left(\frac{|S|}{\varepsilon}\right)^2 (\bar{u}^2)^3 [-\ln f - 3 + 4\sqrt{f} - f] \quad (6.11)$$

和

$$\hat{r}^2 = -\ln f - 3 + 4\sqrt{f} - f \quad (6.12)$$

横向二元关联函数 $g(r)$ 与纵向二元关联函数 $f(r)$ 有如下熟知的关系^[3] (对不可压流体)

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{df}{dr} \quad (6.13)$$

或

$$f(r) = \frac{2}{r^2} \int_0^r gr dr \quad (6.14)$$

如用 \hat{r} 表示, 它们化成

$$g(\hat{r}) = f(\hat{r}) + \frac{\hat{r}}{2} \frac{df}{d\hat{r}} \quad (6.15)$$

和

$$f(\hat{r}) = \frac{2}{\hat{r}^2} \int_0^{\hat{r}} g\hat{r} d\hat{r} \quad (6.16)$$

将(6.14)和(6.16)分别代入(6.11)和(6.12)式, 我们便得到 $g(r)$ 和 $g(\hat{r})$ 的分析表达式

$$r^2 = 150 \left(\frac{|S|}{\varepsilon}\right)^2 (\bar{u}^2)^3 \left\{ -\ln \left(\frac{2}{r^2} \int_0^r gr dr \right) - 3 + \frac{4}{r} \sqrt{2 \int_0^r gr dr} - \frac{2}{r^2} \int_0^r gr dr \right\} \quad (6.17)$$

和

$$\begin{aligned} \hat{r}^2 = & -\ln \left(\frac{2}{\hat{r}^2} \int_0^{\hat{r}} g\hat{r} d\hat{r} \right) - 3 \\ & + \frac{4}{\hat{r}} \sqrt{2 \int_0^{\hat{r}} g\hat{r} d\hat{r}} \\ & - \frac{2}{\hat{r}^2} \int_0^{\hat{r}} g\hat{r} d\hat{r} \end{aligned} \quad (6.18)$$

横向结构函数 $D_{nn}(r)$ 与横向二元关联函数 $g(r)$ 有如下关系^[2]

$$D_{nn} = 2\bar{u}^2(1-g) \quad (6.19)$$

或者

$$\hat{D}_{nn} = 1-g \quad (6.20)$$

其中

$$\hat{D}_{nn} = D_{nn}/(2\bar{u}^2) \quad (6.21)$$

将(6.19)和(6.20)分别代入(6.17)和(6.18)式, 我们便得到 $D_{nn}(r)$ 和 $\hat{D}_{nn}(\hat{r})$ 的分析表达式:

$$r^2 = 150 \left(\frac{|S|}{\varepsilon}\right)^2 (\bar{u}^2)^3 \left\{ -\ln \left[\frac{2}{r^2} \int_0^r \left(1 - \frac{D_{nn}}{2\bar{u}^2} \right) r dr \right] - 3 \right.$$

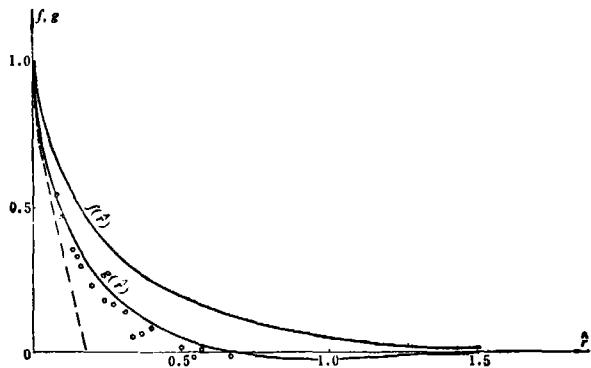


图1 纵向与横向二元关联函数. 对于 $g(r)$, 并给出与实验结果的比较. 虚线为Kolmogoroff "2/3定律" 实验结果取自文献[3]

$$+ \frac{4}{r} \sqrt{2} \int_0^r \left(1 - \frac{D_{nn}}{2\bar{u}^2}\right) r dr - \frac{2}{r^2} \int_0^r \left(1 - \frac{D_{nn}}{2\bar{u}^2}\right) r dr \} \quad (6.22)$$

