应用数学和力学，第4卷第2期（1983年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

非线性薄壳理论的研究*

吴 沈 荣

（复旦大学，1982年6月10日收到）

摘 要

利用正交多项式系上的 Fourier 展开就容易由方程的解直接得到位移和应力的明确表示．从薄壳的虚功原理出发导出各阶平衡方程．作为数学分析的基础，证明了关于 Legendre 级数逐项求导的定理．从而明确了对函数的要求，分析便不再只是形式的了．具体给出了三阶近似的平衡方程，可供对低阶近似的精度分析作参考．分析说明直法线理论只能是一阶的近似，法线无伸长地倾斜的假设本质上也是一阶的近似．

一、引 论

随着工业的发达，科学技术的发展，板壳结构广为应用，板壳理论受到了普遍的重视．几十年来许多学者致力于板壳理论特别是大挠度理论的研究，出现了不少从不同观点出发、以不同方法得到的非线性基本方程．可以说最早的非线性板方程是 Saint-Venant[1] 在1883年作出的．在圆柱壳稳定性研究中 Donnell[2]最早采用了非线性方程．von Kármán 和我国学者钱学森[3],[4]也作出过重要贡献．钱伟长[5]最早用张量形式就一般坐标较系统地分析了板壳非线性方程．在近二十年出现的文献中，Naghdi 与 Nordgren[6]，Seide[7] 和 Başar[8]讨论了 Kirchhoff-Love 直法线假设下的大挠度弹性方程．Sanders[9] 和 Budiansky[10] 则包含了横剪，他们假设法线无伸长地变成倾斜的直线．Reissner[11] 和 Schmidt[12] 在平板中假设面内位移沿厚度的分布为类似于梁中剪力引起的那种三次式．Berstein[13]，Ebicioglu[14]，Biricikoglu 与 Kalnins[15] 和 Pietraszkiewicz[16]还考虑了厚度方向的变形．仍假定法线变形成直线，但可以伸长、倾斜，而应变 γ_{33} 沿厚度不变．在[14]和[16]中引入了应力的二次矩．以上，位移沿厚度的变化均只用零次和一次分量（[11]，[12]的三次项是设定的，不作为独立变量）．Wempner 与 Hwang[17] 用了 Legendre 多项式上的展开形式，应变展开二项，本质上和上述的一样．Abé[18] 则用到了二次分量．Krätzig[19] 和 Yokoo 与 Matsunaga[20] 用 x_3 的幂级数展开写出了有关位移的高次分量和力的高次矩的各阶方程．有关的文献近年来还在不断涌现．

若按[19]或[20]的方程求解，即使得到了所有应力的矩，还不能直接得到应力的表示．本文采用在 Legendre 多项式系上的 Fourier 展开，就能方便地得到应力的表示．在一些情况下缺乏应力表示将是不方便的．另外，[19]和[20]未能说明所用函数的允许范围，因而无穷级数只是形式的表示，未免是一遗憾．可说这是一般近似理论的一种推广．本文证明一

* 欧阳鬯推荐．

个关于 Legendre 级数逐项求导的定理，从而可以明确对函数的要求，级数便真正地而不是形式地表示了函数本身。因而本文不能是[17]简单的形式的推广。与[17]相比，使用了无穷项才真正体现出 Legendre 多项式正交性的优点。

如果把所用位移和应变沿厚度变化分量的阶次作为近似理论的阶次，则可以说薄膜近似是零阶近似，直法线理论为一阶近似。本文在推导出无穷阶方程的基础上具体写出了三阶近似所用的平衡方程，提供为低阶近似精度分析作参考。简化到一阶时，就和前述文献所得一致。从中也可看出直法线理论只能是一阶的近似，包含横剪而假定法线无伸长地倾斜的理论实则上也是一阶近似。

只要是从虚功原理出发而不是立足于弹性应变能的变分，那么所得方程就本质上适用于任意的材料。本文就不再讨论本构关系了。

二、正交多项式系上的展开

利用 Legendre多项式$p_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$的正交性$\int_{-1}^{1}p_m(x)p_n(x)dx=\frac{2}{2n+1}\delta_{mn}$，

如果定义 Hilbert 空间 $\mathscr{H}=L^2\left(-\frac{h}{2},\ \frac{h}{2}\right)$的内积为

$$\langle f,\ g\rangle=\frac{2}{h}\int_{-h/2}^{h/2}f(z)g(z)dz \qquad f,g\in\mathscr{H} \tag{2.1}$$

就可用$\left\{q_n(z)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}p_n\left(\frac{2}{h}z\right),n=0,1,2,\cdots\right\}$作为$\mathscr{H}$的就范正交系。$\mathscr{H}$中的任意元素就可展为$\{q_n(z)\}$的 Fourier 级数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{f}q_n(z)\ ;\ \overset{n}{f}=\langle f(z),\ q_n(z)\rangle \qquad \forall f\in\mathscr{H} \tag{2.2}$$

且成立 Parseval 等式[21]

$$\langle f(z),\ g(z)\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{f}\overset{n}{g} \qquad \forall f,\ g\in\mathscr{H} \tag{2.3}$$

因为q_n是n次多项式，且n为奇（或偶）数时p_n只含奇（偶）次项，我们记

$$q_n(z)q_k(z)=\sum_{j=0}^{n+k}c_{nk}^{j}q_j(z),\ \ j+n+k=\text{奇数的}\ c_{nk}^{j}=0 \tag{2.4}$$

$$\frac{dq_n(z)}{dz}=\frac{1}{h}\sum_{k=0}^{n-1}d_n^k q_k(z),\ \ k+n=\text{偶数的}\ d_n^k=0 \tag{2.5}$$

利用递推关系 $xp_n(x)=\frac{1}{2n+1}[(n+1)p_{n+1}(x)+np_{n-1}(x)]$，又可记

$$zq_n(z)=h(c_n^{n+1}q_{n+1}+c_n^{n-1}q_{n-1}),\ \ \text{从此记}\ (^{-1})=0 \tag{2.4$'$}$$

下面引述几条性质作为引理，再证明一个定理。

引理 1：$p_n(1)=1$，$p_n(-1)=(-1)^n$　([22]p. 180)　(2.6)

$$p'_{n+1}(x)-p'_{n-1}(x)=(2n+1)p_n(x) \tag{2.7}$$

引理 2：$\left|\dfrac{dp_n(x)}{dx}\right|<\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\dfrac{\sqrt{n}}{1-x^2}$，$|x|<1$，$n=1,2,\cdots$([22]p.201)　(2.8)

