

用切向力法寻求绕铅垂轴旋转导轨上 滑动质点的奇异点及其稳定条件

刘先志

(山东工学院, 1981年3月20日收到)

摘 要

迄今一般都用态平面法来寻求绕铅垂轴旋转导轨上滑动质点的奇异点的位置。为同一目的, 本文提出了一个新方法, 可称为切向力法。与态平面法相比, 切向力法在思考和计算两方面都比较简便, 尤其当我们应用本文第八节所建立的五个判据为甚。

本文曾在一些有关公式中引进了描述导轨的一般表达函数, 俾使求解这类问题时, 避免了每次重新进行推导, 而能逐把导轨函数代进这些建立的公式。

通过建立切向力法, 又自切向力等于零和法向力等于零这两个条件得出该两微分方程的解, 抛物线导轨和对数线导轨这两条特征导轨曲线, 它们是两族互相正交但非共轭调和函数曲线。

文末曾拟取了九种不同安排的旋转导轨, 并先后分别用态平面法, 势函数法和切向力法进行了解析。这九种导轨中有七种安排是本文新提出来求解的, 它们在以前的篇藉中, 作者尚未见到。

一、态平面法的概述

正如本文标题所示, 我们要汇叙其间曾对一个质点在绕铅垂轴旋转导轨上运动所探得的结果。一般而论, 该质点完成的是非线性振动。在探索中, 不曾考虑摩擦影响。如所共知, 非线性振动是比较复杂, 因此迄今多采用态空间^[1](state space)法来审究有如

$$\frac{d^2\bar{r}}{dt^2} + f\left(\bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}\right) = 0 \quad (1.1)$$

这样的微分方程, 其中 \bar{r} 表示质点位置向量, t 是时间, $f\left(\bar{r}, \frac{d\bar{r}}{dt}\right)$ 是 \bar{r} 和 $\frac{d\bar{r}}{dt}$ 的一个非线性函数。

对于在本文中所探讨的单度课题, 若引进新变量 $y = \frac{dx}{dt}$, 就可把 (1.1) 式写成

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -f(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1.2)$$

这样一来, 态空间法就使我们不必直接处理 (1.1) 式, 而改为较易于处理的 (1.2) 式组。在这个方法中, 一般尚引进所谓的态速度

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (1.3)$$

对于本文所涉及的问题，那就是态平面 (state plane) 这种蜕化了的态空间了。关于导轨形状的取舍是：对于旋轴对称的导轨，只需要考虑该导轨的一枝；对于非对称的导轨，势须把整个导轨纳进分析；本文下面涉及的九种导轨中，既有轴对称的，也有非对称的。

二、由 Lagrange 方程推导质点运动微分方程

如图 1 所示，试求质点 m 的运动， z 轴平行于重力场力线。选 x 作为广义坐标，该系的动能是

$$T = \frac{m}{2}(v_1^2 + v_2^2) \quad (2.1)$$

其中 $v_1 = \omega|x|$ 是质点的垂直于导轨 $z=f(x)$ 所在平面的切向速度， $v_2 = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{z}^2}$ ， $\dot{z} = \frac{df}{dx}\dot{x}$ ，因而系的动能可写成

$$T = \frac{m}{2} \left\{ \omega^2 x^2 + \left[1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right] \dot{x}^2 \right\} \quad (2.2)$$

其中，物理量顶上的点表示该量对时间进行一次微分。

以 g 代表重力场加速度，则系的势能是

$$U = mgz = mgf(x) \quad (2.3)$$

于是得 Lagrange 函数

$$L = T - U = \frac{m}{2} \left\{ 1 + \left(\frac{df}{dx} \right)^2 \right\} \dot{x}^2 + \frac{m}{2} \left\{ \omega^2 - 2g \frac{f(x)}{x^2} \right\} x^2 \quad (2.4)$$

为简短计，在下文中，除了个别的地方，我们不再写 $f(x)$ ， $f'(x)$ ， $f''(x)$ 而适用 f ， f' ， f'' 。或再借助于缩代关系

$$\lambda = \omega^2 - 2g \frac{f(x)}{x^2} \quad (2.5)$$

把 (2.4) 式写成

$$L = \frac{m}{2} \{ (1 + f'^2) \dot{x}^2 + \lambda x^2 \} \quad (2.6)$$

或者尚须提及，(2.5) 式对于 λ 的定义与他书^{[1][3][6]}不同，对此，我们故意地作了改换，因为我们引入的定义更便于思考，更切合将于下文中谈到的有关物理意义。

现在可通过 Lagrange 方程

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

而得

$$\{1 + f'^2\} \ddot{x} + f'f'' \dot{x}^2 + gf' - \omega^2 x = 0 \quad (2.8)$$

其中 $f'' = \frac{d^2}{dx^2} f(x)$ 。为便于分析，大家也惯于把上式写成

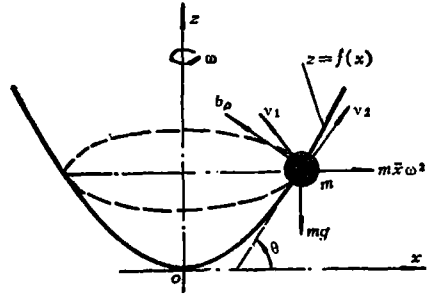


图 1 导轨 $z=f(x)$ 绕铅垂轴 z 以角速 ω 旋转，质点 m 能沿导轨滑移

$$\ddot{x} = \frac{\omega^2 x - gf' - f'f''\dot{x}^2}{1+f'^2} \quad (2.9)$$

从公式 (2.7) 可积得

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \dot{x} - L = h \quad (2.10)$$

其中 h 是积分常数, 利用 (2.6) 式即从 (2.10) 式得出 (2.9) 式的第一次积分

$$(1+f'^2)y^2 + 2gf - \omega^2 x^2 = \frac{2h}{m} \quad (2.11)$$

三、用态平面法求解运动微分方程

可把代替 (2.9) 式的下列方程组

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} &= -\frac{f'f''y^2 + gf' - \omega^2 x}{1+f'^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

合并, 即得积分曲线的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f'f''y^2 + gf' - \omega^2 x}{(1+f'^2)y} \quad (3.2)$$

或再写成

$$\left. \begin{aligned} Mdx + Ndy &= 0 \\ M &= (f''y^2 + g)f' - \omega^2 x, \quad N = (1+f'^2)y \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

由于 $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 2yf''$, 所以方程 (3.2) 是个全微分, 从而其解有下列两个等价的结构

$$\left\{ \begin{aligned} Mdx + \left\{ N - \frac{\partial}{\partial y} \left[Mdx \right] \right\} dy &= C \\ Ndy + \left\{ M - \frac{\partial}{\partial x} \left[Ndy \right] \right\} dx &= C \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

其中 C 是积分常数, 若用上式组的第一式, 则得 (3.2) 式的第一次积分

$$\int \{ (f''y^2 + g)f' - \omega^2 x \} dx + \left\{ (1+f'^2)y - \frac{\partial}{\partial y} [(f''y^2 + g)f' - \omega^2 x] \right\} dy = C \quad (3.5)$$

可以验证, 上式左边的两个积分是

$$J_1 = \frac{1}{2} f'^2 y^2 + gf - \frac{\omega^2 x^2}{2}, \quad J_2 = \frac{y^2}{2}$$

于是就又获得前面曾用 Lagrange 方程的第一次积分 (2.11) 式。

四、由 Newton 动力定律推导质点运动的微分方程

因为 Coriolis 加速度是垂直于质点的相对运动方向, 它只能影响旋转系的稳定性, 而不

影响质点的运动。前节曾用 Lagrange 方程求解，其实 Lagrange 方程是经过变换自 Newton 动力方程推出来的。

对于本节，用 P_t 和 P_n 代表在横坐标 x 处质点的导轨切向力和导轨法向力。现在可利用诸关系（参看图 1）

$$\frac{dz}{dx} = \operatorname{tg} \theta = f', \quad \frac{dx}{ds} = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+f'^2}}$$

$$\frac{dz}{ds} = \sin \theta = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}$$

其中 ds 表示导轨切向元素长度，而得质点在导轨上的下列两个动力微分方程

$$P_t = m(\omega^2 x \cos \theta - g \sin \theta) = m \frac{\omega^2 x - gf'}{\sqrt{1+f'^2}} \quad (4.1)$$

$$P_n = m(\omega^2 x \sin \theta + g \cos \theta) = m \frac{\omega^2 x f' + g}{\sqrt{1+f'^2}} \quad (4.2)$$

若以 $a_t = \ddot{x} \frac{dx}{ds} + \ddot{z} \frac{dz}{ds}$ 代表质点的导轨切向加速度^[2]，则有

$$\ddot{x} \frac{dx}{ds} + \ddot{z} \frac{dz}{ds} = \frac{\omega^2 x - gf'}{\sqrt{1+f'^2}}$$

或改写成

$$\ddot{x} + f' \ddot{z} = \omega^2 x - gf' \quad (4.3)$$

但由于 $ds^2 = dx^2 + dz^2$ ， $\dot{s} = \frac{\sqrt{1+f'^2}}{f'} \dot{z}$ ，所以

$$\ddot{z} = \frac{d}{dt} \left\{ \frac{f'}{\sqrt{1+f'^2}} \dot{s} \right\} = \frac{(1+f'^2)f'\ddot{s} + f''\dot{s}^2}{(1+f'^2)^{3/2}}$$

更因 $\dot{s} = \sqrt{1+f'^2} \dot{x}$ 和 $\ddot{s} = \sqrt{1+f'^2} \ddot{x} + \frac{f'f''}{\sqrt{1+f'^2}} \dot{x}^2$ ，所以得出 $\ddot{z} = f'\ddot{x} + f''\dot{x}^2$ ，把这个末式代进 (4.3) 式，就又导得以前的公式 (2.9)。

可以验证，若改用导轨质点的法向加速度^[2]

$$a_n = \ddot{z} \frac{dx}{ds} - \ddot{x} \frac{dz}{ds} = \frac{\omega^2 x f'' + g}{\sqrt{1+f'^2}}$$

可照样能推出公式 (2.9) 来。

五、 $\lambda = \omega^2 - 2g \frac{f(x)}{x^2}$ 在 Lagrange 函数里的物理意义

在常见到的论述中^{[1][6]}，大家惯于引进 λ 这个缩写，并都讨论了当 $\lambda \geq 0$ 时的各种情况下的质点运动规律，但很少提到其物理意义，我们不只一次地感到，有必要弄清这点，本文是从另一个观点去澄清这个问题的。

可以从 (2.5) 式和 (4.1) 式看出下列关系

$$\lambda = \frac{2 \int \sqrt{1+f'^2} P_t dx}{mx^2} = \frac{2 \int (\omega^2 x - gf') dx}{x^2} \quad (5.1)$$

从而导出

$$\lambda = \frac{\omega^2 x^2 - 2gf(x)}{x^2} = \omega^2 - 2g \frac{f(x)}{x^2}$$

并由于 $\sqrt{1+f'^2} > 0$, $x^2 > 0$ 所以又可得下列两个前因后果的式子:

$$\left. \begin{aligned} P_t &= m \frac{\omega^2 x - gf'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \cong 0 \\ \lambda &= \omega^2 - 2g \frac{f(x)}{x^2} \cong 0 \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

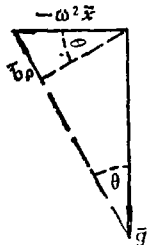


图2 质点诸力的相互制约

据此, $\lambda \cong 0$ 就意味着, 质点在导轨上的切向力 $P_t \cong 0$ 的三种力学情势。

再者, 以 \bar{b}_ρ 代表质点自导轨受到的约束加速度向量, 对于质点在水平方向半径为 x 的圆上的稳定运动, 就必然成立下列关系^[6] (参见图2)

$$\bar{g} + \bar{b}_\rho = -\bar{x}\omega^2 \quad (5.3)$$

或通过把上式写成 $g = -b_\rho \cos \theta$ 和 $b_\rho \sin \theta = -x\omega^2$ 后, 而易得

$$\omega^2 x - g \operatorname{tg} \theta \cong \omega^2 x - gf'(x) = 0 \quad (5.4)$$

上式也就是 (5.1) 式中被积式等于零的情况, 约束加速度是

$$b_\rho = \sqrt{g^2 + \omega^4 x^2} \quad (5.5)$$

在 $P_t \cong 0$ ($\lambda \cong 0$) 里, 对于质点的运动, 三个号给出绝然不同的影响。尤其当 $P_t = 0$ ($\lambda = 0$) 时, 我们就从中导出某种导轨, 在其上质点的切向合力永不存在。当 $P_t > 0$ ($\lambda > 0$) 时, 切向合力是指离坐标原点; 当 $P_t < 0$ ($\lambda < 0$) 时, 切向合力自然是指向坐标原点。

根据上面的分析可以看出, 对于理解 λ 这个惯用的缩写的物理意义来讲, 用 Newton 动力规律来推导质点运动微分方程比用 Lagrange 广义坐标方程有其无与伦比的优越性, 当然尽人皆知, Lagrange 方程是通过变换自 Newton 动力方程推导出来的。

六、由条件 $P_t = 0$ 及 $P_n \neq 0$ 和 $P_n = 0$ 及 $P_t \neq 0$ 导出的两条特征导轨

在 (4.1) 和 (4.2) 式里, 由于 x, ω, g 和 $f'(x)$ 的配合, 可以得出 $P_t \cong 0$ 和 $P_n \cong 0$ 等不同的情况。在成立公式 (3.2) 时, 固然我们曾看待 g 是地球重力加速度, 但更应把 g 看作是一个星体的重力场参数, 因为它既因地而异, 更是因星体而剧异。