和

$$\begin{aligned} \hat{r}^2 = & -\ln \left[\frac{2}{\hat{r}^2} \int_0^{\hat{r}} (1 - \hat{D}_{nn}) \hat{r} d\hat{r} \right] - 3 \\ & + \frac{4}{\hat{r}} \sqrt{2} \int_0^{\hat{r}} (1 - \hat{D}_{nn}) \hat{r} d\hat{r} \\ & - \frac{2}{\hat{r}^2} \int_0^{\hat{r}} (1 - \hat{D}_{nn}) \hat{r} d\hat{r} \quad (6.23) \end{aligned}$$

在图1中我们给出了 $f(\hat{r})$, $g(\hat{r})$ 的曲线; 图2中给出 $\hat{D}_{11}(\hat{r})$ 和 $\hat{D}_{nn}(\hat{r})$ 的曲线. 关于 $g(\hat{r})$, 还给出与实验的比较. 容易看出, 与实验值的符合是令人满意的. 图中的虚线则表示 Kolmogoroff 的“2/3定律”, 它相当于本结果在 r 小时的渐近式

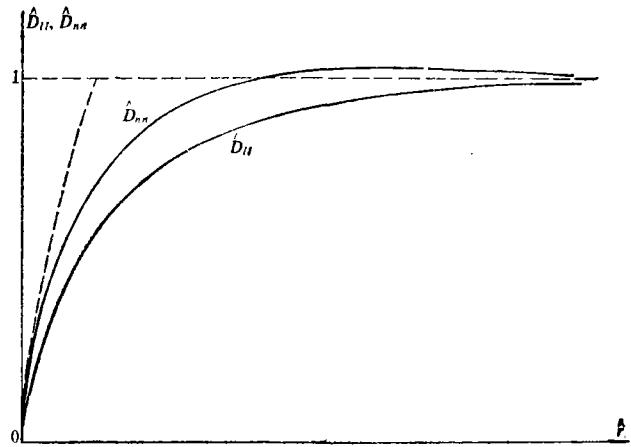


图2 纵向与横向结构函数. 虚线为 Kolmogoroff “2/3 定律”

七、能谱函数

如果引进量

$$R = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 R_{ii} \quad (7.1)$$

其中 R_{ij} 的定义由 (3.1) 式给出, 则有

$$R = \frac{\bar{u}^2}{2} (f + 2g) \quad (7.2)$$

如令

$$\hat{R} = R / \left(\frac{3}{2} \bar{u}^2 \right) \quad (7.3)$$

则有

$$\hat{R} = \frac{1}{3} (f + 2g) \quad (7.4)$$

由于 f 和 g 与 r 的关系已在上节求出, 因此, R 与 r 的关系原则上也是已知的. 而能谱函数 $E(k)$ 与函数 $R(r)$ 之间有如下熟知的关系^[31]:

$$E(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(r) k r \sin kr dr \quad (7.5)$$

如引进无量纲能谱

$$\hat{E} = E / \left(\frac{15\sqrt{6}}{2} \frac{|S| (\bar{u}^2)^{6/2}}{e} \right) \quad (7.6)$$

和无量纲波数

$$\hat{k} = k \cdot \left(\frac{5\sqrt{6}}{e} \frac{|S|}{e} (\bar{u}^2)^{3/2} \right) \quad (7.7)$$

则 (7.5) 式可化成如下无量纲形式:

$$\hat{E}(\hat{k}) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \hat{R}(\hat{r}) \hat{k} \hat{r} \sin \hat{k} \hat{r} d\hat{r} \quad (7.8)$$