引理 3：若 $F(x)$ 为 $[-1,1]$ 上的有界变差函数，$|F(x)|\leqslant M$，V 为其全变差，则 Legendre 系数（[22]p.203）

$$|a_n|=\left|\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}F(x)p_n(x)dx\right|<\frac{4}{\sqrt{\pi}}\frac{M+V}{\sqrt{n+1}} \tag{2.9}$$

引理 4：$f(x)$ 在 $[-1,1]$ 有二阶连续导数，则它可以按 Legendre 多项式展开成一致收敛的 Fourier 级数（[23]p.98）

定理：若 $f(x)\in C^3[-1,1]$，则 $f(x)$ 的 Legendre 级数可在 $(-1,1)$ 逐项求导。即

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_np_n(x)，\quad f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_np'_n(x)。$$

证明：$f,f'\in C^2[-1,1]$，且平方可积．按引理 4 可展成一致收敛的 Legendre 级数

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_np_n(x),\qquad a_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)p_n(x)dx \tag{2.10}$$

$$f'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_np_n(x),\qquad b_n=\frac{2n+1}{2}\int_{-1}^{1}f'(x)p_n(x)dx \tag{2.11}$$

由(2.7)

$$a_n=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(p'_{n+1}-p'_{n-1})dx=\frac{f}{2}(p_{n+1}-p_{n-1})\Big|_{-1}^{1}-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f'(p_{n+1}-p_{n-1})dx,$$

利用（2.6）得

$$a_n=-\frac{b_{n+1}}{2n+3}+\frac{b_{n-1}}{2n-1}$$

注意到

$$p'_0=0,$$

$$\sum_{n=0}^{N}a_np'_n=\sum_{n=1}^{N}\left(-\frac{b_{n+1}}{2n+3}+\frac{b_{n-1}}{2n-1}\right)p'_n$$

$$=\sum_{k=2}^{N-1}\left(-\frac{b_k}{2k+1}p'_{k-1}+\frac{b_k}{2k+1}p'_{k+1}\right)$$

$$+b_0p'_1+\frac{b_1}{3}p'_2-\left(\frac{b_N}{2N+1}p'_{N-1}+\frac{b_{N+1}}{2N+3}p'_N\right)$$

第一项级数与 Σb_kp_k 一样是一致收敛的。$f\in C^3[-1,1]$，f' 是有界变差的，由（2.8）、(2.9) 知 $b_Np'_{N\pm1}$ 在（$-1,1$）内闭一致有界，故 $N\to\infty$ 时最后一个括号内闭一致收敛于 0。由此证得在 $(-1,1)$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_np'_n$ 内闭匀敛，故 $f'(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_np'_n(x)$。

三、应 变 分 析

采用Flügge[24]的张量记号和几何描述，若中面用二维坐标系$\{x^\alpha\}$ $(\alpha=1,2)$的点$\vec{r}_0$表示，再在法向取x^3。基向量 $\vec{a}_\alpha=\vec{r}_{0,\alpha}$ $\vec{a}_3=\vec{a}^3$ 为单位向量。而壳体空间标架的基向量 $\vec{g}_\alpha=\mu_\alpha^\beta\vec{a}_\beta$，$\vec{g}_3=\vec{a}_3$，$\mu_\alpha^\beta=\delta_\alpha^\beta-zb_\alpha^\beta$。$b_\alpha^\beta$是中面曲率张量。于是各种变量均可看作是定义在中面坐标系$\{x^\alpha, z\}$上的。原来位于$\vec{r}=\vec{r}_0+z\vec{a}_3$ 的点变形后到达 $\hat{r}=\vec{r}+\vec{v}$，位移

$$\vec{v}=u_\phi\vec{a}^\phi+u_3\vec{a}_3 \tag{3.1}$$

$$\left.\begin{aligned}\hat{r}_{,\alpha}&=\vec{r}_{,\alpha}+u_\phi|_\alpha\vec{a}^\phi+u_3|_\alpha\vec{a}_3=\mu_\alpha^\delta\vec{a}_\delta+\phi_{\delta\alpha}\vec{a}^\delta+\phi_\alpha\vec{a}_3\\ \hat{r}_{,3}&=\vec{r}_{,3}+u_\phi|_3\vec{a}^\phi+u_3|_3\vec{a}_3=\vec{a}_3+\psi_\delta\vec{a}^\delta+\psi\vec{a}_3\end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

这里“|”表示关于$\{x^\alpha,z\}$系的共变导数，以下“‖”为关于 $\{x^\alpha\}$ 系的。

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{\delta\alpha}=u_\delta|_\alpha=u_\delta\|_\alpha-u_3b_{\delta\alpha} \qquad \phi_\alpha=u_3|_\alpha=u_{3,\alpha}+u_\delta b_\alpha^\delta\\ &\psi_\delta=u_\delta|_3=u_{\delta,3}+u_\eta b_\delta^\eta \qquad \psi=u_3|_3=u_{3,3}\end{aligned}\right\} \tag{3.3}$$

假定 $u_i\in C^3(\bar{\Omega})$，$\Omega=D(x^1,x^2)\times\left(-\frac{h}{2},\frac{h}{2}\right)$，则 $\phi_{\delta\alpha}$，ϕ_α，ψ_δ，$\phi\in C^2(\bar{\Omega})$，可展开为

$$u_\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{u}_\alpha(x^1,x^2)q_n(z) \qquad u_3=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{w}(x^1,x^2)q_n(z) \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{aligned}&\phi_{\delta\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{\phi}_{\delta\alpha}(x^1,x^2)q_n(z) \qquad \phi_\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{\phi}_\alpha(x^1,x^2)q_n(z)\\ &\psi_\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{\psi}_\alpha(x^1,x^2)q_n(z) \qquad \psi=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{\psi}(x^1,x^2)q_n(z)\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

$$\overset{n}{\phi}_{\delta\alpha}=\overset{n}{u}_\delta\|_\alpha-\overset{n}{w}b_{\delta\alpha} \qquad \overset{n}{\phi}_\alpha=\overset{n}{w}_{,\alpha}+\overset{n}{u}_\delta b_\alpha^\delta \tag{3.6}$$

$$\overset{n}{\psi}_\alpha=\overset{n}{u}_\eta b_\alpha^\eta+\sum_{j=n+1}^{\infty}\overset{j}{u}_\alpha d_j^n\frac{1}{h} \qquad \overset{n}{\psi}=\sum_{j=n+1}^{\infty}\overset{j}{w}d_j^n\frac{1}{h} \tag{3.7}$$