很自然, 我们首先易于注意到特殊切向力

$$P_t = m \frac{\omega^2 x - gf'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} = 0 \quad (6.1)$$

的情况。把上式积分后, 则得

$$\omega^2 x^2 - 2gf(x) = C_t \quad (6.2)$$

其中 C_t 为积分常数。当 $x = x_0$, $f(x) = f(x_0)$, 则得 $\omega^2 x^2 - 2gf(x) = \omega^2 x_0^2 - 2gf(x_0)$ 。若用 $z = f(x)$ 和 $z_0 = f(x_0)$, 则有

$$z = z_0 + \frac{\omega^2}{2g} (x^2 - x_0^2) \quad (6.3)$$

它是以 z 轴为轴的抛物线 (见图 3); 由于这里它正是绕 z 轴旋转, 所以在研究质点运动时, 抛物线距 x 轴的远近并不重要, 因而在下边的分析中, 逐可舍去常数而引用

$$z = \frac{\omega^2}{2g} x^2 \quad (6.4)$$

若注意抛物线的一般公式 $2pz = x^2$, 就可导得重要关系

$$\frac{g}{p} - \omega^2 = 0 \quad (6.5)$$

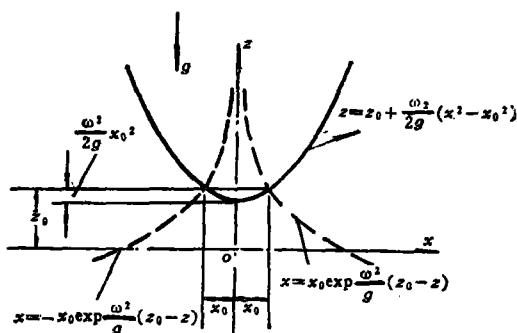


图 3 特征导轨曲线

上式说明, 不是只在某个点上, 而是在全抛物线上 $\omega = \sqrt{\frac{g}{p}}$. 在 (6.5) 式里, p 表示了 $\frac{x}{\text{tg } \theta} \equiv \frac{x}{f'(x)}$ 的作用, 它把两个互相垂直的量 g 和 ω^2 连结起来. 此外, p 是抛物线焦点至其准线 (directrix) 的距离, 它也是自焦点至抛物线垂直于 z 轴的距离. 另外, 在这条抛物线上, 其法向力式是

$$P_n = m \frac{\omega^2 x^2 + pg}{\sqrt{p^2 + x^2}} \quad (6.6)$$

$$\left. \begin{aligned} (P_n)_{x=0} &= mg \\ (P_n)_{x \rightarrow \pm\infty} &= \infty \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

另一方面, 也可把规定另一个特征导轨曲线的条件

$$P_n = m \frac{\omega^2 x f'(x) + g}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}} = 0 \quad (6.8)$$

完成积分而得

$$f(x) = -\frac{g}{\omega^2} \ln x + C_n \quad (6.9)$$

其中 C_n 是积分常数. 若用起始条件 $x = x_0 > 0, z = 0$, 则得 $C_n = \frac{g}{\omega^2} \ln x_0$; 于是得

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{g}{\omega^2} \ln \frac{x_0}{x} \\ x \rightarrow +0, z &= +\infty; \quad x \rightarrow +\infty, z = -\infty \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{g}{\omega^2 x} < 0 \quad (x > 0) \end{aligned} \right\} \quad (6.10)$$

或把上式中的第一式写成

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{\omega^2}{g} z\right) \quad (6.11)$$

若再用起始条件 $x = -x_0 < 0, z = 0$, 则得 $C_n = -\frac{g}{\omega^2} \ln(-x_0)$; 于是得

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{g}{\omega^2} \ln\left(-\frac{x_0}{x}\right), \quad x = -x_0 \exp\left(\frac{\omega^2}{g} z\right) \\ x \rightarrow -0, z &= +\infty; \quad x \rightarrow -\infty, z = -\infty \\ \frac{dz}{dx} &= -\frac{g}{\omega^2 x} > 0 \quad (x < 0) \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

在这条导轨曲线上, 可自 (4.1) 写出

$$\left. \begin{aligned} P_t &= m\omega^2 \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} + x^2} \\ P_t|_{x=0} &= mg, \quad P_t|_{x \rightarrow \pm\infty} = \infty \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

根据以上的探索, 在绕其对称轴用等速旋转的抛物线导轨上, 并在一定角速 ω 之下, 可以作到质点的切向力 $P_t=0$, 法向力 $P_n \neq 0$; 在一定的 ω 之下, 在对数线导轨上, 可以作到法向力 $P_n=0$, 切向力 $P_t \neq 0$; 除这两条导轨之外, 再没有任何导轨会具备这些特征。

在参考文献[9]的 221 页上, 该作者曾这样写道: 那将是可能的, 就是, 质点的外加作用力是这样组成, 以使它的反作用力等于零。看来 (6.11) 式和 (6.12) 式所代表的导轨上 $P_n=0$ 的事实正是上述肯定陈述的一个适当的例子。

七、两特征导轨之间的几何关系

前节已经查明: 在抛物线导轨上, 可以作到 $P_t=0$; 在对数线导轨上, 可以作到 $P_n=0$ 。因此, 这两条导轨之间可能存在着一定的几何关系。要探明这个关系, 试自

$$f_1(x, z) = z - \frac{\omega^2}{2g} x^2 - \frac{C_t}{2g} = 0$$

得出

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dx} = 0$$

于是得到

$$F\left(x, z, \frac{dz}{dx}\right) \equiv -\frac{\omega^2}{g} x + \frac{dz}{dx} = 0$$

现在可求积

$$F\left(x, z, -\frac{dx}{dz}\right) \equiv -\frac{\omega^2}{g} x - \frac{dx}{dz} = 0$$

而得

$$x = x_0 \exp\left(-\frac{\omega^2}{g} z\right)$$

其中 x_0 是积分常数。这就说明: $z = \frac{\omega^2}{2g} x^2 + \frac{C_t}{2g}$ 和 $x = x_0 \exp\left(-\frac{\omega^2}{g} z\right)$ 形成了两族互相正交的曲线(见图4)。但它们是非共轭调和函数, 因为若再引用 $f_2(x, z) = x - x_0 \exp\left(-\frac{\omega^2}{g} z\right) = 0$, 就能验证

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial x} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{\partial f_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial f_2}{\partial z} &\equiv 0 \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)(f_1 + i f_2) &\neq 0 \end{aligned} \right\} i = \sqrt{-1} \quad (7.1)$$

和

即使改用两族导轨曲线在同一点上的斜率, 也可发现它们的正交性, 因为抛物线导轨的斜率

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_p = m_p = \frac{\omega^2}{g} x$$

而指数函数导轨的斜率是

$$\left(\frac{dz}{dx}\right)_e = m_e = -\frac{g}{\omega^2 x}$$

于是验证了

$$m_p = -\frac{1}{m_e} \quad (7.2)$$

末式说明：我们推得的两族特征导轨曲线的斜率是互为负倒数的。

现在来谈一点作者所想到的这两条特征曲线在自然界和科技方面出现的几例。

1. 当液体容器绕铅垂轴作等速旋转达到定常状态后，液面形成了抛物线面，

液点之间不再有相对位移。可以设想，在这团液体中存在着无数个同轴的抛物线面。在每个抛物线面上，液点间是相对静止，因而在其切向有 $P_{p,t}=0$ 。这时，液点在法向上也不移位，因为沿法向液点两边不等的压强又借助于重力在法向上的分量而使 $P_{p,n}=0$ 。也可想象，在这团液体中存在着无数个同轴的指数函数曲面。沿这些曲面，质点也无移位，也是液点上下不等的压强借助于重力分量使 $P_{e,t}=0$ 和 $P_{e,n}=0$ 。

2. 众所共知，大飞机有借助于空中添油以提高其载重量的。值勤的添油飞机带着长油管在空中作水平圆圈等速飞行，其油管形成的曲线就很近似于指数函数曲线^[8]，因为空气也有一定的偏倚影响，此外油管的柔度也不会是很接近于理想。

3. 在水力发电站水涡轮机的泄水管洞中^[10]，由于水既有下降速度也有一定的旋转速度，这就形成了犹如指数函数曲线的流线轨迹。当然这只能是近似的，因为还有不少其他干扰因素，例如水流不是绝对稳定和管洞的几何形状等。

4. 在旋舞中，旋转动作每使裙子旋成法向力等于零的一个轴对称曲面，自然也是近似这样。

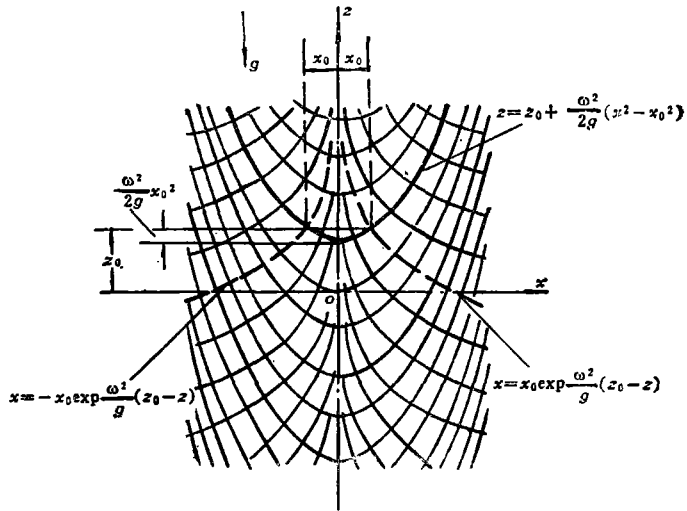


图4 两特征正交导轨曲线族

八、导轨上质点奇异点的位置和质点的平衡位置

在非线性动力系统中，最有意义的是系统平衡状态的确定，在其中，质点速度 $(dx/dt=y)$ 和质点加速度 $(dy/dt=d^2x/dt^2)$ 同时等于零。

显然，动力系统平衡状态是相应于态平面中的这样一些点，在其上，质点的态速度是零。在这些点上，质点运动微分方程有其奇异点，意即，微分方程有解的 Cauchy 唯一条件是不被满足的。

对于任何曲线，有 $1+[f'(x)]^2 > 0$ ；若使态速度等于零，就能自 (3.1) 式得出

$$\left. \begin{aligned} y &= 0 \\ -\frac{P_t}{m} \sqrt{1+[f'(x)]^2} &= gf'(x) - \omega^2 x = \left(g \frac{f'(x)}{x} - \omega^2 \right) x = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8.1)$$

基于上式，能有下列几种不同的情况。

(i) 当 $g \frac{f'(x)}{x} \neq \omega^2$ (意即 $P_t \neq 0$) 时, 这样就自 (8.1) 式直接得出奇异点

$$\left. \begin{array}{l} y=0, \\ \left(g \frac{f'(x)}{x} \neq \omega^2 \right) \\ x=0, \end{array} \right\} \quad (8.2)$$

由于 $g \frac{f'(x)}{x} = \omega^2$ 是抛物线的微分方程, 所以 (8.2) 式说明, 包括抛物线导轨在内的任何导轨都有这个奇异点, 若尚不追问这个奇异点的性质的话。

(ii) 当 $g \frac{f'(x)}{x} = \omega^2$ (意即 $P_t = 0$) 时, 把 $g \frac{f'(x)}{x} - \omega^2 = 0$ 积分后, 即得通过坐标原点的抛物线 $2gf(x) - \omega^2 x^2 = 0$; 利用此式, 可自 (2.11) 式得到

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{2h}{m(1+f'^2)}} = 0$$

意即, 我们得到了奇异点

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm\infty \\ y = 0 \end{array} \right\} (2gf(x) = \omega^2 x^2) \quad (8.3)$$

对于不通过坐标原点的抛物线 $2gf(x) - \omega^2 x^2 = h'$, 又可自 (3.1) 式得出

$$y = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \sqrt{\frac{\frac{2h}{m} - h'}{1+f'^2}}$$

意即, 我们又一次得到奇异点

$$\left. \begin{array}{l} x = \pm\infty \\ y = 0 \end{array} \right\} (2gf(x) - \omega^2 x^2 = h') \quad (8.4)$$

这就是说, 抛物线的积分常数对于无穷远处的奇异点没有影响。

(iii) 当抛物线为 $\omega^2 x^2 = 2gf(x)$ (也就是 $P_t = 0$) 及初速 $y_0 = 0$ 时, 为此可自 (2.11) 式得出

$$h = 0 \quad (\omega^2 x^2 = 2gf(x), y_0 = 0) \quad (8.5)$$

意即, 当 $\lambda = 0$ 时, 初速也等于零时, 则质点将在导轨上停留于其初位; 因此, 整条 x 轴全布满了奇异点, 于是得奇异线

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \\ -\infty \leq x \leq +\infty \end{array} \right\} (\lambda = 0) \quad (8.6)$$