为了进行数值计算, 我们不必求出 $\hat{R}(\hat{r})$ 的显式, 可只需利用 $(\hat{R})(\hat{r})$ 的参数方程

$$\begin{cases} \hat{R} = \hat{R}(\hat{t}) \\ \hat{r} = \hat{r}(\hat{t}) \end{cases} \quad (7.9)$$

$$\quad (7.10)$$

即可. 其中 $\hat{r}(\hat{t})$ 的表达式为

$$\hat{r} = (2\hat{t} - 3 + 4e^{-\hat{t}} - e^{-2\hat{t}})^{1/2} \quad (7.11)$$

它很容易由 (6.2)、(6.3)、(5.4)、(5.7) 式导出. 为求 $\hat{R}(\hat{t})$, 我们首先由 (6.1)、(6.3) 和 (6.10) 式得到

$$f = e^{-2\hat{t}} \quad (7.12)$$

再由 (6.15) 式, 有

$$g = f + \hat{r}^2 \frac{df/d\hat{t}}{d\hat{r}^2/d\hat{t}} = e^{-2\hat{t}}$$

$$\cdot \left[1 - \frac{2\hat{t} - 3 + 4e^{-\hat{t}} - e^{-2\hat{t}}}{(1 - e^{-\hat{t}})^2} \right] \quad (7.13)$$

再由 (7.4) 式, 便得到

$$\hat{R} = e^{-2\hat{t}} \left[1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{(2\hat{t} - 3 + 4e^{-\hat{t}} - e^{-2\hat{t}})}{(1 - e^{-\hat{t}})^2} \right] \quad (7.14)$$

利用 (7.14) 和 (7.11) 式, 可方便地对 (7.8) 式中的积分作数值计算, 即得到能谱曲线 $\hat{E}(\hat{k})$. 这一结果画在图 3 和图 4. 图中虚线表示 Kolmogoroff 的 “-5/3 定律” 和 $k \rightarrow 0$ 时 $E \sim k^4$ 的熟知性质. 图 4 采用对数坐标, 可以更清楚地看出本结果当 $\hat{k} \rightarrow \infty$ 和 $\hat{k} \rightarrow 0$ 的渐近性态.

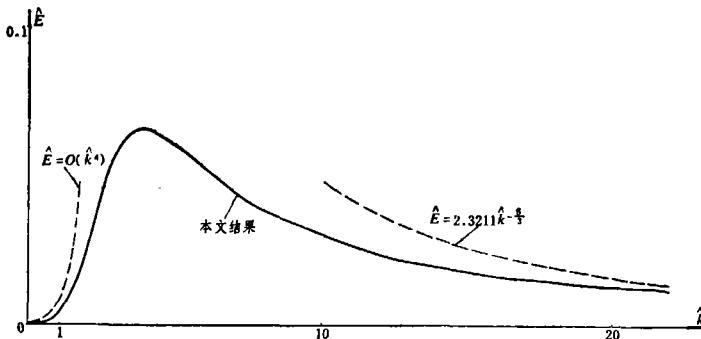


图3 无量纲能谱曲线. 当 $k \rightarrow \infty$ 和 $k \rightarrow 0$ 分别渐近于 “-5/3 定律” 和 $O(k^4)$.

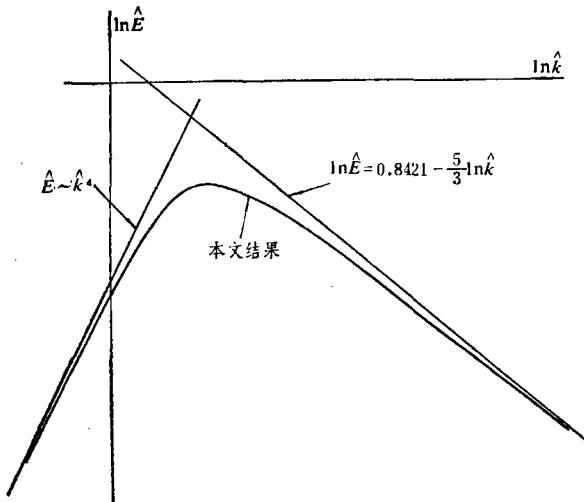


图4 $\ln \hat{E} \sim \ln \hat{k}$ 关系曲线. 两条直线分别代表 \hat{k} 大时的 “-5/3 定律” 和 \hat{k} 小时的渐近性态 $\hat{E} \sim \hat{k}^4$