按定义，Green应变的分量$\gamma_{ij}=\frac{1}{2}(\hat{r}_{,i}\cdot\hat{r}_{,j}-\vec{r}_{,i}\cdot\vec{r}_{,j})$，故

$$\left.\begin{aligned}2\gamma_{\alpha\beta}&=\phi_{\delta\alpha}\mu_\beta^\delta+\phi_{\delta\beta}\mu_\alpha^\delta+\phi_\alpha^\delta\phi_{\delta\beta}+\phi_\alpha\phi_\beta\\ 2\gamma_{\alpha3}&=\phi_\alpha+\psi_\delta\mu_\alpha^\delta+\phi_\alpha^\delta\psi_\delta+\phi_\alpha\psi\\ 2\gamma_{33}&=2\psi+\psi^\delta\psi_\delta+(\psi)^2\end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

利用（2.4）的记号及诸展开式，可写成

$$\begin{aligned}2\gamma_{\alpha\beta}=&\sum_{n=0}^{\infty}\left(\overset{n}{\phi}_{\alpha\beta}+\overset{n}{\phi}_{\beta\alpha}\right)q_n-\sum_{n=0}^{\infty}(hb_\beta^\delta\overset{n}{\phi}_{\delta\alpha}+hb_\alpha^\delta\overset{n}{\phi}_{\delta\beta})(c_n^{n-1}q_{n-1}+c_n^{n+1}q_{n+1})\\ &+\sum_{s,t=0}^{\infty}(\overset{s}{\phi}{}_\alpha^\delta\overset{t}{\phi}_{\delta\beta}+\overset{s}{\phi}_\alpha\overset{t}{\phi}_\beta)\sum_{j=0}^{s+t}c_{st}^jq_j\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}2\gamma_{\alpha 3}=&\sum_{n=0}^{\infty}[(\overset{n}{\phi}_{\alpha}+\overset{n}{\psi}_{\alpha})q_n-hb_{\alpha}^{\delta}(c_n^{n-1}q_{n-1}+c_n^{n+1}q_{n+1})\overset{n}{\psi}_{\delta}]\\&+\sum_{s,t=0}^{\infty}(\overset{s}{\phi}{}_{\alpha}^{\delta}\overset{t}{\psi}_{\delta}+\overset{s}{\phi}_{\alpha}\overset{t}{\psi})\sum_{j=0}^{s+t}c_{st}^{j}q_j\\2\gamma_{33}=&2\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{\psi}q_n+\sum_{s,t=0}^{\infty}(\overset{s}{\psi}{}^{\delta}\overset{t}{\psi}_{\delta}+\overset{s}{\psi}\overset{t}{\psi})\sum_{j=0}^{s+t}c_{st}^{j}q_j\end{aligned}\right\}\tag{3.9}$$

若把应变展开 为 $\gamma_{ij}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\overset{n}{\gamma}_{ij}q_n$，则由上分析，各阶应变分量为

$$\left.\begin{aligned}2\overset{n}{\gamma}_{\alpha\beta}=&\overset{n}{\phi}_{\alpha\beta}+\overset{n}{\phi}_{\beta\alpha}-hb_{\beta}^{\delta}(c_{n+1}^{n}\overset{n+1}{\phi}_{\delta\alpha}+c_{n-1}^{n}\overset{n-1}{\phi}_{\delta\alpha})-hb_{\alpha}^{\delta}(c_{n+1}^{n}\overset{n+1}{\phi}_{\delta\beta}+c_{n-1}^{n}\overset{n-1}{\phi}_{\delta\beta})\\&+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=\max(n-s,0)}^{\infty}c_{st}^{n}(\overset{s}{\phi}{}_{\alpha}^{\delta}\overset{t}{\phi}_{\delta\beta}+\overset{s}{\phi}_{\alpha}\overset{t}{\phi}_{\beta})\\2\overset{n}{\gamma}_{\alpha 3}=&\overset{n}{\phi}_{\alpha}+\overset{n}{\psi}_{\alpha}-hb_{\alpha}^{\delta}(c_{n+1}^{n}\overset{n+1}{\psi}_{\delta}+c_{n-1}^{n}\overset{n-1}{\psi}_{\delta})+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=\max(n-s,0)}^{\infty}c_{st}^{n}(\overset{s}{\phi}{}_{\alpha}^{\delta}\overset{t}{\psi}_{\delta}+\overset{s}{\phi}_{\alpha}\overset{t}{\psi})\\2\overset{n}{\gamma}_{33}=&2\overset{n}{\psi}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{t=\max(n-s,0)}^{\infty}c_{st}^{n}(\overset{s}{\psi}{}^{\delta}\overset{t}{\psi}_{\delta}+\overset{s}{\psi}\overset{t}{\psi})\qquad(\text{记}(\overset{-1}{\ })=0)\end{aligned}\right\}\tag{3.10}$$

四、虚功方程与平衡方程

考虑到运用虚功原理的需要，对 Kirchhoff 应力展开为

$$s^{ij}\mu=\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{s}{}^{ij}q_n\qquad(\mu=\det(\mu_{\beta}^{\alpha}))\quad(\text{设}s^{ij}\in C^2(\bar{\Omega}))\tag{4.1}$$

[19]，[20]实际上是定义了$\overset{n}{N}{}^{ij}=\int_{-h/2}^{h/2}\mu s^{ij}z^n dz$，在求得各阶的矩$\overset{n}{N}{}^{ij}$后并不能直接得到 s^{ij}。(4.1)的$\overset{n}{s}{}^{ij}$形式上只是积分时 z^n 换成了$\frac{2}{h}q_n(z)$，但它们是 Fourier 系数，求得了$\overset{n}{s}{}^{ij}$也就有了 s^{ij}。

不妨把外力虚功都按位移分量简化到中面上表示为

$$\text{外虚功}=\frac{h}{2}\int_{A_0}\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{F}{}^{i}\delta\overset{n}{u}_i\,dA+\frac{h}{2}\int_{L_0}\sum_{n=0}^{\infty}\overset{n}{p}{}^{i}\delta\overset{n}{u}_i\,dl\tag{4.2}$$