(iv) 当 $y = 0$ 和 $\dot{x} = 0$ 时, 依据这个条件, 就可自 (2.9) 式导出关系

$$x = g \frac{f'(x)}{\omega^2} \quad (8.7)$$

这就是从前的 (5.4) 式, 更因 $f'(x) = \frac{dz}{dx} = \text{tg } \theta$, 就能把上式写为

$$\omega^2 x \cos \theta - g \sin \theta = 0 \quad (8.8)$$

就此, 可提及文献[5]第131页图76中一个稳定奇异点的例证。那里的导轨是个圆, 所以曾能把 $x = a \sin \theta$ 代进上式, 而得

$$(a\omega^2 \cos \theta - g) \sin \theta = 0 \quad (8.9)$$

其中, 自然 $\sin \theta = 0$ 先给出奇异点

$$\theta = 0, \theta = \pm \pi \quad (8.10)$$

而 (8.9) 式的另一个因子给出了另一个奇异点

$$\theta_0 = \arccos \left(\frac{g}{\omega^2 a} \right) \quad (8.11)$$

若取任意小值 $\delta > 0$, 就可验证能成立下列诸关系

$$\left. \begin{aligned} a\omega^2 \cos(\theta_0 \pm \delta) - g &\leq 0 \\ |\cos(\theta_0 + \delta) - \cos \theta_0| &> |\cos(\theta_0 - \delta) - \cos \theta_0| \\ a\omega^2 \cos \theta &\leq g \quad (\theta \geq \theta_0) \\ \sin(\theta_0 + \delta) &> \sin \theta_0 > \sin(\theta_0 - \delta) \end{aligned} \right\} \quad (8.12)$$

这些不等式 (8.12) 的物理意义是: 这就能保证, 使质点受到朝向奇异点 $\theta = \theta_0$ 的向心力的作用, 而且这个作用对于奇异点 $\theta = \theta_0$ 在沿导轨切线方向奇异点的前后两侧 $\theta \geq \theta_0$ 是非对称的, 在文献 [5] 的图 78 里也曾清晰地显示了合口振动轨线的非对称性。

公式 (8.11) 所规定的奇异点是条件稳定的, 在某种条件下它就可能不再出现; 在抛物线导轨上, 除了坐标原点之外, 就找不到这种条件性的稳定奇异点。

九、质点运动轨线 (trajectories) 和叉分线 (separatrices)

质点运动轨线就是 (2.11) 式的图解, 这些曲线是绘在态平面 (x, y) 里的; 为便利计, 再把 (2.11) 式抄在这里

$$(1 + f'^2)y^2 + \left(2g \frac{f}{x^2} - \omega^2 \right) x^2 = (1 + f'^2)y^2 - \lambda x^2 = h' \quad (9.1)$$

其中 $h' = 2h/m$ 。此刻应当回忆从前的几个重要关系 (2.5)、(4.1) 和 (5.1) 等式, 以便易于理解, 量 λ 也就象征着导轨上质点的切向作用合力。根据 $\lambda \geq 0$, 切向作用力也就有三种不同的情况, 也就是以前 (5.2) 式和 (6.1) 式所表达的。

依据导轨的不同, 上式中的 $1 + f'^2$ 和 λ 都不可能是常数, 它们必然是 x 的不同函数。若能使 λ 为常数, 图解就比较简单。总的说来, 若 $\lambda < 0$ ($P_t < 0$), 则运动轨线是些椭圆近似曲线; 若 $\lambda > 0$ ($P_t > 0$), 就出现些双曲线, 质点先自远处走近鞍型奇异点之后再远离该点; 当 $\lambda = 0$ ($P_t = 0$), 就产生以 x 轴为对称轴、并与 x 轴交在 $\pm \infty$ 两点上的极扁平的椭圆轨线。对于 $\lambda = 0$ 的情况, 特别是当质点初速为零, 它就停在原位, 致使整条 x 轴蜕化成一根全为奇异点布满了的直线, 可称为奇异线。

对于推求等速轨迹, 就可利用条件 $y = \dot{x} = 0$ 自 (3.1) 式导出产生它的必要条件

$$y^2 = \frac{\omega^2 x - g f'(x)}{f'(x) f''(x)} \quad (9.2)$$

或写成

$$y = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 x - g f'(x)}{f'(x) f''(x)}} \quad (\omega^2 x - g f'(x) > 0) \quad (9.3)$$

设 y 等于常数 c , 则得

$$\left. \begin{aligned} c^2 f'(x) f''(x) &= \omega^2 x - g f'(x) \\ c^2 [f'(x)]^2 &= \omega^2 x^2 - 2g f(x) \end{aligned} \right\} \quad (9.4)$$

把它积分后, 即得

其中曾弃去了无足轻重的一个积分常数, 而得

$$f(x) = \frac{1}{c} \int \sqrt{\omega^2 x^2 - 2gf(x)} dx \quad (9.5)$$

这是个未易求解的积分方程, 但可看出

$$f(x) = kx^2 \quad (9.6)$$

能满足 (9.5) 式, 以 k 为常数. 这就说明, 只有在抛物线导轨上的质点才有可能在 x 方向作等速运动. 文献 [1]、[5] 里的个别例子都符合这个一般推导出来的结果.

此外, 对于运动的探研, 又分线的寻求也很必要, 因为它可以把态平面分为有不同运动性质的区域; 对于又分线的位置, 可借助于在 (9.1) 式中把积分常数 h' 应拟取何值而定.

运动系的势函数有一般结构 $U(x) = m \left\{ gf(x) - \frac{\omega^2}{2} x^2 \right\}$, 这是本文后边有待推立的 (11.7) 式. 函数 $U(x)$ 可能只有一个最高峰, 也可能有几个相对高峰和多个最高峰, 这要依 $f(x)$ 而有所不同. 若以 $h'_i(x_i)$ 表示这些相对高峰处势函数的值, 其中 x_i 是相对高峰的标距, 则相对高峰处的又分线公式是

$$(1 + f'^2)y^2 - \lambda x^2 = h'_i(x_i) \quad (\lambda > 0) \quad (9.7)$$

再以 h'_{\max} 代表势函数的最大值, 则该处的又分线式是

$$(1 + f'^2)y^2 - \lambda x^2 = h'_{\max} \quad (\lambda > 0) \quad (9.8)$$

关于以上两式的应用例题, 前人已曾多处提及^{[1][8][6]}.

由于 λ 也包含着 x , 一般而论, 又分线不是直线. 导轨上质点的切向力 $P_t > 0$ ($\lambda > 0$), 是出现又分线的必要条件. 一般而论, $h'_i(x_i)$ 的变化区间是 $-\infty \leq h'_i(x_i) \leq \infty$. x_i 的变化区间是 $-\infty \leq x_i \leq \infty$.

十、速度分量、加速度分量、运动周期

在求解实际运动问题时, 常需要不同方向上的速度和加速度, 因此我们需要推出其一般关系, 意即导出包含着导轨函数的一些式值. 此外, 也推出计算运动周期的一般表达式.

在下列推导中, x 和 z 代表质点位置坐标距, $y = \dot{x}$ 是 x 方向上速度, s 是导轨上的弧段. 于是 (2.11) 式导得 x 方向上的速度

$$\dot{x} \equiv y = \pm \sqrt{\frac{\frac{2h}{m} - 2gf(x) + \omega^2 x^2}{1 + [f'(x)]^2}} \quad (10.1)$$

由于 $\dot{z} = \dot{x}f'(x)$, 所以 z 方向上的速度是

$$\dot{z} = \pm f'(x) \sqrt{\frac{\frac{2h}{m} - 2gf(x) + \omega^2 x^2}{1 + [f'(x)]^2}} \quad (10.2)$$

更因 $\dot{s}^2 = \dot{x}^2 + \dot{z}^2$ 和 $\dot{s} = \dot{x} \sqrt{1 + f'^2}$, 所以质点在导轨上的切向速度是

$$\dot{s} = \pm \sqrt{\frac{2h}{m} - 2gf(x) + \omega^2 x^2} \quad (10.3)$$

对于加速度分量, 可由导轨曲线 $z = f(x)$ 得出

$$\ddot{z} = \dot{x}^2 f''(x) + \ddot{x} f'(x) \quad (10.4)$$

其中可用 (10.1) 式表达 \dot{x} , 并再把

$$\dot{x} = \frac{\omega^2 x - gf'(x) - f''(x)\dot{x}^2}{1 + [f'(x)]^2} \quad (2.9)$$

代进 (10.4) 式, 即得便于使用的

$$\ddot{z} = \frac{\omega^2 x f' - gf'^2 + f''\dot{x}^2}{1 + f'^2}$$

于是可由 $\ddot{s} = \dot{x}\cos\theta + \ddot{z}\sin\theta = \frac{\dot{x} + f'\ddot{z}}{\sqrt{1 + f'^2}}$ 导得

$$\ddot{s} = \sqrt{1 + f'^2} \ddot{x} + \frac{f'f''}{\sqrt{1 + f'^2}} \dot{x}^2 \quad (10.5)$$

$$\ddot{s} = \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{f'} \ddot{z} - \frac{f''}{f'\sqrt{1 + f'^2}} \dot{x}^2 \quad (10.6)$$

对于运动周期, 可自 (10.1) 式导得

$$\int_0^t dt = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{\sqrt{\frac{2h}{m} - 2gf + \omega^2 x^2}} dx \quad (10.7)$$

或自 (10.2) 式得

$$\int_0^t dt = \int_{z_1}^{z_2} \frac{\sqrt{1 + f'^2}}{f' \sqrt{\frac{2h}{m} - 2gf + \omega^2 x^2}} dz \quad (10.8)$$

也可自 (10.3) 式推出

$$\int_0^t dt = \int_{s_1}^{s_2} \frac{ds}{\sqrt{\frac{2h}{m} - 2gf + \omega^2 x^2}} \quad (10.9)$$

其中对于所需要的 $s = s(x)$, 可先求积

$$s = \int_0^x \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx \quad (10.10)$$

而获得. 一般而论, 就能把 x 从 (10.9) 式的被积式中替除而完成 (10.9) 式的积分.

十一、运动系统的势能函数

根据态平面法的一个特征, 总是借助于所谓的一个势能函数来推求态平面内的质点运动轨线. 本节专讨论如何推求这个势能函数的一般结构.

若质点受到非线性恢复力的作用, 它并在一直线上运动, 则其微分方程是

$$\ddot{x} + F(x) = 0 \quad (11.1)$$

其第一次积分是

$$\dot{x}^2 + 2 \int F(x) dx = 2h \quad (11.2)$$

h 是积分常数. $U(x) = \int F(x) dx$ 就是上面所说的势能函数. 但是, 若质点不是沿着一直线运动, 则相应于 (11.1) 式而应有

$$\ddot{q} + \Phi(q, \dot{q}, \lambda, f'(q), f''(q)) = 0 \quad (11.3)$$

其中 q 是Lagrange广义坐标, λ 是参数, $f'(q)$ 和 $f''(q)$ 代表导数. 对于(11.3)式, 就不再那么容易求出其相应于(11.2)式的第一积分, 虽然在纯粹形式上也可写成

$$\dot{q}^2 + 2 \int \Phi(q, \dot{q}, \lambda, f'(q), f''(q)) dq = 2H \quad (11.4)$$

从而就纯形式上而有

$$\dot{q} = \pm \sqrt{2} \sqrt{H - \int \Phi(q, \dot{q}, \lambda, f'(q), f''(q)) dq} \quad (11.5)$$

当 $H \geq \int \Phi dq$ 时, 我们得到实在的 \dot{q} ; 当 $H < \int \Phi dq$ 时, 在态平面上得不到运动轨线.

在下面我们以(2.9)式为例来表达这一点.

按照(11.2)式, 可自(2.9)式写出其第一次积分

$$\dot{x}^2 - 2 \int \frac{\omega^2 x - g f'(x) - f'(x) f''(x) \dot{x}^2}{1 + [f'(x)]^2} dx = 0 \quad (11.6)$$

其中 x 虽然表示横坐标, 但质点并非沿直线 x 轴运动, 而它是沿着导轨 $f(x)$ 运动.

现在来完成(11.6)式中的积分式 $\int \Psi dx$ 的运算; 利用部分积分, 可得

$$\begin{aligned} \int \Psi dx &= \frac{\omega^2 x^2 - 2gf(x)}{2\{1 + [f'(x)]^2\}} + \left\{ \frac{[\omega^2 x^2 - 2gf(x)] f'(x) f''(x)}{\langle 1 + [f'(x)]^2 \rangle^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f'(x) f''(x) \dot{x}^2}{1 + [f'(x)]^2} \right\} dx = \frac{\omega^2 x^2 - 2gf(x)}{2\{1 + [f'(x)]^2\}} \\ &\quad + \int \frac{\omega^2 x^2 - 2gf(x) - \langle 1 + [f'(x)]^2 \rangle \dot{x}^2}{\langle 1 + [f'(x)]^2 \rangle^2} f'(x) f''(x) dx \end{aligned}$$

其中

$$\Psi = \frac{\omega^2 x - g f'(x) - f'(x) f''(x) \dot{x}^2}{1 + [f'(x)]^2}$$

再利用(2.11)式, 可把上式积分号下的 \dot{x}^2 替除, 而得

$$\begin{aligned} \int \Psi dx &= \frac{\omega^2 x^2 - 2gf(x)}{2\{1 + [f'(x)]^2\}} - \frac{2h}{m} \int \frac{f'(x) f''(x)}{\{1 + [f'(x)]^2\}^2} dx \\ &= \frac{\omega^2 x^2 - 2gf(x)}{2\{1 + [f'(x)]^2\}} - \frac{h}{m\{1 + [f'(x)]^2\}} \end{aligned}$$

从而可把(11.6)式写成

$$\{1 + [f'(x)]^2\} \dot{x}^2 - [\omega^2 x^2 - 2gf(x)] - \frac{2h}{m} = 0$$

更因 $\{1 + [f'(x)]^2\} \dot{x}^2 = \dot{s}^2$, 所以得

$$\frac{m}{2} \dot{s}^2 + U(x) = h$$

其中

$$U(x) = m \left\{ gf(x) - \frac{\omega^2}{2} x^2 \right\} \quad (11.7)$$

这就是这个例子中的势能函数. 此外, 变换式 $\dot{x} = \pm \frac{\dot{s}}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}}$ 也是有用的.