八、能谱函数当 $k \rightarrow \infty$ 的渐近式

在本节中, 我们将从 $R(r)$ 当 $r \rightarrow 0$ 的渐近式直接地推导出 $E(k)$ 当 $k \rightarrow \infty$ 的渐近式. 应当指出, 本节所述的推导方法是与本文中引进的 “平均化假设” 无关的. 换言之, 本节导出

的结果[见(8.41)和(8.42)式]是惯性子范围内的精确结果. 为了从 $R(r)$ 当 $r \rightarrow 0$ 的渐近式导出 $E(k)$ 当 $k \rightarrow \infty$ 的渐近式, 我们首先来叙述如下引理:

引理 若 $F(\hat{r})$ 在 $(0, \infty)$ 有连续的二阶微商, 且满足

$$(i) \quad F \sim \hat{r} - \alpha \hat{r}^{5/3}, \quad (\alpha > 0), \quad \text{当 } \hat{r} \rightarrow 0 \quad (8.1)$$

$$(ii) \quad F(\hat{r}) \rightarrow 0, \quad F'(\hat{r}) \rightarrow 0, \quad F''(\hat{r}) \rightarrow 0, \quad \text{当 } \hat{r} \rightarrow \infty \quad (8.2)$$

(iii) $F''(\hat{r})$ 在 $(0, \infty)$ 中至多振荡有限次, 换言之, $(0, \infty)$ 可分成有限个使 $F''(\hat{r})$ 单调的区间, 则积分

$$\hat{E}(\hat{k}) = \frac{2\hat{k}}{\pi} \int_0^\infty F(\hat{r}) \sin \hat{k}\hat{r} d\hat{r} \quad (8.3)$$

当 $\hat{k} \rightarrow \infty$ 的渐近式为

$$\hat{E} \sim \frac{10\sqrt{3}}{9\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \alpha \hat{k}^{-5/3} \quad \text{当 } \hat{k} \rightarrow \infty \quad (8.4)$$

证明 首先, 将(8.3)式右端进行两次分部积分, 并利用条件(8.2), 得到

$$\hat{E}(\hat{k}) = -\frac{2}{\pi\hat{k}} \int_0^\infty F''(\hat{r}) \sin \hat{k}\hat{r} d\hat{r} \quad (8.5)$$

令

$$\xi = \hat{k}\hat{r} \quad (8.6)$$

得

$$\hat{E}(\hat{k}) = -\frac{2}{\pi\hat{k}^2} \int_0^\infty F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right) \sin \xi d\xi \quad (8.7)$$

由(8.1)式, 有

$$F''(\hat{r}) \sim -\frac{10}{9} \alpha \hat{r}^{-1/3} \quad \text{当 } \hat{r} \rightarrow 0 \quad (8.8)$$

因此, 对于固定的 ξ , 当 $\hat{k} \rightarrow \infty$ 时, 有

$$F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right) \sim -\frac{10}{9} \alpha \left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right)^{-1/3} \quad \text{当 } \hat{k} \rightarrow \infty \quad (8.9)$$

但在 $\xi \in (0, \infty)$ 整个区间中, 上述渐近过程是不一致的. 因此, 我们不能直接将(8.9)式代入(8.7)式来求 $\hat{E}(\hat{k})$ 当 $\hat{k} \rightarrow \infty$ 的渐近式. 为克服这一困难, 我们将整个积分区间分成两段:

$(0, \hat{k}^{1-\varepsilon})$ 和 $(\hat{k}^{1-\varepsilon}, \infty)$, 其中 ε 是一个小于1的正数:

$$0 < \varepsilon < 1 \quad (8.10)$$

于是, (8.7)式可改写为

$$\hat{E}(\hat{k}) = I_1(\hat{k}) + I_2(\hat{k}) \quad (8.11)$$

其中

$$I_1(\hat{k}) = -\frac{2}{\pi\hat{k}^2} \int_0^{\hat{k}^{1-\varepsilon}} F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right) \sin \xi d\xi \quad (8.12)$$

$$I_2(\hat{k}) = -\frac{2}{\pi\hat{k}^2} \int_{\hat{k}^{1-\varepsilon}}^\infty F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right) \sin \xi d\xi \quad (8.13)$$

由于在第一个积分区间

$$0 < \xi < \hat{k}^{1-\varepsilon} \quad (8.14)$$

中, 一致地有

$$0 < \frac{\xi}{\hat{k}} < \hat{k}^{-\sigma} \quad (8.15)$$

因此, 当 $\hat{k} \rightarrow \infty$ 时, 渐近式 (8.9) 在第一个积分区间中是一致地成立的. 再注意到

$$\hat{k}^{1-\sigma} \rightarrow \infty \quad \text{当 } \hat{k} \rightarrow \infty \quad (8.16)$$

于是, 我们有

$$I_1(\hat{k}) \sim \frac{20}{9\pi} \alpha \hat{k}^{-\sigma/3} \int_0^\infty \xi^{-1/3} \sin \xi d\xi \quad (8.17)$$

容易证明

$$\int_0^\infty \xi^{-1/3} \sin \xi d\xi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \quad (8.18)$$

于是有

$$I_1(\hat{k}) \sim \frac{10\sqrt{3}}{9\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \alpha \hat{k}^{-\sigma/3} \quad (8.19)$$

我们再来证明, 当 $\hat{k} \rightarrow \infty$ 时, $I_2(\hat{k})$ 是比 $I_1(\hat{k})$ 更高阶的无穷小量. 由于区间

$$0 < \hat{\rho} < \infty \quad (8.20)$$

可分成有限个 (N 个) 使 $F''(\hat{\rho})$ 单调的区间. 因此, 区间

$$0 < \xi < \infty \quad (8.21)$$

也必然可分成 N 个使 $F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right)$ 单调的区间. 因此, $I_2(\hat{k})$ 的积分区间中也一定只有有限个

(例如 N_1 个) 使 $F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right)$ 单调的区间. 注意, N_1 可能与 \hat{k} 有关, 但 N 与 \hat{k} 无关. 我们将这些

(N_1 个) 使 $F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right)$ 单调的区间记为

$$(a_0 = \hat{k}^{1-\sigma}, a_1), (a_1, a_2), \dots, (a_{N_1-1}, \infty)$$

于是

$$I_2(\hat{k}) = -\frac{2}{\pi \hat{k}^2} \left[\int_{a_0}^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \dots + \int_{a_{N_1-1}}^\infty \right] F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right) \sin \xi d\xi \quad (8.22)$$

(8.22) 式中的最后一个积分自然可记作

$$\lim_{a_{N_1} \rightarrow \infty} \int_{a_{N_1-1}}^{a_{N_1}} F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right) \sin \xi d\xi \quad (8.23)$$