从(4.1)和(3.9)或(3.10)出发，利用(2.1)和(2.2)

$$\int_{V_0}s^{ij}\delta\gamma_{ij}\,dV=\int_{-h/2}^{h/2}dz\int_{A}s^{ij}\delta\gamma_{ij}dA=\int_{A_0}dA_0\int_{-h}^{h/2}\mu s^{ij}\delta\gamma_{ij}dz$$

$$=\frac{h}{2}\int_{A_0}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\delta\overset{n}{\phi}_{\alpha\beta}[\overset{n}{s}{}^{\alpha\beta}-hb_{\eta}^{\alpha}(c_n^{n-1}\overset{n-1}{s}{}^{\eta\beta}+c_n^{n+1}\overset{n+1}{s}{}^{\eta\beta})+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}(\overset{j}{s}{}^{\eta\beta}\overset{s}{\phi}{}_{\eta}^{\alpha}+\overset{j}{s}{}^{\alpha 3}\overset{s}{\psi}{}^{\beta})]$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\delta\overset{n}{\phi}_{\alpha}\Big[\overset{n}{s}^{\alpha 3}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\alpha\beta}\overset{s}{\phi}_{\beta}+\overset{j}{s}^{\alpha 3}\overset{s}{\psi}\big)\Big]$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\delta\overset{n}{\psi}_{\alpha}\Big[\overset{n}{s}^{\alpha 3}-hb_{\eta}^{\alpha}\big(c_{n}^{n-1}\overset{n-1}{s}^{\eta 3}+c_{n}^{n+1}\overset{n+1}{s}^{\eta 3}\big)+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\eta 3}\overset{s}{\phi}_{\eta}^{\alpha}+\overset{j}{s}^{33}\overset{s}{\psi}^{\alpha}\big)\Big]$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\delta\overset{n}{\psi}\Big[\overset{n}{s}^{33}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\alpha 3}\overset{s}{\phi}_{\alpha}+\overset{j}{s}^{33}\overset{s}{\psi}\big)\Big]\Big\}dA_{0}$$

用(3.6)、(3.7)的表示式代入，再用 Green 定理分部积分。利用（4.2）的外虚功表示便可得出平衡方程及边界条件

$$-\Big[\overset{n}{s}^{\alpha\beta}-hb_{\eta}^{\alpha}\big(c_{n}^{n-1}\overset{n-1}{s}^{\eta\beta}+c_{n}^{n+1}\overset{n+1}{s}^{\eta\beta}\big)+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\eta\beta}\overset{s}{\phi}_{\eta}^{\alpha}+\overset{j}{s}^{\alpha 3}\overset{s}{\psi}^{\beta}\big)\Big]\Big\|_{\beta}$$

$$+b_{\eta}^{\alpha}\Big[\overset{n}{s}^{\eta 3}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\eta\beta}\overset{s}{\phi}_{\beta}+\overset{j}{s}^{\eta 3}\overset{s}{\psi}\big)\Big]$$

$$+\sum_{t=0}^{n-1}h^{-1}d_{n}^{t}\Big[\overset{t}{s}^{\alpha 3}-hb_{\eta}^{\alpha}\big(c_{t}^{t-1}\overset{t-1}{s}^{\eta 3}+c_{t}^{t+1}\overset{t+1}{s}^{\eta 3}\big)+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+t}c_{st}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\eta 3}\overset{s}{\phi}_{\eta}^{\alpha}+\overset{j}{s}^{33}\overset{s}{\psi}^{\alpha}\big)\Big]$$

$$+b_{\eta}^{\alpha}\Big[\overset{n}{s}^{\eta 3}-hb_{\delta}^{\eta}\big(c_{n}^{n-1}\overset{n-1}{s}^{\delta 3}+c_{n}^{n+1}\overset{n+1}{s}^{\delta 3}\big)+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\delta 3}\overset{s}{\phi}_{\delta}^{\eta}+\overset{j}{s}^{33}\overset{s}{\psi}^{\eta}\big)\Big]=\overset{n}{F}^{\alpha} \quad (4.3a)$$

$$-b_{\alpha\beta}\Big[\overset{n}{s}^{\alpha\beta}-hb_{\eta}^{\alpha}\big(c_{n}^{n-1}\overset{n-1}{s}^{\eta\beta}+c_{n}^{n+1}\overset{n+1}{s}^{\eta\beta}\big)+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\eta\beta}\overset{s}{\phi}_{\eta}^{\alpha}+\overset{j}{s}^{\alpha 3}\overset{s}{\psi}^{\beta}\big)\Big]$$

$$-\Big[\overset{n}{s}^{\alpha 3}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\alpha\beta}\overset{s}{\phi}_{\beta}+\overset{j}{s}^{\alpha 3}\overset{s}{\psi}\big)\Big]\Big\|_{\alpha}$$

$$+\sum_{t=0}^{n-1}h^{-1}d_{n}^{t}\Big[\overset{t}{s}^{33}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+t}c_{st}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\alpha 3}\overset{s}{\phi}_{\alpha}+\overset{j}{s}^{33}\overset{s}{\psi}\big)\Big]=\overset{n}{F}^{3} \qquad (A_0\text{上}) \qquad (4.3b)$$

$$\left.\begin{aligned}&\Big[\overset{n}{s}^{\alpha\beta}-hb_{\eta}^{\alpha}\big(c_{n}^{n-1}\overset{n-1}{s}^{\eta\beta}+c_{n}^{n+1}\overset{n+1}{s}^{\eta\beta}\big)+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\eta\beta}\overset{s}{\phi}_{\eta}^{\alpha}+\overset{j}{s}^{\alpha 3}\overset{s}{\psi}^{\beta}\big)\Big]\nu_{\beta}=\overset{n}{p}^{\alpha} \quad \text{或}\ \delta\overset{n}{u}_{\alpha}=0\\&\Big[\overset{n}{s}^{\alpha 3}+\sum_{s=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{s+n}c_{sn}^{j}\big(\overset{j}{s}^{\alpha\beta}\overset{s}{\phi}_{\beta}+\overset{j}{s}^{\alpha 3}\overset{s}{\psi}\big)\Big]\nu_{\alpha}=\overset{n}{p}^{3} \quad \text{或}\ \delta\overset{n}{w}=0 \quad (L_0\text{上})\end{aligned}\right\} \qquad (4.4)$$