据此, 我们得到这样一个似是实非的现象: (11.7) 式似与 (2.3) 式互相矛盾. 这是因为第二节的推导系以惯性坐标为准, 而本节却以牵连坐标作为参考格架. 在文献 [3] 第 522 页上的例子里也是用了后者, 而文献 [1] 第 41 页上的例子里是用了前者. 对于这里的惯性坐标系, 我们有一个势场和两个动能; 对于牵连坐标系, 我们则有两个势场和一个动能; 对于这点可参看文献 [11] 第 69 页、第 73 页及第 74 页上的论辩.

十二、导轨性质及质点运动奇异点的一般讨论

关于本节标题所提出的奇异点问题, 迄今已有无数的论述, 例如 [1]、[3]、[5]、[7] 等这些我们常见到的文献; 对于处理这类问题, 本文着重一改以前的个别对待的办法, 而是试想作一个一般性的探讨, 以期能导出些一般规律; 同时将在末两节中涉及个别例题时, 也是仅偏重于与本文所探得的一般规律的应用与结合上.

首先, 本文前几段所推出的一般公式中都出现了导轨函数 $f(x)$ 及其微分导数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$, 它们的出现能使我们看出一些一般的性态, 从而也就显示, 本文一改前人的“单打一”惯例地解析这类问题是有其一定的优越性的.

为了避免重复, 仅列出本文所推立的一些重要的一般结构的式子的编号, 以便查寻, 它们是 (2.2)、(2.3)、(2.4)、(2.9)、(2.11)、(3.1)、(3.2)、(4.1)、(4.2)、(5.1)、(9.7)、(9.8)、(13.1) 等式, 其中都出现了导轨函数 $f(x)$ 及其微分导数 $f'(x)$ 和 $f''(x)$.

此外, 本文的探讨曾得出了一些新规则, 可以用来寻求旋转导轨上质点的奇异点; 兹把这些规则摘要列集, 俾便于一窥梗概.

(1) $\lambda = \omega^2 - 2g \frac{f(x)}{x^2} \geq 0$ 的有其物理意义的同义描述是 $P_t \geq 0$, 通过后者就能明显地

揭示 $\lambda \geq 0$ 的物理意义. $\lambda > 0$ 就相当于在质点上有着离心力的作用; $\lambda = 0$ 就相当于在质点上无切向外力合存在; $\lambda < 0$ 就相当于对坐标原点而言在质点上有如只有弹簧恢复力的情况.

(2) 在一定的角速度 ω 之下, 抛物线形导轨上就产生 $P_t = 0$, 但 $P_n \neq 0$ 的情况; 在一定角速度 ω 之下, 在对数线形导轨上就产生 $P_n = 0$ 但 $P_t \neq 0$ 的情况. 一般而论, 抛物线导轨和对数线导轨除外, 在任何导轨上都是 $P_t \neq 0$ 和 $P_n \neq 0$, 虽然在个别点上不是完全这样.

(3) 在同一导轨或异轨上, 只有当 x 和 $f'(x)$ 有同号时, 才能出现 $P_t = 0$; 只有当 x 和 $f'(x)$ 有异号时, 才产生 $P_n = 0$; 在同轨的各个线段上, 也会产生这两种极端的情况. 利用这个规律, 对于任何导轨, 哪里能产生 $P_t = 0$ 及哪里会出现 $P_n = 0$, 就可一望而知, 非常节约思索.

(4) 当 $P_n = 0$ 时, 自然就只出现 Coriolis 力和 Coriolis 力所引起的 Coulomb 摩擦力; 当 $P_n \neq 0$ 时, 于上述两力之外, 又增添了 P_n 所引起的 Coulomb 摩擦力.

(5) 若考虑上加速度场这个概念^[11], 就可自 (6.1) 式得出下列诸值的物理意义:

$-x\omega^2$ —— 向心力加速度场;

$g \frac{f'(x)}{x}$ —— x 方向单位距离重力加速度场;

$-\frac{x\omega^2}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}}$ —— 导轨切向惯性力场;

$$\frac{gf'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \text{—— 导轨切向重力场。}$$

(6) 对于一般的导轨, 可以有 $P_t \geq 0$ 三种不同的情况。 $f'(x) \geq 0$ 和 $x \geq 0$ 的多种配合, 能使我们比较迅速地推断: 在某条导轨上是否会出现奇异点; 起码比用态平面来得简易迅速。

(7) 在 (11.7) 式势能函数 $U(x)$ 中出现了导轨函数 $f(x)$, 这就能使我们把 $U(x)$ 即刻应用到任何导轨上, 然后再进行其它必要的分析, 从而节省每次重新推求势函数的式值。

(8) 公式 (9.8) 是叉分曲线 (Separatrices) 公式; 从而看出, 只有当 $\lambda > 0$ 时, 才能出现不稳定的奇异点。

(9) 勿须每次先推求问题的 Lagrange 函数, 再须把它代进 Lagrange 方程, 而是逐可把导轨函数 $f(x)$ 的 $f'(x)$ 及 $f''(x)$ 代进一般加速度式子 (2.9), 再应用态平面法, 固然 Lagrange 方程也是自一般加速度式值 (2.9) 经过变换导得的。能绕过须先成立 Lagrange 函数这一步, 是相当有利的, 因为有时这步推算并非一蹴而就。

(10) 当重力和离心力出现在导轨同侧的那段上, 才有可能产生 $P_t = 0$; 重力和离心力出现在导轨异侧的那段上, 才有可能产生 $P_n = 0$ 的情况。这些结论都是从切向力公式和法向力公式论辩出来的。

(11) $P_t = 0$ 只能当作发生奇异点的必要条件, 但不能当作发生稳定奇异点和非稳定奇异点的充分条件。

(12) 切向力法能使我们看出, 奇异点处有向心力还是有离心力; 下文中诸例题的稳定性的判定多系利用这一事实。

十三、旋转导轨上质点运动奇异点存在的必要条件及其稳定性态的判据

在包括着旋轴的任一平面里, 导轨 $z=f(x)$ 可分为对转轴形成对称和不对称两种, 其中 z 代表竖轴, $f(x)$ 代表曲线, x 代表横轴; 前者旋出一个轴对称曲面, 后者旋出两个轴对称曲面。因为后者种类无限, 所以对于研究这种问题, 一般限于对称导轨。总的说来, 对称导轨的基本性质是:

$$f(x) = f(-x), \quad f'(x) = -f'(-x) \geq 0, \quad f''(x) = f''(-x) \geq 0,$$

$$f''(x \pm \delta) = f''(-x \mp \delta),$$

其中 δ 是个小正值。

一般而论, $P_t = m \frac{\omega^2 x - gf'(x)}{\sqrt{1+[f'(x)]^2}} \neq \text{const.}$; 在某些点 x_t 上, $P_t = 0$ 是可能的, x_t 是

$\omega^2 x - gf'(x) = 0$ 的诸根。此外, $dP_t/dx = 0$ 给出 $f''(x) = \omega^2 \frac{1+[f'(x)]^2}{g + \omega^2 x f'(x)}$ 。于是就可能产生

下列因果关系的不等式条件:

$$\text{当 } f''(x) \Big|_{x=x_t} \geq \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g + \omega^2 x f'} \Big|_{x=x_t} \text{ 时, 可以得 } \frac{dP_t}{dx} \Big|_{x=x_t} \leq 0.$$

从而对于便于寻求本文课题中的质点运动奇异点, 就可建立下列判据。

(1) 于重力场 g 内, 在绕平行于重力线 g 的轴以角速 ω 旋转的轨道 $z=f(x)=f(-x)$ 上, 出现仅沿导轨切向可滑移质点 m 的运动奇异点的必要条件是:

$$\left. \begin{array}{l} \text{i) } \omega^2 x - g f'(x) = 0 \\ \text{ii) 重力和离心力必须发生在导轨同侧的那段上} \end{array} \right\} \quad (13.1)$$

(2) 以 δ 为一正微量, 于重力场 g 内, 在绕平行于重力线 g 的以角速 ω 旋转的导轨 $f(x)=f(-x)$ 上, 出现仅沿导轨切向可滑移质点 m 的运动稳定奇异点的充分条件是:

$$f''(x) \Big|_{x=x_i} > \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2 x f'} \Big|_{x=x_i}, \text{ 或 } P_i \Big|_{x=x_i \pm \delta} \leq 0 \quad (13.2)$$

其中 $P_i = m(\omega^2 x - g f') / \sqrt{1+f'^2}$, $x_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 是 $\omega^2 x - g f'(x) = 0$ 的诸根。

(3) 以 δ 为一正微量, 于重力场 g 内, 在绕平行于重力线 g 的轴以角速 ω 旋转的导轨 $z=f(x)=f(-x)$ 上, 出现仅沿导轨切向可滑动质点 m 的运动非稳定奇异点的充分条件是:

$$f''(x) \Big|_{x=x_i} < \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2 x f'} \Big|_{x=x_i}, \text{ 或 } P_i \Big|_{x=x_i \pm \delta} \geq 0 \quad (13.3)$$

其中 $P_i = m(\omega^2 x - g f') / \sqrt{1+f'^2}$, $x_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 是 $\omega^2 x - g f'(x) = 0$ 的诸根。

(4) 当 $f''(x)|_{x=x_i} = 0$, 意即, 当导轨 $f(x)$ 上有回折点 (inflectional point) 时, 在其他同样条件下, 出现运动半非稳定 (或叫做半稳定) 奇异点的充分条件是:

$$dP_i/dx|_{x=x_i^-} < 0 (\text{半稳定}), dP_i/dx|_{x=x_i^+} < 0 (\text{半非稳定}), \text{ 或 } P_i|_{x=x_i \pm \delta} > 0 \quad (13.4)$$

其中 δ 是正微量, $x_i (i=1, 2, \dots)$ 是 $\omega^2 x - g f'(x) = 0$ 的根, $x_i^-(x_i^+)$ 表示移动点从左边 (右边) 趋近点 x_i 。

(5) 当 $f''(x)|_{x=x_i} = 0$, 意即, 当导轨 $f(x)$ 上有回折点时, 在同样条件下, 出现运动半稳定 (或称半非稳定) 奇异点的充分条件是:

$$(dP_i/dx)_{x=x_i^-} < 0 (\text{半非稳定}), (dP_i/dx)_{x=x_i^+} < 0 (\text{半稳定}), \text{ 或 } P_i|_{x=x_i \pm \delta} < 0 \quad (13.5)$$

其中 δ 是正微量, $x_i (i=1, 2, 3, \dots)$ 是 $\omega^2 x - g f'(x) = 0$ 的根, $x_i^-(x_i^+)$ 表示移动点从左边 (右边) 趋近于点 x_i 。

十四、关于本文中例题的选取和处理的侧重

在下文中, 选取的例题包括 (i) 抛物线、(ii) 正圆、(iii) 正平椭圆、(iv) 正立椭圆、(v) 悬线、(vi) 侧圆、(vii) 侧平椭圆和 (viii) 侧立椭圆这八种导轨曲线。已被前人几乎备述无遗的抛物线和正圆导轨^{[1], [8], [5], [12]}, 我们又引用的用意是, 用本文建立的判据再作分析, 以说明这个新方法的效用。其余六种依目前作者所见, 似尚未见于篇藉, 故曾把它们详加分析, 以期能揭出其新颖之处。

这些导轨曲线的安排可见图 5、图 6、及图 7, 在其中曾注明了各个角度的起点; 这些

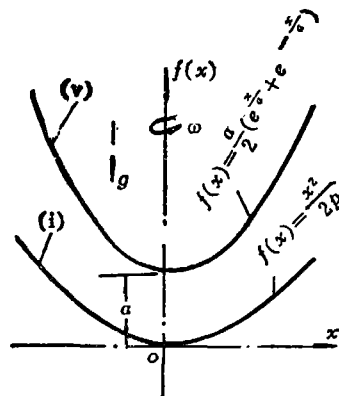


图 5 抛物线和悬线

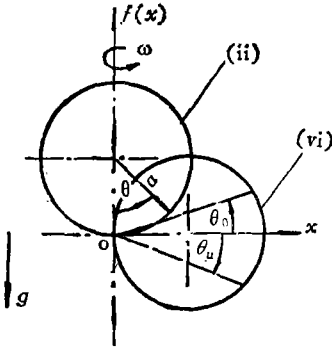


图6 正圆和侧圆

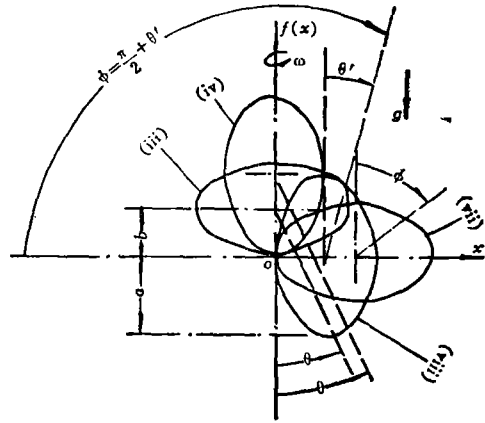


图7 正平、正立、侧平、侧立椭圆

起点的互异,是由于应当为不同的导轨选取比较适宜的起点,后七种导轨的命名谅系自明了。

下面的分析拟用三种方法进行:(1)态平面法;(2)势函数法;(3)切向力法.对于(1)法,我们的重点自然应只限于几种新导轨上;因为这几种导轨是新提出的,就更注意这三种方法的比较。