对 (8.22) 中的每一个积分使用第二积分中值公式, 并利用 (8.23) 式, 得:

$$\begin{aligned} I_2(\hat{k}) = & \frac{-2}{\pi \hat{k}^2} \left\{ \left[F''\left(\frac{a_0}{\hat{k}}\right) \int_{a_0}^{\xi_1} \sin \xi d\xi + F''\left(\frac{a_1}{\hat{k}}\right) \int_{\xi_1}^{a_1} \sin \xi d\xi \right] \right. \\ & + \dots \\ & \left. + \left[F''\left(\frac{a_{N_1-1}}{\hat{k}}\right) \int_{a_{N_1-1}}^{\xi_{N_1}} \sin \xi d\xi + \lim_{a_{N_1} \rightarrow \infty} F''\left(\frac{a_{N_1}}{\hat{k}}\right) \int_{\xi_{N_1}}^{a_{N_1}} \sin \xi d\xi \right] \right\} \quad (8.24) \end{aligned}$$

由于对任何 A, B 有

$$\left| \int_A^B \sin \xi d\xi \right| = |\cos B - \cos A| \leq 2 \quad (8.25)$$

以及

$$N_1 \leq N \quad (\text{与 } \hat{k} \text{ 无关}) \quad (8.26)$$

我们有

$$|I_2(\hat{k})| \leq \frac{2}{\pi \hat{k}^2} \cdot 4N \max_{\substack{a_0 \leq \xi < \infty \\ (\text{固定 } \hat{k})}} \left| F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right) \right| \quad (8.27)$$

注意到

$$\frac{a_0}{\hat{k}} = \hat{k}^{-\epsilon} \rightarrow 0 \quad \text{当 } \hat{k} \rightarrow \infty \quad (8.28)$$

以及 $F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right)$ 连续, 且当 $\xi \rightarrow \infty$ 时 (\hat{k} 固定), $F'' \rightarrow 0$ 的性质, 并注意到 (8.9) 式, 我们知道, 当 \hat{k} 充分大时,

$$\max_{\substack{a_0 \leq \xi < \infty \\ (\text{固定 } \hat{k})}} \left| F''\left(\frac{\xi}{\hat{k}}\right) \right| = \left| F''\left(\frac{a_0}{\hat{k}}\right) \right| \quad (8.29)$$

代回 (8.27), 并利用 (8.9) 式, 得到

$$|I_2(\hat{k})| \lesssim \frac{2}{\pi \hat{k}^2} \cdot 4N \frac{10}{9} \alpha \left(\frac{a_0}{\hat{k}}\right)^{-1/3} \quad (8.30)$$

再利用 (8.28) 式, 得

$$|I_2(\hat{k})| \lesssim \frac{80N}{9\pi} \alpha \hat{k}^{-2+\epsilon/3} \quad (8.31)$$

由于 $\epsilon < 1$ (见 (8.10) 式), $I_2(\hat{k})$ 确是比 $I_1(\hat{k})$ 更高阶的无穷小量, 因此, 最后得到

$$\hat{E}(\hat{k}) \sim \frac{10\sqrt{3}}{9\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \alpha \hat{k}^{-5/3} \quad \text{当 } \hat{k} \rightarrow \infty \quad (8.32)$$

引理证完.

由 (5.5) 式, 可得其无量纲形式 [利用 (6.7) 式, (6.8) 式]

$$\hat{D}_{11} \sim (12)^{1/3} \hat{r}^{2/3} \quad \text{当 } \hat{r} \rightarrow 0 \quad (8.33)$$

再由 (6.10)、(6.15)、(7.4) 式, 得到 f , g 和 \hat{R} 当 $\hat{r} \rightarrow 0$ 的渐近式:

$$f \sim 1 - (12)^{1/3} \hat{r}^{2/3} \quad (8.34)$$

$$g \sim 1 - \frac{4}{3} (12)^{1/3} \hat{r}^{2/3} \quad (8.35)$$

$$\hat{R} \sim 1 - \frac{11}{9} (12)^{1/3} \hat{r}^{2/3} \quad (8.36)$$

如令

$$F(\hat{r}) = \hat{r} \hat{R}(\hat{r}) \quad (8.37)$$

则 $F(\hat{r})$ 显然满足上述引理的全部条件, 相应的 α 值为

$$\alpha = \frac{11}{9} (12)^{1/3} \quad (8.38)$$

于是, 由(8.4)式, 得

$$\hat{E} = \frac{110\sqrt{3}}{81\pi} (12)^{1/3} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \hat{k}^{-5/3} \quad \text{当 } \hat{k} \rightarrow \infty \quad (8.39)$$