五、三 阶 近 似

就常用的近似假设处理大挠度小应变的问题。假定：（1）厚度与曲率半径相比为小量，

$|hb^{\alpha}_{\beta}|\ll 1$. $\overset{0}{w}$可以达到h的量级而其它位移分量均认为$\ll h$.（2）$\overset{0}{s}{}^{\alpha\beta}$，$\overset{1}{s}{}^{\alpha\beta}$对应于膜应力和弯矩而更高阶的$\overset{2}{s}{}^{\alpha\beta}$，$\overset{3}{s}{}^{\alpha\beta}$认为是较小的量。只在零级方程中保留高一级的$\overset{1}{s}{}^{\alpha\beta}$.（3）横向应力、应变较小，不保留高一级的量.（4）同级的项中除与$\overset{0}{w}{}_{,\alpha}$有关的二次项外只保留一次项。保留低阶量的二次项. 同阶量带有hb^{α}_{β}或应变分量的因子时相对地就是更小的量而予略去。

基于上述假设的三阶近似方程可写成

A_0上：
$$-(\overset{0}{s}{}^{\alpha\beta}-c_0^1 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{1}{s}{}^{\eta\beta})\|_{\beta}+2b^{\alpha}_{\eta}\overset{0}{s}{}^{\eta3}+c^0_{00}b^{\alpha}_{\eta}\overset{0}{s}{}^{\eta\beta}\overset{0}{w}{}_{,\beta}=\overset{0}{F}{}^{\alpha} \tag{5.1a}$$

$$-(\overset{1}{s}{}^{\alpha\beta}-c_1^0 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{0}{s}{}^{\eta\beta})\|_{\beta}+h^{-1}d^0_1\overset{0}{s}{}^{\alpha3}+c^0_{00}d^0_1 h^{-1}\overset{0}{s}{}^{33}\overset{0}{\psi}{}^{\alpha}+b^{\alpha}_{\eta}c^0_{01}\overset{1}{s}{}^{\eta\beta}\overset{0}{w}{}_{,\beta}=\overset{1}{F}{}^{\alpha} \tag{5.1b}$$

$$\begin{aligned}&-(\overset{2}{s}{}^{\alpha\beta}-c_2^1 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{1}{s}{}^{\eta\beta})\|_{\beta}+h^{-1}d^1_2(\overset{1}{s}{}^{\alpha3}-c_1^0 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{0}{s}{}^{\eta3})+c^2_{02}b^{\alpha}_{\eta}\overset{2}{s}{}^{\eta\beta}\overset{0}{w}{}_{,\beta}\\&\quad-c^1_{12}(\overset{1}{s}{}^{\eta\beta}\overset{1}{\phi}{}^{\alpha}_{\eta})\|_{\beta}+b^{\alpha}_{\eta}c^1_{12}\overset{1}{s}{}^{\eta\beta}\overset{1}{\phi}_{\beta}+h^{-1}d^1_2[c^0_{11}(\overset{0}{s}{}^{\eta3}\overset{1}{\phi}{}^{\alpha}_{\eta}+\overset{0}{s}{}^{33}\overset{1}{\psi}{}^{\alpha})+c^1_{01}\overset{1}{s}{}^{33}\overset{0}{\psi}{}^{\alpha}]=\overset{2}{F}{}^{\alpha}\end{aligned} \tag{5.1c}$$

$$\begin{aligned}&-(\overset{3}{s}{}^{\alpha\beta}-hb^{\alpha}_{\eta}c^2_3\overset{2}{s}{}^{\eta\beta})\|_{\beta}+h^{-1}d^0_3\overset{0}{s}{}^{\alpha3}+c^3_{03}b^{\alpha}_{\eta}\overset{3}{s}{}^{\eta\beta}\overset{0}{w}{}_{,\beta}\\&\quad-\sum_{(j,s)=(0,1),(1,2)(2,1)}c^j_{s3}(\overset{j}{s}{}^{\eta\beta}\overset{s}{\phi}{}^{\alpha}_{\eta})\|_{\beta}+b^{\alpha}_{\eta}\Big[c^1_{23}\overset{1}{s}{}^{33}\overset{2}{\psi}{}^{\eta}+c^2_{13}\overset{2}{s}{}^{33}\overset{1}{\psi}{}^{\eta}\\&\quad+\sum_{(j,s)=(0,1),(1,2),(2,1)}c^j_{s3}\overset{j}{s}{}^{\eta\beta}\overset{s}{\phi}_{\beta}\Big]\\&\quad+h^{-1}\sum_{(j,s,t)=(0,0,0),(1,1,0),(2,2,0),(1,1,2),(0,2,2),(2,0,2),(2,2,2)}d^t_3c^j_{st}\overset{j}{s}{}^{33}\overset{s}{\psi}{}^{\alpha}=\overset{3}{F}{}^{\alpha}\end{aligned} \tag{5.1d}$$

$$-b_{\alpha\beta}(\overset{0}{s}{}^{\alpha\beta}-c_0^1 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{1}{s}{}^{\eta\beta})-(\overset{0}{s}{}^{\alpha3}+c^0_{00}\overset{0}{s}{}^{\alpha\beta}\overset{0}{w}{}_{,\beta})\|_{\alpha}=\overset{0}{F}{}^{3} \tag{5.2a}$$

$$-b_{\alpha\beta}(\overset{1}{s}{}^{\alpha\beta}-c_1^0 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{0}{s}{}^{\eta\beta})-(\overset{1}{s}{}^{\alpha3}+c^1_{01}\overset{1}{s}{}^{\alpha\beta}\overset{0}{w}{}_{,\beta})\|_{\alpha}+h^{-1}d^0_1(\overset{0}{s}{}^{33}+c^0_{00}\overset{0}{s}{}^{\alpha3}\overset{0}{\phi}_{\alpha})=\overset{1}{F}{}^{3} \tag{5.2b}$$

$$\begin{aligned}&-b_{\alpha\beta}(\overset{2}{s}{}^{\alpha\beta}-c_2^1 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{1}{s}{}^{\eta\beta})-\overset{2}{s}{}^{\alpha3}\|_{\alpha}+h^{-1}d^1_2\overset{1}{s}{}^{33}-c^2_{02}(\overset{2}{s}{}^{\alpha\beta}\overset{0}{w}{}_{,\beta})\|_{\alpha}-b_{\alpha\beta}c^1_{12}\overset{1}{s}{}^{\eta\beta}\overset{1}{\phi}{}^{\alpha}_{\eta}\\&\quad+h^{-1}d^1_2[c^0_{11}(\overset{0}{s}{}^{33}\overset{1}{\psi}+\overset{0}{s}{}^{\alpha3}\overset{1}{\phi}_{\alpha})+c^1_{01}\overset{1}{s}{}^{\alpha3}\overset{0}{\phi}_{\alpha}]-c^1_{12}(\overset{1}{s}{}^{\alpha\beta}\overset{1}{\phi}_{\beta}+\overset{1}{s}{}^{\alpha3}\overset{1}{\psi})\|_{\alpha}=\overset{2}{F}{}^{3}\end{aligned} \tag{5.2c}$$