正如本文的标题所指,我们的重点是放在切向力法这个新方法上面,因为若只限于弄清这类运动的奇异点的位置和性质,这个新方法是较为简便;此外,这个方法的推演过程也给出了更明显的物理意义。

十五、态平面法

在这一节里,我们只限于较细地讨论后六种导轨,因为它们对于求质点奇异点来说,算是比较新的安排,并且也能把其结果同已有的作一比较。

(i) 抛物线导轨.把抛物线 $f(x) = -\frac{x^2}{2p}$ 及其有关的微分导数代进(2.9)式,即得

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{(gp - \omega^2 p^2 + y^2)x}{(p^2 + x^2)y}$$

这个式子同前人用他法作个别处理时所推得的结果完全符合^{[11],[16]}。

(ii) 正圆导轨.把 $f(x) = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ 及其有关微分导数代进(2.9)式,再应用替换关系 $x = a \sin \theta$,就简化出

$$\ddot{\theta} = \omega^2 \left(\cos \theta \pm \frac{g}{a\omega^2} \right) \sin \theta$$

这就是前人用他法已经获得过的结果^{[8],[15],[12]}。

(iii) 正平椭圆导轨.把 $f(x) = b \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ 及其有关的微商代进(2.9)式,再施以代换关系 $x = a \sin \theta$,就简化出

$$\ddot{\theta} = \frac{a^2 \omega^2 \sin \theta \cos \theta \pm gb \sin \theta + (a^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta \cdot \theta^2}{a^2 \cos^2 \theta + b^2 \sin^2 \theta} \quad (15.1)$$

使用条件 $\dot{\theta}=0$ 和 $\ddot{\theta}=0$, 则得

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= 0, \theta_h = \pi, \quad (\text{不稳定奇异点}) \\ \theta_h &= \arccos \left(\frac{gb}{\omega^2 a^2} \right), \quad (\text{稳定奇异点}) \end{aligned} \right\} \quad (15.2)$$

再把有关式值代进下式

$$\{1 + [f'(x)]^2\} \dot{x}^2 + 2gf(x) - \omega^2 x^2 = 2h \quad (2.11)$$

则得

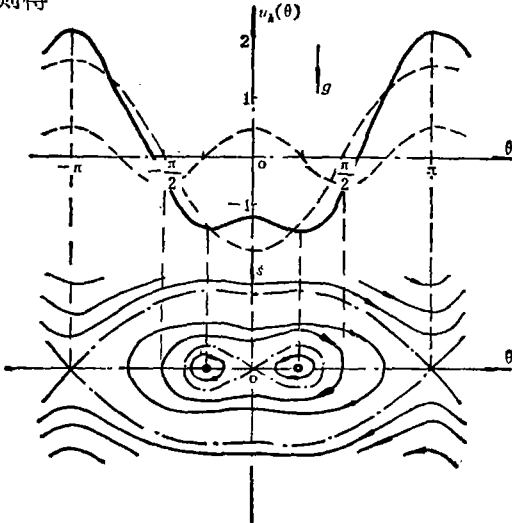


图8 旋转正平椭圆导轨上质点在态平面内的运动轨迹

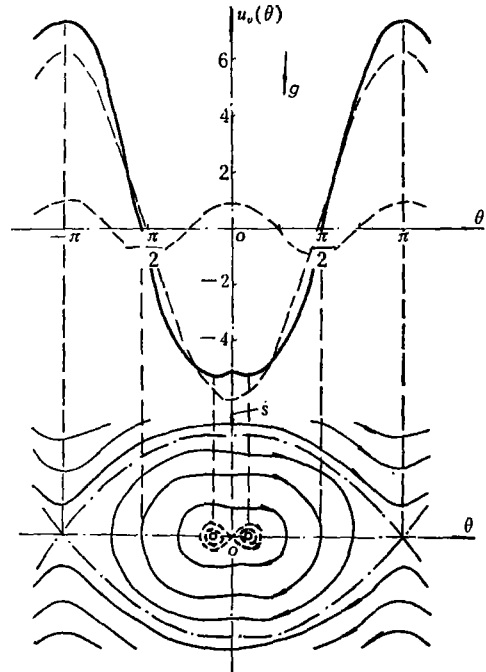


图9 旋转正立椭圆导轨上质点在态平面内的运动轨迹

$$\left\{ \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \cos 2\theta \right\} \dot{\theta}^2 + \frac{\omega^2 a^2}{2} \left\{ \cos 2\theta \pm \frac{4gb}{a^2 \omega^2} \cos \theta \right\} = C_h \quad (15.3)$$

其中可视为

$$\dot{s}^2 = \left\{ \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2}{2} \cos 2\theta \right\} \dot{\theta}^2$$

由此就得出绘制态平面内运动轨迹的函数

$$u_h = \cos 2\theta - 4\mu \frac{b}{a} \cos \theta \quad (15.4)$$

其中 $\mu = \frac{g}{\omega^2 a}$. 以 $a=10\text{cm}$, $b=8\text{cm}$, $g=981\text{cm/sec}^2$, 即经计算而得图8. 由此图和前人用他法已绘制的正圆的曲线^{[8], [6], [12]}, 就可看出其间并无区别.

(iv) 正立椭圆导轨. 这里用 $f(x) = a \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$ 和 $x = b \sin \theta$, 而得

$$\ddot{\theta} = \frac{b^2 \omega^2 \cos \theta \sin \theta \pm ga \sin \theta + (b^2 - a^2) \sin \theta \cos \theta \cdot \dot{\theta}^2}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \quad (15.5)$$

这里依同理得出

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= 0, \theta_v = \pi \quad (\text{不稳定奇异点}) \\ \theta_v &= \arccos \left(\frac{ga}{\omega^2 b^2} \right) \quad (\text{稳定奇异点}) \end{aligned} \right\} \quad (15.6)$$

由 (15.2) 式和 (15.6) 式看出下列关系

$$\theta_h \geq \theta_v, \quad (a \geq b) \quad (15.7)$$

并且当 $a=b$ 时, (15.2) 式和 (15.6) 式就都蜕化出正圆导轨一例的解。相应于 (15.3) 式而有

$$\left\{ \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \cos 2\theta \right\} \dot{\theta}^2 + \frac{\omega^2 b^2}{2} \left\{ \cos 2\theta \pm \frac{4ga}{b^2 \omega^2} \cos \theta \right\} = C_v \quad (15.8)$$

其中应视为

$$\dot{s}^2 = \left\{ \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2-a^2}{2} \cos 2\theta \right\} \dot{\theta}^2$$

利用

$$u_v = \cos 2\theta - 4\mu \frac{a^2}{b^2} \cos \theta \quad (15.9)$$

进行运算即得图9。由图8和图9看出, 平、立两椭圆导轨上奇异点的位置不同。

(v) 悬线导轨。把 $f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$ 及其有关微分导数代进 (2.11) 式, 则得

$$\left\{ 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right) \right\} \dot{x}^2 + 2ga \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \omega^2 x^2 = 2h$$

其中应视为

$$\dot{s}^2 = \left\{ 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right) \right\} \dot{x}^2$$

再利用势函数

$$U(x) = 2ga \left\{ \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\omega^2 x^2}{2ga} \right\} \quad (15.10)$$

及在 x 方向上的速度

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2h - 2ga \cosh\left(\frac{x}{a}\right) + \omega^2 x^2}{1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right)}} \quad (15.11)$$

即可算出图10所需用的数据。

把图10同抛物线导轨的图解运动^{[11], [6], [12]}作一比较, 可以看出, 在悬线导轨上, 质点不会运动到无穷远处。抛物线导轨上只有一个在坐标原点上的条件性的稳定奇异点; 而在每个角速 ω 值之下, 悬线导轨上的质点能在 x 轴上获得两个稳定奇异点, 而且它们都是移动性的稳定奇异点; 在图10里的 $\dot{s}x$ 平面内, 我们仅给了一套这样的运动轨迹。

(vi) 侧圆导轨。把 $f(x) = \pm \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$ 及其有关的微商代进 (2.11) 式, 则得

$$\dot{x} = \pm \frac{1}{a} \sqrt{\{2h + \omega^2 x^2 \mp 2g \sqrt{2ax - x^2}\} (2ax - x^2)} \quad (15.12)$$

其中 h 是积分常数。再利用势函数公式 (13.1) 与代换关系 $x = a(1 + \cos \theta)$, 则得

$$U(x) = -\frac{3\omega^2 a^2}{2} + 2g \left\{ a \sin \theta - \frac{\omega^2 a^2}{4g} (\cos 2\theta + 4\cos \theta) \right\} \quad (15.13)$$

代进数字进行运算, 即得图11所需要的数据。

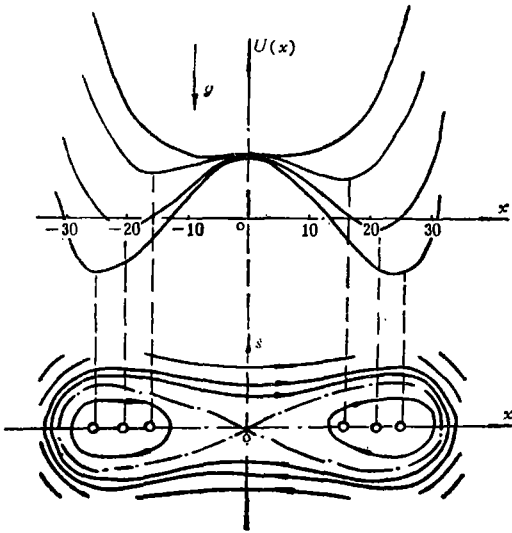


图10 悬线导轨旋转中其质点运动在态平面内的运动轨迹

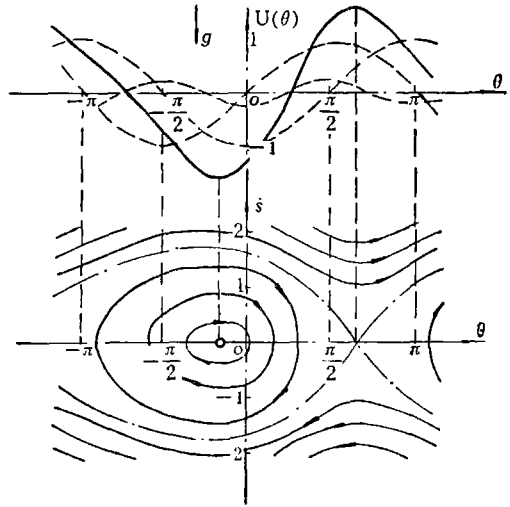


图11 旋转侧圆导轨上质点运动的态平面图解

自图11可清晰地看出，下半圆上有一个稳定奇异点，上半圆上有一个非稳定奇异点；它们都是依 ω 而迁移其位置，因而它们是移动性的。

(vii) 侧平椭圆导轨。

把 $f(x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$ 及其有关微商代进 (2.11) 式，即得

$$\dot{x} = \pm a \sqrt{\frac{\left\{ 2h_h + \omega^2 x^2 \mp 2g \frac{b}{a} \sqrt{2ax - x^2} \right\} (2ax - x^2)}{a^2 b^2 + (a^2 - b^2) (2ax - x^2)}} \quad (15.14)$$

其中 h_h 是积分常数。再利用势函数公式 (13.1) 与代换关系，即得

$$U(x) = -\frac{3\omega^2 a^2}{2} \pm 2gb \cos \theta + \frac{\omega^2 a^2}{2} (\cos 2\theta - 4\sin \theta) \quad (15.15)$$

利用上两式进行数字运算，就得图12所需要的数据。自图看出，质点有稳定奇异点和非稳定奇异点各位于下、上半椭圆导轨上。

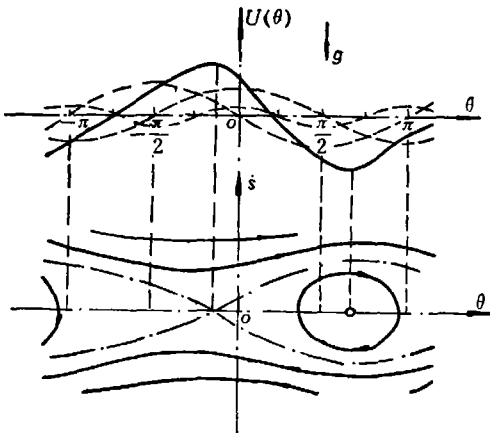


图12 旋转侧平椭圆导轨上质点运动的态平面图解

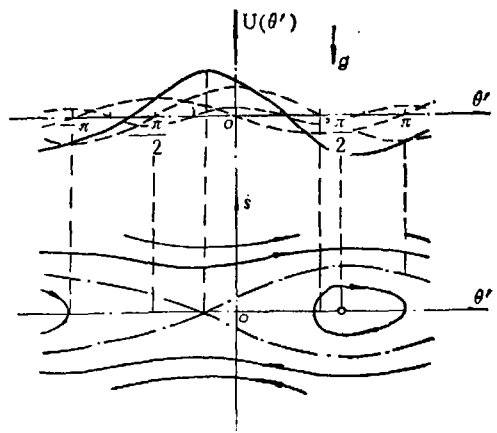


图13 旋转侧立椭圆导轨上质点运动的态平面图解

(viii) 侧立椭圆导轨。

把 $f(x) = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x-b)^2}$ 及其有关微商代进 (2.11) 式, 即得

$$\dot{x} = \pm b \sqrt{\frac{\left\{ 2h_0 + \omega^2 x^2 \mp 2g \frac{a}{b} \sqrt{2bx - x^2} \right\} (2bx - x^2)}{a^2 b^2 - (a^2 - b^2)(2bx - x^2)}} \quad (15.16)$$