算出这个系数的数值, 得到

$$\hat{E} = 2.3211 \hat{k}^{-5/3} \quad \text{当 } \hat{k} \rightarrow \infty \quad (8.40)$$

回到有量纲形式, (8.39)、(8.40)式分别变成

$$E = \frac{165\sqrt{3}}{81\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{25}\right)^{1/3} |S|^{-2/3} \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad \text{当 } k \rightarrow \infty \quad (8.41)$$

和

$$E = 0.65528 |S|^{-2/3} \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad \text{当 } k \rightarrow \infty \quad (8.42)$$

应指出, (8.39)——(8.42)为惯性子范围的“ $-5/3$ 定律”的精确表达式, 与本文中引入的平均化假设无关。

九、结 语

本文这一部分的基本想法是设法将弥散系综与全系综(或者, 拉格朗日观点与欧拉观点)联系起来, 从而由弥散运动的已知结果来求出感兴趣的欧拉观点的物理量。至于在数学处理上, 则采用了尽量简单的模型(平均化假设)。这一具体模型当然是可以进一步改进的。此外, 还应指出, 弥散运动本身的规律是建立在 Langevin 模型基础上的, 而 Langevin 模型本身也是一种近似模型。由于上述两个原因, 都给本文结果带来了一定的近似性。尽管如此, 我们仍得到包括 Kolmogoroff 惯性子范围“ $2/3$ 定律”和“ $-5/3$ 定律”在内, 并在整个含能范围和更大尺度范围都定性合理、定量上也和实验符合很好的结果。我们认为, 这表明把拉格朗日观点同欧拉观点联系起来对于解决湍流理论所面临的困难可能是一条值得进一步探索的途径。

最后我们指出, 当 $r \rightarrow 0$ (或 $k \rightarrow \infty$) 时, 本结果只能渐近于 Kolmogoroff 惯性子范围的解, 而不能反映耗损范围的情况。这就是为什么本文的 $f(r)$ 和 Kolmogoroff “ $2/3$ 定律”一样在 $r=0$ 处出现尖角而不满足 $f'(0)=0$ 的原因。这在 Kolmogoroff “ $2/3$ 定律”是由于忽略了粘性, 在本文则是由于所用弥散规律在 $t \ll T_*$ 不适用 (Markov 性不满足^[1]) 的缘故。

参 考 文 献

- [1] 岳曾元等, 中国科学, 2(1974), 181-192.
- [2] 奥布霍夫, A. M., A. M., 雅格洛姆, 《湍流的微结构》, 庄逢甘, 胡海昌译, (1953).
- [3] Hinze, J. O., *Turbulence*, (1959).

The Relation between the Markov Process Theory and
Kolmogoroff's Theory of Turbulence and the Ex-
tension of Kolmogoroff's Laws—(II) The Ex-
tension of Kolmogoroff's "2/3 Law" and
" - 5/3 Law"

Yue Zeng-yuan Zhang Bin

(*Department of Geophysics, Peking University, Beijing*)

Abstract

Based on the physical analysis in part I of this paper, we shall establish the quantitative relation between the Markov process theory of two-particle's dispersion in a turbulence of very large Reynolds number and the Kolmogoroff's theory. In terms of this relation and the results of two-particle's dispersion, we shall obtain the structure functions, the correlation functions and the energy spectrum, which are applicable not only to the inertial subrange, but also to the whole range of the wave number less than that in the inertial subrange. The Kolmogoroff's "2/3 law" and "-5/3 law" are the asymptotic case of the present result for small r (or large k). Thus, the present result is an extension of Kolmogoroff's laws.