$$\begin{aligned}&-b_{\alpha\beta}(\overset{3}{s}{}^{\alpha\beta}-c_3^2 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{2}{s}{}^{\eta\beta})-\overset{3}{s}{}^{\alpha3}\|_{\alpha}+h^{-1}d^0_3\overset{0}{s}{}^{33}-c^3_{03}(\overset{3}{s}{}^{\alpha\beta}\overset{0}{w}{}_{,\beta})\|_{\alpha}+h^{-1}d^0_3c^0_{00}\overset{0}{s}{}^{\alpha3}\overset{0}{\phi}_{\alpha}\\&\quad-\sum_{(j,s)=(2,1),(1,2)}c^j_{s3}[b_{\alpha\beta}(\overset{j}{s}{}^{\eta\beta}\overset{s}{\phi}{}^{\alpha}_{\eta}+\overset{j}{s}{}^{\alpha3}\overset{s}{\psi}{}^{\beta})+(\overset{j}{s}{}^{\alpha\beta}\overset{s}{\phi}_{\beta}+\overset{j}{s}{}^{\alpha3}\overset{s}{\psi})\|_{\alpha}]=\overset{3}{F}{}^{3}\end{aligned} \tag{5.2d}$$

L_0上：
$$(\overset{0}{s}{}^{\alpha\beta}-c_0^1 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{1}{s}{}^{\eta\beta})\nu_{\beta}=\overset{0}{p}{}^{\alpha}\quad\text{或}\ \delta\overset{0}{u}_{\alpha}=0 \tag{5.3a}$$

$$(\overset{1}{s}{}^{\alpha\beta}-c_1^0 hb^{\alpha}_{\eta}\overset{0}{s}{}^{\eta\beta})\nu_{\beta}=\overset{1}{p}{}^{\alpha}\quad\text{或}\ \delta\overset{1}{u}_{\alpha}=0 \tag{5.3b}$$

$$[\overset{2}{s}^{\alpha\beta}-c_2^1 hb_\eta^\alpha \overset{1}{s}^{\eta\beta}+c_{12}^1\ (\overset{1}{s}^{\eta\beta}\overset{1}{\phi}_\eta^\alpha+\overset{1}{s}^{\alpha 3}\ \overset{1}{\psi}\beta)]\nu_\beta=\overset{2}{p}^\alpha \quad \text{或}\ \delta\overset{2}{u}_\alpha=0 \tag{5.3c}$$

$$[\overset{3}{s}^{\alpha\beta}-c_3^2 hb_\eta^\alpha \overset{2}{s}^{\eta\beta}+\sum_{(j,s)=(1,2),(2,1)} c_{s3}^j\ (\overset{j}{s}^{\eta\beta}\ \overset{s}{\phi}_\eta^\alpha+\overset{j}{s}^{\alpha 3}\ \overset{s}{\psi}^\beta)]\nu_\beta=\overset{3}{p}^\alpha \quad \text{或}\ \delta\overset{3}{u}_\alpha=0 \tag{5.3d}$$

$$(\overset{0}{s}^{\alpha 3}+c_{00}^0\ \overset{0}{s}^{\alpha\beta}\overset{0}{w}_{,\beta})\nu_\alpha=\overset{0}{p}^3 \quad \text{或}\ \delta\overset{0}{w}=0 \tag{5.4a}$$

$$(\overset{1}{s}^{\alpha 3}+c_{01}^1\overset{1}{s}^{\alpha\beta}\ \overset{0}{w}_{,\beta})\nu_\alpha=\overset{1}{p}^3 \quad \text{或}\ \delta\overset{1}{w}=0 \tag{5.4b}$$

$$[\overset{2}{s}^{\alpha 3}+c_{02}^2\ \overset{2}{s}^{\alpha\beta}\overset{0}{w}_{,\beta}+c_{12}^1\ (\overset{1}{s}^{\alpha\beta}\overset{1}{\phi}_\beta+\overset{1}{s}^{\alpha 3}\overset{1}{\psi})]\nu_\alpha=\overset{2}{p}^3 \quad \text{或}\ \delta\overset{2}{w}=0 \tag{5.4c}$$

$$[\overset{3}{s}^{\alpha 3}+c_{03}^3\ \overset{3}{s}^{\alpha\beta}\overset{0}{w}_{,\beta}+\sum_{(j,s)=(1,2),(2,1)} c_{s3}^j\ (\overset{j}{s}^{\alpha\beta}\overset{s}{\phi}_\beta+\overset{j}{s}^{\alpha 3}\overset{s}{\psi})]\nu_\alpha=\overset{3}{p}^3 \quad \text{或}\ \delta\overset{3}{w}=0 \tag{5.4d}$$

$\nu_\alpha\vec{a}^\alpha$ 为 L_0 的单位法向量.

六、一 阶 近 似

如果只保留零阶和一阶的项，就得到一阶近似. 其中包含厚度的变化和横向剪切. 事实上从 (4.3) 可以看到，只要能假设二阶以上的项比起零阶和一阶项来不更重要，那么由于它们出现在零阶和一阶方程中时本来就带有一个应变分量或 hb_β^α 的小量因子，可以忽略掉. 因而传统所用的一阶近似应该具有较好的性态.

厚度变化主要由$\overset{n}{\psi}$ 或$\overset{n}{w}$控制，由 (3.7) 及 (3.10) 可知通常所说略去厚度变化的影响，即设 $w=q_0\overset{0}{w}$，对于其它应变成份而言是一种简化而无明显的附加条件. 在此基础上直法线假设即 $\gamma_{\alpha 3}=0$，便对位移量 $\overset{n}{u}_\alpha$ 有了约束. 由 (3.6)、(3.7)、(3.10)，

$$2\overset{0}{\gamma}_{\alpha 3}=\overset{0}{u}_\delta\, b_\alpha^\delta+\overset{0}{w}_{,\alpha}+\overset{0}{u}_\eta\, b_\alpha^\eta+h^{-1}d_1^0\overset{1}{u}_\alpha-c_1^0 hb_\alpha^\delta\,(\overset{1}{u}_\eta\, b_\delta^\eta+h^{-1}\, d_2^1\overset{1}{u}_\delta+\cdots)+\cdots$$

$$2\overset{1}{\gamma}_{\alpha 3}=\overset{1}{u}_\delta b_\alpha^\delta+\overset{1}{u}_\eta b_\alpha^\eta+h^{-1}d_2^1\overset{2}{u}_\alpha+\cdots-c_0^1 hb_\alpha^\delta(\overset{0}{u}_\eta b_\delta^\eta+h^{-1}d_1^0\overset{1}{u}_\delta+\cdots)+c_2^1 hb_\alpha^\delta(\overset{2}{u}_\eta b_\delta^\eta+\cdots)+\cdots$$