其中 h_0 是积分常数。再利用关系 $\phi = \theta' + \frac{\pi}{2}$, 则得此处的势函数

$$U(\theta') = -\frac{3\omega^2 b^2}{2} \pm 2ga \cos \theta' + \frac{\omega^2 b^2}{2} (\cos 2\theta' - 4\sin \theta') \quad (15.17)$$

利用以上两式进行数字运算, 即得图13所需之数据。

十六、势函数法

在本节里, 不象态平面法那样, 必须从运动微分方程出发, 而是可以只用 (13.1) 式这个势函数的一般式子, 其中关键的是出现了有导轨 $f(x)$ 的一般表达式, 从而勿须每次推导。

本节只通过例题对于某参数把有关的势函数的图解绘成, 其中可以看出其极端值的位置及此值的变化, 所以叫做势函数法。悬线导轨除外, 其余的图解都是合口曲线, 因为其相应的导轨也都是合口的。此法的特点是, 先能尽快地得知势函数的总变化, 从其极端值的分布和性质推定奇异点的性质和位置, 勿须再计算态平面图解所需要繁多数据。这个方法的缺点是, 势函数往往是高于二次的代数方程, 如例子 (vi)、(vii)、(viii) 的情况, 欲推出奇异点的确切位置须投入相当多的时间。

(i) 抛物线导轨。把 $f(x) = \frac{x^2}{2p}$ 代进 (13.1) 式, 则得势函数

$$U(x) = \frac{m}{2} \left(\frac{g}{p} - \omega^2 \right) x^2 \quad (16.1)$$

其中以 $\lambda = \omega^2 - \frac{g}{p}$, 则得三种运动情况。当 $\lambda < 0$ 时, $U(x)$ 有其最低点, 坐标原点是个稳定奇异点; 当 $\lambda = 0$ 时, 有中立平衡, x 轴是条奇异线; 当 $\lambda > 0$ 时, $U(x)$ 有其最高点, 质点有不稳定的奇异点。这些结果符合前人的利用他法的推断^{[11], [6], [12]}。

(ii) 正圆导轨。把 $f(x) = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ 代进 (13.1) 式, 则得

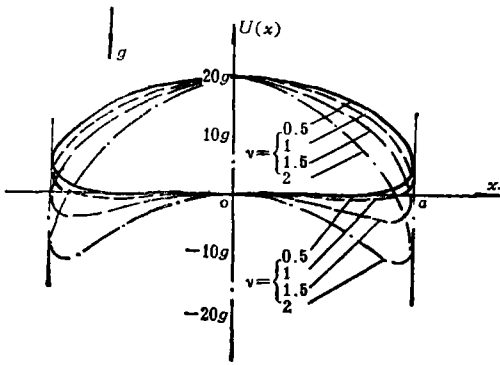
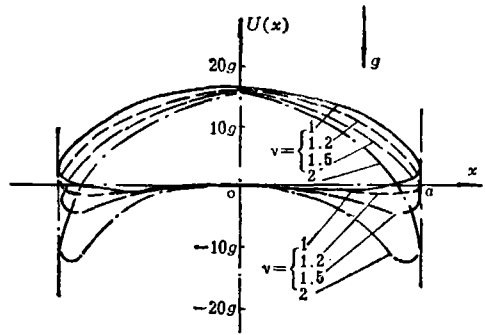
$$U(x) = \frac{m}{2} \left\{ 2g(a \pm \sqrt{a^2 - x^2}) - \omega^2 x^2 \right\} \quad (16.2)$$

以 $m=1$, $\frac{\omega^2 a}{g} = \nu^2$, 就可把 (16.2) 式化为

$$U(x) = ga \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{\nu^2 x^2}{2a^2} \right\} \quad (16.3)$$

其中 ν 是个参数; 以 $\nu = 0.5, 1, 1.5, 2$, 就得出绘制图14的数据。每条曲线上的最低点就相应于稳定点的位置。

(iii) 正平椭圆导轨。把 $f(x) = b \pm \sqrt{b^2 - x^2}$ 代进 (13.1) 式, 即得

图14 旋转正圆导轨上质点的势函数依 ω 的变化图15 旋转正椭圆导轨上质点势函数依 ω 的变化

$$U(x) = m \left\{ g \left(b \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right) - \frac{\omega^2 x^2}{2} \right\} \quad (16.4)$$

再以 $m=1$, $\frac{\omega^2 a}{g} = \nu^2$, 就可把 (16.4) 式写成

$$U(x) = gb \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{\nu^2 x^2}{2ab} \right\} \quad (16.5)$$

以 $\nu=1; 1.2; 1.5; 2$, 就算出图15的数据。

(iv) 正立椭圆导轨。可以验证, 这里的有关公式是

$$U(x) = ag \left\{ 1 \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{b^2}} - \frac{\nu^2 x^2}{2a^2} \right\} \quad (16.6)$$

以 $\nu=1.25; 1.5; 2$, 因为可以验证, 此处应当保证关系

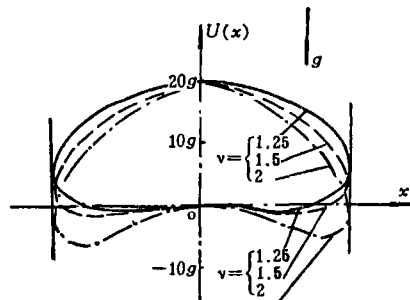
$$\frac{a^4}{b^4 \nu^4} \leq 1$$

我们若取 $a=10\text{cm}$, $b=8\text{cm}$, 则须 $\nu \geq 1.25$ 。

于是就获得图16中的曲线。

(v) 悬线导轨。易于验证, 从 $m=1$, 这里的势函数是

$$U(x) = ag \left\{ \cosh\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{\nu^2 x^2}{2a^2} \right\} \quad (16.7)$$

图16 旋转正立椭圆导轨上质点势函数依 ω 的变化

改变参数 ν , 可用上式算出图17所需要的数据, 其中 $ag \geq 100\omega^2$, ($\nu \geq 1$)。

当 $\nu < 1$ 时, 坐标原点是个稳定奇点; 当 $\nu > 1$, 有非坐标原点的稳定奇点, 坐标原点成了个非稳定奇点。

(vi) 侧圆导轨。这里的相应公式是

$$U(x) = ag \left\{ \pm \sqrt{2 \frac{x}{a} - \frac{x^2}{a^2}} - \frac{\nu^2 x^2}{2a^2} \right\} \quad (16.8)$$

而微分导数 $U'(x) = 0$ 给出推算 $U(x)$ 的极端值的方程

$$x^4 - 2ax^3 - \frac{g^2}{\omega^4} x^2 + 2a \frac{g^2}{\omega^4} x - \frac{a^2 g^2}{\omega^4} = 0$$

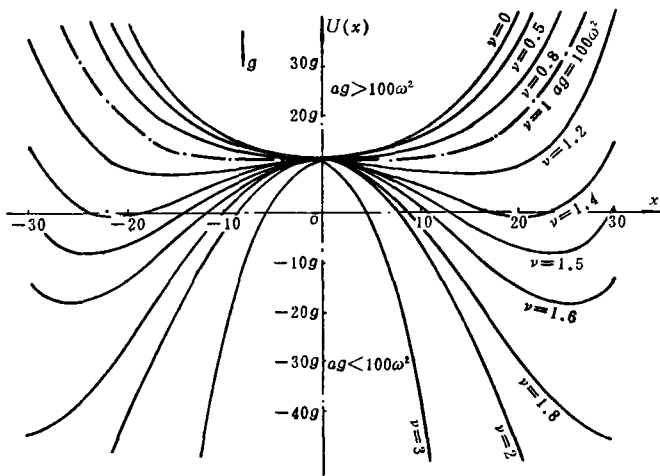


图17 旋转悬线导轨上质点势函数依 ω 的变化

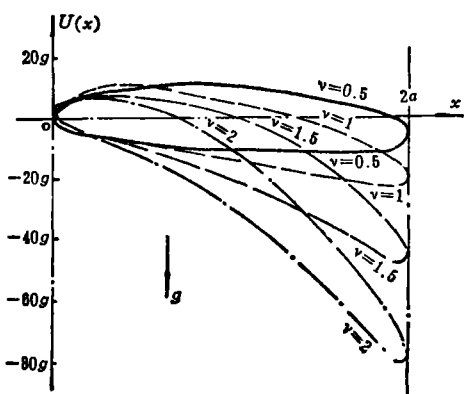


图18 旋转侧圆导轨上质点势函数依 ω 的变化

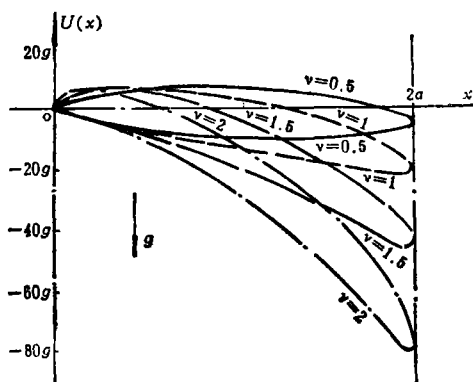


图19 旋转侧平椭圆导轨上质点势函数依 ω 的变化

虽然繁冗，但此式可以求解，可参见专著，例如[13]。以 $\nu=0.5; 1; 1.5; 2$ 计算，即得图18。

(vii) 侧平椭圆导轨。其相应的式子是

$$U(x) = gb \left\{ \pm \sqrt{1 - \frac{(x-a)^2}{a^2}} - \frac{\nu^2 x^2}{2ab} \right\} \quad (16.9)$$

微分导数的条件 $U'(x) = 0$ 就给出推算 $U(x)$ 的极端值的四次方程

$$x^4 - 2ax^3 + \frac{b^2 g^2}{a^2 \omega^4} x^2 - 2 \frac{b^2 g^2}{a \omega^4} x + \frac{b^2 g^2}{\omega^4} = 0$$

正如前例，此式可以求解，以 $\nu=0.5; 1; 1.5; 2$ 进行计算，则得图19中的曲线。

(viii) 侧立椭圆导轨。这里的势函数式是

$$U(x) = ag \left\{ \pm \sqrt{1 - \frac{(x-b)^2}{b^2}} - \frac{\nu^2 x^2}{2a^2} \right\} \quad (16.10)$$

微分导数 $U'(x) = 0$ 给出推算 $U(x)$ 的极端值的方程

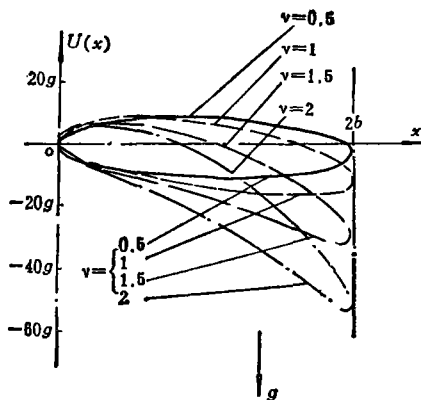


图20 旋转侧立椭圆导轨上质点势函数依 ω 的变化

$$x^4 - 2bx^3 + \frac{a^2 g^2}{b^2 \omega^4} x^2 - 2 \frac{a^2 g^2}{b \omega^4} x + \frac{a^2 g^2}{\omega^4} = 0$$

这个方程也能求解。以 $\nu=0.5; 1; 1.5; 2$ 进行计算, 即可用所得数据绘成图20。

十七、切 向 力 法

这一节要用本文前边探得的切向力法来对同样的例题寻求奇异点, 并规定它们的性质。这里主要是应用本文前边曾推立的切向力的一般公式

$$P_t = m \frac{\omega^2 x - g f'(x)}{\sqrt{1 + [f'(x)]^2}} \quad (4.1)$$

(i) 抛物线导轨。对于抛物线导轨 $f(x) = \frac{x^2}{2p}$, 我们得到

$$P_t = \frac{m \left(\omega^2 - \frac{g}{p} \right) x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}} \quad (17.1)$$

由上式可得出 $(P_t)_{\omega \cong \sqrt{\frac{g}{p}}} \cong 0$ 这三种情况。这个结果完全符合用其他方法所获得的结

论^{(1), (6), (12)}; 若用 λ 来表示, 则有 $\lambda = \omega^2 - \frac{g}{p} \cong 0$ 这三种情况, 其中我们曾故意地把 λ 的号取

的与前人⁽¹⁾相反, 因为这样能使物理意义更加明确、更便于思考, 意即: 当 $\lambda > 0$ 时, 质点的离心力大于其恢复力; 当 $\lambda = 0$ 时, 质点的离心力与其恢复力互相抵消; 当 $\lambda < 0$ 时, 质点的离心力小于其恢复力。

于是, 若设 $\delta > 0$, 则得

(1) 当 $\lambda > 0$, 则 $P_t = \frac{m\lambda\delta}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{p^2}}} \geq 0, (\delta \geq 0)$, 坐标原点是个非稳定奇异点, 离心力

较大。

(2) 当 $\lambda = 0$, $P_t = 0 \times \delta = 0, (-\infty < \delta < \infty)$, x 轴完全布满了奇异点, 全无切向力。

(3) 当 $\lambda < 0$, $P_t = -\frac{m|\lambda|\delta}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{p^2}}} \leq 0, (\delta \geq 0)$, 坐标原点是个稳定奇异点, 恢复力

较大。

(ii) 正圆导轨。此处, 应用 $f(x) = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, 而得切向力

$$P_t = m(\omega^2 \sqrt{a^2 - x^2} \pm g) \frac{x}{a} \quad (17.2)$$

其中正号是用于上半圆, 负号用于下半圆。

对于上半圆, 由于 $\omega^2 \sqrt{a^2 - x^2} + g \neq 0$, 所以 $P_t = 0$ 给出了上半圆的奇异点 $x = 0$ 。对于下半圆, 因为 $x = 0$ 不应当是我们的解答, 所以得

$$x = \pm \sqrt{a^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$$

更由于 $x = a \sin \theta$, 所以

$$\vartheta_0 = \arcsin \left(\sqrt{1 - \frac{g^2}{a^2 \omega^4}} \right) = \arcsin \left(\frac{g}{a \omega^2} \right) \quad (17.3)$$

这个结果同用态平面法所得出的结果完全符合^{[8], [6], [12]}; 但是可以看出, 切向力法使运算异常简化了。

关于稳定性问题, 可这样来分析. 对于下半圆 $P_t = 0$ 给出 $(\omega^2 a \cos \theta - g) \sin \theta = 0$; 这里面应当 $\sin \theta \neq 0$, 因为 $\theta = 0$ 不是我们所要求的. 此外, 可以验证

$$\omega^2 a \cos(\vartheta_0 + \delta) \leq g \quad (\delta \geq 0)$$

因此, $\vartheta_0 = \arcsin \left(\frac{g}{a \omega^2} \right)$ 是个稳定奇异点, 因为上列不等式是奇异点处有向心力存在的说明。

对于最高点, 则有 $\sin \theta = 0$, $\theta = \pi$, 因为在此点上 $\omega^2 a \cos \theta + g \neq 0$. 更可验证有

$$\sin(\pi + \delta) = -\sin \delta \leq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

所以得

$$\{\omega^2 a \cos(\pi + \delta) + g\} \sin(\pi + \delta) \geq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

因而这个点是个非稳定奇异点, 此处存在着离心力。

(iii) 正平椭圆导轨. 把这里的 $f'(x) = \mp \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$ 代进 (4.1) 式, 则得

$$P_t = \frac{m \left\{ \omega^2 \pm \frac{gb}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \right\} x}{\sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^2(a^2 - x^2)}}} \quad (17.4)$$

对于上半椭圆, 由于 $\omega^2 + \frac{gb}{a\sqrt{a^2 - x^2}} \neq 0$, 所以 $x = 0$ 是个奇异点. 对于下半椭圆, $P_t = 0$ 给出

关系 $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{gb}{a\omega^2}$; 再利用 $x = a \sin \theta$, 则得正平椭圆稳定奇异点的位置角

$$\vartheta_h = \arcsin \left(\frac{bg}{a^2 \omega^2} \right) \quad (17.5)$$

关于稳定性, 可以验证有

$$a\omega^2 \cos(\vartheta_h + \delta) - \frac{gb}{a} \leq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

因此, ϑ_h 是稳定的, 这里有向心力. 此外, 当 $\vartheta = \pi$ 时, $a\omega^2 \cos \theta - \frac{gb}{a} < 0$, 所以得到

$$\left\{ a\omega^2 \cos(\pi + \delta) - \frac{gb}{a} \right\} \sin(\pi + \delta) \geq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

所以点 $\vartheta_h = \pi$ 是个非稳奇异点, 这里有离心力作用。

(iv) 正立椭圆导轨. 关于正立椭圆的问题, 可自 $P_t = 0$. 亦即 $\left\{ b\omega^2 \cos \theta - \frac{ag}{b} \right\} \sin \theta = 0$

导得

$$\vartheta_v = \arccos\left(\frac{a}{b^2\omega^2}\right)$$

由于可以验证

$$\left\{b\omega^2 \cos(\pi + \delta) - \frac{ag}{b}\right\} \sin(\pi + \delta) \geq 0 \quad (\delta \geq 0) \quad (17.6)$$

所以 $\vartheta_v = \pi$ 是个非稳定奇异点；更因有

$$b\omega^2 \cos(\vartheta_v + \delta) - \frac{ga}{b} \leq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

所以 $\vartheta_v = \arccos\left(\frac{ag}{b^2\omega^2}\right)$ 是个稳定奇异点。

(v) 悬线导轨。这里的切向力公式是

$$P_t = m \frac{\omega^2 x - g \sinh\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1 + \sinh^2 \frac{x}{a}}} \quad (17.7)$$

$P_t = 0$ 则给出

$$f_1 = \frac{\omega^2 x}{g} = \sinh\left(\frac{x}{a}\right) = f_2 \quad (17.8)$$

就此，条件 $\left(\frac{df_1}{dx}\right)_{x=0} = \left(\frac{df_2}{dx}\right)_{x=0}$ 能给出 $\omega^2 = \frac{g}{a}$ 。于是可以理解，会有下列三种情况：当

$\omega^2 = \frac{g}{a}$ 时，则除坐标原点 $x=0$ 之外， f_1 和 f_2 就不

再有交点；当 $\omega^2 > \frac{g}{a}$ 时，则 f_1 和 f_2 就有异于坐标原点的交点；这样一来，坐标原点是个非稳定奇异点，其他的交点则都是稳定奇异点；当 $\omega^2 < \frac{g}{a}$ 时，只有坐标原点是个稳定奇异点。在图21里，曾用 1、2、3 标出的三条直线与 $\sinh\left(\frac{x}{a}\right)$ 之间的关系就示明了这三种情况。

或者再去如下地分析这个问题的稳定性。

公式 (17.8) 可写成

$$\left(\frac{a\omega^2}{g} - 1\right)x - \frac{x^2}{a^2} \left\{ \frac{x}{3!} + \frac{x^3}{5!a^2} + \frac{x^5}{7!a^4} + \dots \right\} = 0$$

在上式中，当 $\frac{a\omega^2}{g} = 1$ 时，则得 $x=0$ 作为解答，于是有

$$-\frac{\delta^2}{a^2} \left\{ \frac{\delta}{3!} + \frac{\delta^3}{5!a^2} + \frac{\delta^5}{7!a^4} + \dots \right\} \leq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

因而 $x=0$ 这个点是个稳定奇异点，这里有向心力作用。

当 $\frac{a\omega^2}{g} - 1 < 0$ 时，则由

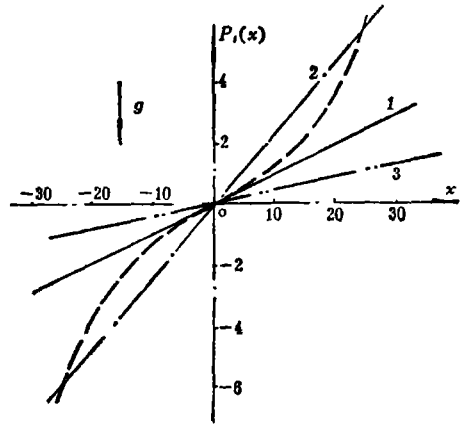


图21 悬线导轨上质点稳定问题的三种情况

$$-\left| \frac{a\omega^2}{g} - 1 \right| x - \frac{x^2}{a^2} \left\{ \frac{x}{3!} + \frac{x^3}{5!a^2} + \frac{x^5}{7!a^4} + \dots \right\} = 0$$

推出其解答 $x=0$, 于是得

$$-\left| \frac{a\omega^2}{g} - 1 \right| \delta - \frac{\delta^2}{a^2} \left\{ \frac{\delta}{3!} + \frac{\delta^3}{5!a^2} + \frac{\delta^5}{7!a^4} + \dots \right\} \leq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

因此, $x=0$ 这个点是个稳定奇异点, 这里有向心力作用.

(vi) 侧圆导轨. 这里的切向力方程是

$$P_t = m \frac{\omega^2 x \pm \frac{g(x-a)}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}}}{\sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{a^2 - (x-a)^2}}} \quad (17.9)$$

以 $x = 2a \cos^2 \theta$ 代进上式, 则条件 $P_t = 0$ 就给出

$$4 \frac{a\omega^2}{g} \cos^3 \theta \sin \theta \mp (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = 0 \quad (17.10)$$

其中上号是用于上半圆, 下号是用于下半圆; 这两式的图解是图 22, 其中曾用 $F_1 = 4 \frac{a\omega^2}{g} \cdot \cos^3 \theta \sin \theta$, $F_2 = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$, θ_1 和 θ_2 表示所寻出两奇异点的位置角.

现在转入探讨这两个奇异点的稳定性. 对于上半圆, 把公式(17.10)写成

$$4a \frac{\omega^2}{g} \cos^3 \theta - \left\{ \sin \theta - \frac{\cos^2 \theta}{\sin \theta} \right\} = 0$$

由于 $0 < \vartheta_1 < \frac{\pi}{2}$, 可以验证而有

$$4a \frac{\omega^2}{g} \cos^3(\vartheta_1 + \delta) - \left\{ \sin(\vartheta_1 + \delta) - \frac{\cos^2(\vartheta_1 + \delta)}{\sin(\vartheta_1 + \delta)} \right\} \leq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

此因, ϑ_1 是个不稳定奇异点, 这里有离心力作用.

对于下半圆, 我们就难于这样简单地得出结论, 但可以如下进行论辩. 若改设

$$f_1 = 4a \frac{\omega^2}{g} \cos^3 \theta \sin \theta, \quad f_2 = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta, \quad \frac{a\omega^2}{g} = 1$$

就可查明 $P_t = mg \left\{ \frac{4a\omega^2}{g} \cos^3 \theta \sin \theta - \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \right\} = 0 \quad (\theta \approx 14^\circ)$

并有 $\frac{df_1}{d\theta} = 8a \frac{\omega^2}{g} \left\{ \cos 2\theta - \frac{1}{2} \right\} \cos^2 \theta$

$$\frac{df_2}{d\theta} = -4 \sin \theta \cos \theta < 0 \quad \left(0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

再者, $\frac{df_1}{d\theta} = 0$ 给出, $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ 即 $\theta = 30^\circ$, 因而求得 $\frac{df_1}{d\theta} \geq 0 \quad (\theta \leq 30^\circ)$. 因此, 在我们所用的 θ 的范围 ($0 \leq \theta \leq 14^\circ$) 之内, 可以结论有关系

$$\frac{df_1}{d\theta} \gg \frac{df_2}{d\theta} \quad (0 < \theta < 14^\circ)$$

于是又得 $4 \cos^3(\vartheta_2 + \delta) \sin(\vartheta_2 + \delta) - \{\cos^2(\vartheta_2 + \delta) - \sin^2(\vartheta_2 + \delta)\} \quad (\delta \geq 0)$

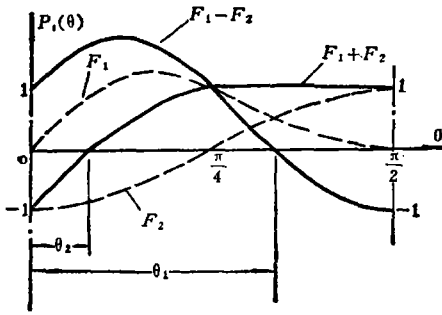


图22 侧圆导轨上质点奇异点的图解；
 θ_1 为上半圆； θ_2 为下半圆；对于
 上、下两个半圆， θ 的号相反。

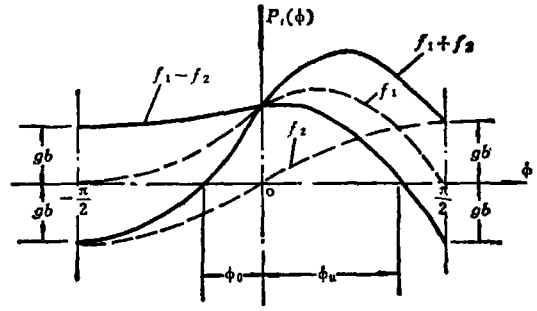


图23 旋转侧平椭圆导轨上质点奇异点的图解；
 对上半， ϕ 的正向是逆时针；对下半， ϕ 的
 正向是顺时针。

因此，下半圆上的奇异点是稳定的，因为此处有上列不等式所肯定的向心力作用。

(vii) 侧平椭圆导轨。此处的切向力公式是

$$P_t = m \frac{\omega^2 x \pm \frac{gb(x-a)}{a\sqrt{a^2-(x-a)^2}}}{\sqrt{1 + \frac{b^2(x-a)^2}{a^2[a^2-(x-a)^2]}}} \quad (17.11)$$

以 $x = a + a\sin\phi$ 代进上式，则得

$$P_t = m \frac{\omega^2 a^2 (1 + \sin\phi) \cos\phi \pm gb \sin\phi}{\sqrt{a^2 \cos^2\phi + b^2 \sin^2\phi}}$$

$P_t = 0$ 这个条件就给出推算图23中曲线的式子，其中曾引用 $f_1 = \omega^2 a^2 (1 + \sin\phi) \cos\phi$ ， $f_2 = gb \cdot \sin\phi$ ； ϕ_0 和 ϕ_u 各代表上、下两半椭圆上的奇异点的角位。