$\cdots\cdots$

$\gamma_{\alpha 3}=0\Rightarrow\overset{1}{u}_\alpha\approx-\dfrac{1}{d_1^0}(h\overset{0}{w}_{,\alpha}+2hb_\alpha^\delta\overset{0}{u}_\delta)$，$\overset{2}{u}_\alpha\sim hb_\alpha^\delta\overset{1}{u}_\delta,\cdots,\overset{n}{u}_\alpha\sim hb_\alpha^\eta\overset{n-1}{u}_\eta$. 可见，位移已由零阶量所确定，而且高一级的量的量级相当于乘上一个 hb_β^α 的因子. 从而略去$\overset{2}{u}_\alpha$以上的量自然是允许的. 由于$\overset{0}{w}$和 $\overset{0}{u}_\alpha$对$\overset{1}{\gamma}_{\alpha\beta}$ 有贡献，就与$\overset{1}{s}^{\alpha\beta}$ 关联，所以属于一阶近似的理论. 而且独立的位移变量只是$\overset{0}{w}$ 和$\overset{0}{u}_\alpha$，二阶以上的$\overset{n}{\gamma}_{\alpha\beta}$中主要部分已由它们确定，更高阶方程实际上已无意义.

对于法线倾斜成直线的假设，即使假定法线可以均匀地伸缩，本质上也还是一阶的."均匀伸缩"相当于厚度均匀地变形，即设$w=q_0\overset{0}{w}+q_1\overset{1}{w}$. "倾斜成直线"相当于假设$\gamma_{\alpha 3}=q_0\overset{0}{\gamma}_{\alpha 3}$. 这样由 $0=2\overset{1}{\gamma}_{\alpha 3}=\overset{1}{w}_{,\alpha}+2\overset{1}{u}_\delta b_\alpha^\delta+h^{-1}d_2^1\overset{2}{u}_\alpha-c_0^1 hb_\alpha^\delta\,(\overset{0}{u}_\eta b_\delta^\eta+h^{-1}d_1^0\overset{1}{u}_\delta+\cdots)-c_2^1 hb_\alpha^\delta\,(\overset{2}{u}_\eta b_\delta^\eta+\cdots)+\cdots$ 得$\overset{2}{u}_\alpha\approx-\dfrac{1}{d_2^1}[h\overset{1}{w}_{,\alpha}-c_0^1 hb_\alpha^\delta\cdot hb_\delta^\eta\overset{0}{u}_\eta+hb_\alpha^\delta(2-c_0^1 d_1^0)\overset{1}{u}_\delta]$. 类似地$\overset{n}{u}_\alpha(\alpha\geqslant 3)$也可近似地由$\overset{0}{u}_\alpha$, $\overset{1}{u}_\alpha$,

$\overset{0}{w}$, $\overset{1}{w}$ 所确定，因而独立的位移变量只到一阶为止。

附录　$q_n(z)$ 及有关常数

$$\left.\begin{aligned}
&p_0(x)=1 && q_0(z)=\sqrt{\frac{1}{2}}\\
&p_1(x)=x && q_1(z)=\frac{\sqrt{6}}{h}z\\
&p_2(x)=\frac{3x^2-1}{2} && q_2(z)=\sqrt{\frac{5}{2}}\left[\frac{3}{2}\left(\frac{2}{h}z\right)^2-\frac{1}{2}\right]\\
&p_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2} && q_3(z)=\sqrt{\frac{7}{2}}\left[\frac{5}{2}\left(\frac{2}{h}z\right)^3-\frac{3}{2}\left(\frac{2}{h}z\right)\right]\\
&p_4(x)=\frac{35x^4-30x^2+3}{8} && q_4(z)=\sqrt{\frac{9}{2}}\left[\frac{35}{8}\left(\frac{2}{h}z\right)^4-\frac{30}{8}\left(\frac{2}{h}z\right)^2+\frac{3}{8}\right]
\end{aligned}\right\}\tag{A.1}$$

…………

由 $p_n'(x)=(2n-1)p_{2n-1}(x)+(2n-5)p_{2n-3}(x)+(2n-9)p_{2n-5}(x)+\cdots$（[22]p. 195）得

$d_1^0=2\sqrt{3}$；$d_2^1=2\sqrt{15}$；$d_3^0=2\sqrt{7}$，$d_3^2=2\sqrt{35}$；$d_4^1=6\sqrt{3}$，$d_4^3=6\sqrt{7}$；…

$$\left.\begin{aligned}
&d_{2t}^{2s-1}=2\sqrt{(4t+1)(4s-1)} && (s=1,2,\cdots,t)\\
&d_{2t+1}^{2s}=2\sqrt{(4t+3)(4s+1)} && (s=0,1,\cdots,t)
\end{aligned}\right\}\tag{A.2}$$

又

$$q_0q_n=\sqrt{\frac{1}{2}}q_n,\quad q_1q_n=\frac{\sqrt{6}}{h}zq_n(z)=\frac{\sqrt{3}\sqrt{2n+1}}{2}\left[\frac{n+1}{2n+1}p_{n+1}\left(\frac{2}{h}z\right)+\frac{n}{2n+1}p_{n-1}\left(\frac{2}{h}z\right)\right]$$

$$c_{0n}^k=\sqrt{\frac{1}{2}}\delta_n^k\tag{A.3}$$

$$c_n^{n+1}=\frac{n+1}{2\sqrt{(2n+3)(2n+1)}},\quad c_n^{n-1}=\frac{n}{2\sqrt{4n^2-1}};\quad c_{1n}^{n\pm1}=\sqrt{6}c_n^{n\pm1}\tag{A.4}$$

$c_0^1=c_1^0=\frac{1}{2\sqrt{3}}$，$c_1^2=c_2^1=\frac{1}{\sqrt{15}}$…。继续运用递推公式不难得到

$$\left.\begin{aligned}
&c_{2n}^{n-2}=\sqrt{\frac{10(2n+1)}{2n-3}}\frac{3n(n-1)}{4(4n^2-1)} && c_{3n}^{n-3}=\sqrt{\frac{7(2n+1)}{2(2n-5)}}\frac{5n(n-1)(n-2)}{2(2n-3)(4n^2-1)}\\
&c_{2n}^{n}=\frac{\sqrt{10}n(n+1)}{2(2n-1)(2n+3)} && c_{3n}^{n-1}=\sqrt{\frac{7(2n+1)}{2(2n-1)}}\frac{3n(n^2-1)}{2(2n+1)(4n^2-9)}\\
&c_{2n}^{n+2}=\sqrt{\frac{10(2n+1)}{2n+5}}\frac{3(n+1)(n+2)}{4(2n+1)(2n+3)} && c_{3n}^{n+1}=\sqrt{\frac{7(2n+1)}{2(2n+3)}}\frac{3n(n+1)(n+2)}{2(2n+5)(4n^2-1)}\\
& && c_{3n}^{n+3}=\sqrt{\frac{7(2n+1)}{2(2n+7)}}\frac{5(n+1)(n+2)(n+3)}{(2n+1)(2n+3)(2n+5)}
\end{aligned}\right\}\tag{A.5}$$

$c_{22}^0=\sqrt{\frac{1}{2}}$，$c_{22}^2=\sqrt{\frac{10}{7}}$，$c_{22}^4=\frac{3}{7}\sqrt{2}$；$c_{23}^1=\sqrt{\frac{27}{70}}$，$c_{23}^3=\sqrt{\frac{8}{45}}$，$c_{23}^5=\frac{5}{3}\sqrt{\frac{10}{77}}$；

$c_{33}^0=\sqrt{\frac{1}{2}}$，$c_{33}^2=\sqrt{\frac{8}{45}}$，$c_{33}^4=\frac{3\sqrt{2}}{11}$，$c_{33}^6=\frac{200}{33\sqrt{26}}$.

参　考　文　献

[1] Clebsch, A., *Théorie de l'Élasticité des Corps Solides, avec des Notes Étendues de Saint-Venant*, (1883), 687—706.

[2] Donnell, L. H., A new theory for the buckling of thin cylinders under axial compres-

sion and bending, *Trans. ASME*, 56, 11 (1934), 795—806.

[3] von Kárman, T. and H. S. Tsien, The buckling of thin cylindrical shells under axial compression, *J. Aeron. Sci.*, 8, 8 (1941), 303—312.

[4] Tsien, H. S., The theory for the buckling of thin shells, *J. Aeron, Sci.*, 9, (1942), 373—384.

[5] Chien Wei-zang, The intrinsic theory of thin shells and plantes, *Quart. Appl. Math.*, 1 4, 297—327; 2, 1(1944), 43—59.

[6] Naghdi, P. M. and R. P. Nordgren, On the nonlinear theory of elastic shells under the Kirchhoff hypothesis, *Quart. Appl. Math.*, 21, 1(1963,4), 49—59.

[7] Seide, P., Some implication of strain energy expressions for the Love-Kirchhoff non-linear theory of plates and shells, *Int, J. Non-Linear Mech.*, 6, 3 (1971,6),361—376.

[8] Başar, Y., Eine Schalentheorie endlicher verformungen und ihre Anwendung zur Herleitung der Stabilitätetheorie, *Zeitschrift für Ang. Math. und Mech.*, 52, 5 (1972,5), 197—211.

[9] Sanders, J. L. Jr., Nonlinear theory for thin shells, *Quart. Appl. Math.*, 21, 1(1963, 4),21—36.

[10] Budiansky, B., Notes on nonlinear shells theory, *J. Appl. Mech.*, 35, 2 (1968,6),393—401.

[11] Reissner, M. E., On transverse bending of plates, including the effect of transverse shear deformation, *Jnt. J. Solids Struc.*, 11, 5(1975,5), 569—573.

[12] Schmidt, R., A refined nonlinear theory of plates with transverse shear deformation, *Industrial Math.*, 27, 1(1977), 23—38.

[13] Berstein, E. L., On large deflection theories of plates, *J. Appl, Mech.*, 32,3 (1965, 9),695—697(brief notes).

[14] Ebicioglu, I. K., Nonlinear theory of shells, *Int. J. Non-Linear Mech.*, 6, 4 (1971, 8), 469—478.

[15] Biricikoglu, V. and A. Kalnins, Large elastic deformations of shells with the inclusion of transverse normal strain, *Int. J. Solids Structures*, 7, 5(1971,5), 431—444.

[16] Pietraszkiewicz, W., *Finite Rotations and Lagrangian Description in the Non-Linear Theory of Shells*, Waszawa, Polish Scientific Publishers,(1979).

[17] Wempner, G. and C. M. Hwang, A derived theory of elastic-plastic shells, *Int. J. Solids Structures*, 13, 11 (1977,11), 1123—1132.

[18] Abé, Hiroyuki, A systematic formulation of nonlinear thin elastic-plastic shell theories, *Int. J. Engng. Sci.*, 13, 11 (1975,11), 1003—1014.

[19] Krätzig, W. B., Allgemeine Schalentheorie Beliebiger Werkstoffe und Verformungen, *Ingenieur-Archiev*, 40, 5 (1971, 9)311—326.

[20] Yokoo, Y. and H. Matsunaga, A general nonlinear theory of elastic shells, *Int. J. Solids Structures*, 10,2(1974,2).

[21] 夏道行等，《实变函数论与泛函分析》，下册，人民教育出版社，(1979).

[22] Sansone, G., Orthogonal Polynomials, Interscience Publishers, London, (1959).

[23] И. П. 那汤松，《函数构造论》中册，何旭初，唐述钊译，科学出版社，(1958).

[24] W.弗留盖，《张量分析与连续介质力学》，白铮译，中国建筑工业出版社，(1980).

Studies of Nonlinear Theories for Thin Shells

Wu Shen-rong

(Fudan University, Shanghai)

Abstract

In order to formulate the equations for the study here, the Fourier expansions upon the system of orthonormal polynomials are used. It may be considerably convenient to obtain the expressions of displacements as well as stresses directly from the solutions. Based on the principle of virtual work the equilibrium equations of various orders are formulated. Particularly the system of third-order is given in detail, witn a result to provide the reference for accuracy analysis of lower order equations. A theorem about the differentiation of Legendre Series term by term is proved as the basis of mathematical analysis. Therefore the functions used are specified and the analysis rendered is no longer a formal one. The analysis will show that the Kirchhoff-Love's theory is merely of first-order and the theory which includes the transverse deformation but keeps the normal straight is essentially of first-order, too.