由于可以验证有下列不等式的存在

$$\omega^2 a^2 \{1 - |\sin(\phi_0 + \delta)|\} \cos(\phi_0 + \delta) - gb |\sin(\phi_0 + \delta)| \leq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

所以在上半椭圆上的奇异点是非稳定的，这里有离心力作用。

对于下半椭圆，可得关系

$$\omega^2 a^2 \left\{ \frac{1}{\sin(\phi_u + \delta)} + 1 \right\} \cos(\phi_u + \delta) - gb \leq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

所以在下半椭圆上的奇异点是稳定的，这里有向心力作用。

(viii) 侧立椭圆导轨。这里的切向力公式是

$$P_t = m \frac{\omega^2 x \pm \frac{ga(x-b)}{b\sqrt{b^2-(x-b)^2}}}{\sqrt{1 + \frac{a^2(x-b)^2}{b^2[b^2-(x-b)^2]}}} \quad (17.12)$$

若把 $x = b - b\cos\phi$ 代进上式，则得

$$P_t = m \frac{\omega^2 b^2 (1 - \cos\phi) \sin\phi \mp g a \cos\phi}{\sqrt{b^2 \sin^2\phi + a^2 \cos^2\phi}} \quad (17.13)$$

把条件 $P_t = 0$ 所给出的式子用以进行计算，即得图24中的曲线，其中

$$f_1 = \omega^2 b^2 (1 - \cos\phi) \sin\phi$$

$$f_2 = g a \cos\phi$$

ϕ_0 代表上半椭圆的奇异点角位, ϕ_u 代表下半椭圆奇异点角位。

现在转入讨论两奇异点的稳定性。对于上半椭圆, 可验证能成立下列不等式

$$\omega^2 b^2 \{1 - \cos(\phi_0 + \delta)\} \sin(\phi_0 + \delta) - ga \cdot \cos(\phi_0 + \delta) \geq 0 \quad (\delta \geq 0)$$

所以上半椭圆上的奇异点是非稳定的, 这里有离心力作用。

对于下半椭圆, 可以成立下列等式

$$\omega^2 b^2 \{1 - \cos\phi\} \sin\phi + ga \cos\phi = 0$$

现在把 $\phi_u = \pi - \psi_u$ 引进上式, 则得

$$\frac{\omega^2 b^2}{ga} \left\{ \frac{1}{\cos\psi_u} + 1 \right\} \sin\psi_u = 1$$

基于此式就可验证有不等式

$$\frac{\omega^2 b^2}{ga} \left\{ \frac{1}{\cos(\psi_u + \delta)} + 1 \right\} \sin(\psi_u + \delta) \geq 1 \quad (\delta \geq 0)$$

这就是说, 在下半椭圆上的奇异点是稳定的。

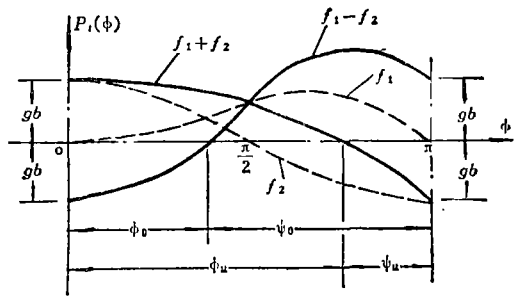


图24 旋转侧立椭圆导轨上质点奇异点位置图解; 对上半, ϕ 的正向是顺时针; 对下半, ϕ 的正向是逆时针。

十八、直接用奇异点坐标距 x_i 的增减值 $x_i \pm \delta$ 和切向力方程判断稳定

在前节中, (i) 抛物线形导轨和 (v) 悬线形导轨除外, 我们曾以三角函数代换来检查稳态, 本节拟直接用奇异点坐标距 x_i 的增减值 $x_i \pm \delta$, 但勿须再重作 (i) 和 (v) 两例。

(ii) 正圆形导轨。此处由导轨函数 $f(x) = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}$ 导得 $f'(x) = \mp \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, 其中上

下号各为上下半圆, 对于上半圆, $P_t = 0$ 给出 $(\omega^2 \sqrt{a^2 - x^2} + g)x = 0$, 从而 $x = 0$ 是奇异点, 因 $\omega^2 \sqrt{a^2 - x^2} + g \neq 0$, 但

$$P_t|_{x=0 \pm \delta} = \frac{m}{a} (\omega^2 \sqrt{a^2 - \delta^2} + g)(\pm \delta) \geq 0$$

就肯定了点 $x = 0$ 是个非稳定奇异点, 其中 δ 是个任意小正值。

对于下半圆, $P_t = 0$ 给出 $(\omega^2 \sqrt{a^2 - x^2} - g)x = 0$, 从而得到两个奇异点的坐标距 $x_{u1} = 0$ 和 $x_{u2} = \pm \sqrt{a^2 - \frac{g^2}{\omega^4}}$ 可以验证

$$\begin{aligned} P_t|_{x=x_{u2} \pm \delta} &= \frac{m}{a} \left(\omega^2 \sqrt{\frac{g^2}{\omega^4} \mp 2\delta x_{u2} - \delta^2} - g \right) (x_{u2} \pm \delta) \\ &= \frac{m}{a} \left\{ \omega^2 \left(\frac{g}{\omega^2} \mp \varepsilon \right) - g \right\} (x_{u2} \pm \delta) \end{aligned}$$

其中 ε 是个正微值。更因 $\delta \ll x_{u2}$, 所以 $x_{u2} \pm \delta > 0$, 以致关系

$$P_t|_{x=x_{u2}} = \mp \frac{m}{a} \omega^2 \varepsilon (x_{u2} \pm \delta) \leq 0$$

能肯定 x_{u_2} 是个稳定奇异点。

更由 $\omega^2 \sqrt{a^2 - x^2} = g$ 导出 $\omega^2 a > g$, 因而关系

$$P_i|_{x=\pm\delta} = \frac{m}{a} (\omega^2 \sqrt{a^2 - \delta^2} - g) (\pm\delta) \geq 0$$

肯定 $x_{u_1} = 0$ 是个非稳定奇异点。

(iii) 正平椭圆形导轨。此处 $f(x) = b \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$, $f'(x) = \mp \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}$ 。

对于上半椭圆, $P_i = 0$ 给出 $(\omega^2 + \frac{gb}{a\sqrt{a^2 - x^2}})x = 0$, 其中 $x_0 = 0$ 是个奇异点。更因有

$$P_i|_{x=\pm\delta} = m \frac{a\omega^2 \sqrt{a^2 - \delta^2} + gb}{\sqrt{a^2(a^2 - \delta^2) + b^2\delta^2}} (\pm\delta) \geq 0$$

所以 $x_0 = 0$ 是个非稳定奇异点。

对于下半椭圆, $P_i = 0$ 则给出 $(a\omega^2 \sqrt{a^2 - x^2} - gb)x = 0$, 其中有两个奇异点。由于 $|\delta| < x$ 和 $a\omega^2 \sqrt{a^2 - \delta^2} > gb$, 所以

$$P_i|_{x=\pm\delta} = m \frac{(a\omega^2 \sqrt{a^2 - \delta^2} - gb)(\pm\delta)}{\sqrt{a^2(a^2 - \delta^2) + b^2\delta^2}} \geq 0$$

能肯定 $x=0$ 是个非稳定奇异点。再者, 由 $a\omega^2 \sqrt{a^2 - x^2} - gb = 0$

可得 $x_i = \pm \sqrt{a^2 - \frac{g^2 b^2}{\omega^4 a^2}}$

据此得 $a\omega^2 \sqrt{a^2 - x_i^2} - gb = 0$ $a\omega^2 \sqrt{a^2 - (x_i \pm \delta)^2} - gb \neq 0$

从而得 $P_i|_{x=x_i \pm \delta} = m \frac{f(x_i, \delta)}{\sqrt{a^2[a^2 - (x_i \pm \delta)^2] + b^2(x_i \pm \delta)^2}}$

$$f(x_i, \delta) = (a\omega^2 \sqrt{a^2 - (x_i \pm \delta)^2} - gb)(x_i \pm \delta)$$

由于 $|x_i| \gg \delta$, 因而规定 $P_i|_{x=x_i \pm \delta} \geq 0$ 的式值是 $f(x_i, \delta)$ 。于是有

$$f(x_i, \delta) = a\omega^2 \sqrt{\frac{g^2 b^2}{\omega^4 a^2} \mp 2\delta x_i - \delta^2} - gb = a\omega^2 \left(\frac{gb}{\omega^2 a} \mp \varepsilon \right) - gb = \mp a\omega^2 \varepsilon \geq 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

来肯定 x_i 是个稳定奇异点。

(iv) 正立椭圆形导轨。此处是 $f(x) = a \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}$, $f'(x) = \mp \frac{ax}{b\sqrt{b^2 - x^2}}$ 。

对于上半椭圆, $P_i = 0$ 给出 $(b\omega^2 \sqrt{b^2 - x^2} + ga)x = 0$, 其中 $x=0$ 是个奇异点。但

$$P_i|_{x=\pm\delta} = m \frac{(b\omega^2 \sqrt{b^2 - \delta^2} + ga)(\pm\delta)}{\sqrt{b^2(b^2 - \delta^2) + a^2\delta^2}} \geq 0$$

就肯定了 $x=0$ 是个非稳定奇异点。

对于下半椭圆, $P_i = 0$ 给出的 $(b\omega^2 \sqrt{b^2 - x^2} - ga)x = 0$ 包括着两个奇异点 $x_{u_1} = 0$ 和

$x_{u_2} = \pm \sqrt{b^2 - \frac{g^2 a^2}{\omega^4 b^2}}$, 更因 $b\omega^2 \sqrt{b^2 - \delta^2} > ga$ 所以

$$P_i|_{x=\pm\delta} = m \frac{(b\omega^2 \sqrt{b^2 - \delta^2} - ga)(\pm\delta)}{\sqrt{b^2(b^2 - \delta^2) + a^2\delta^2}} \geq 0$$

肯定了 $x_{u1} = 0$ 是个非稳定奇异点。此外，更因

$$P_t|_{x=x_{u2}} \sim \left\{ b\omega^2 \sqrt{\frac{g^2 a^2}{\omega^2 b^2} \mp 2\delta x_{u2} - \delta^2} - ga \right\} (x_{u2} \pm \delta)$$

$$\sim \left\{ b\omega^2 \left(\frac{ga}{\omega^2 b} \mp \varepsilon \right) - ga \right\} (x_{u2} \pm \delta) = \mp b\omega^2 \varepsilon (x_{u2} \pm \delta)$$

$$\leq 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

据此， x_{u2} 是个稳定奇异点。

(vi) 侧圆形导轨。此例中有 $f(x) = \pm \sqrt{a^2 - (x-a)^2}$ ， $f'(x) = \mp \frac{x-a}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}}$ 。

对于上半圆， $P_t = 0$ 给出包着奇异点 x_0 的 $\omega^2 x_0 \sqrt{a^2 - (x_0 - a)^2} + g x_0 - ga = 0$ ($0 < x_0 < a$)，而 $f(x_0, \delta) = \omega^2 (x_0 \pm \delta) \sqrt{a^2 - (x_0 \pm \delta - a)^2} + g(x_0 \pm \delta - a) \neq 0$ ，

以 $\varepsilon_0 = \mp \frac{2(x_0 - a)\delta \pm \delta^2}{a^2 - (x_0 - a)^2}$ 和 $\sqrt{1 + \varepsilon_0} = 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_0 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \varepsilon_0^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon_0^3 \dots = 1 + S_0$ ，($S_0 \geq 0$ ，

$\delta > 0$)，就简化成

$$f(x_0, \delta) = \sqrt{a^2 - (x_0 - a)^2} \{ \pm \delta + (x_0 \pm \delta) S_0 \} \omega^2 \pm g\delta \geq 0 \quad (x_0 \pm \delta > 0)$$

据此， x_0 是个非稳定奇异点。

以 x_u 代表下半圆上的奇异点，并且 $x_u > a$ ，则 $P_t = 0$ 给出的 $\omega^2 x_u \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} - g \cdot (x_u - a) = 0$ 更因 $a < x_u < 2a$ 和 $\sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} > 0$ ，所以得

$$f(x_u, \delta) = \omega^2 (x_u \pm \delta) \sqrt{a^2 - (x_u \pm \delta - a)^2} - g(x_u \pm \delta - a) \neq 0$$

再以 $\varepsilon_u = \mp \frac{2(x_u - a)\delta \pm \delta^2}{a^2 - (x_u - a)^2}$ ， $S_u = \frac{1}{2} \varepsilon_u - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \varepsilon_u^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon_u^3 \dots \leq 0$ ($\delta > 0$)

而得 $f(x_u, \delta) = \pm \{ \omega^2 \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} - g \} + \omega^2 (x_u \pm \delta) S_u \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} \leq 0$ ($\delta > 0$)

因而 x_u 是个稳定奇异点。

(vii) 侧平椭圆形导轨。在此例中

$$f(x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x-a)^2}, \quad f'(x) = \mp \frac{b(x-a)}{a\sqrt{a^2 - (x-a)^2}}$$

对于上半椭圆， $P_t = 0$ ，给出包括奇异点 x_0 的 $a\omega^2 x_0 \sqrt{a^2 - (x_0 - a)^2} + gb x_0 - gab = 0$ ，其中 $x_0 < a$ ；从而得

$$f(x_0, \delta) = a\omega^2 (x_0 \pm \delta) \sqrt{a^2 - (x_0 \pm \delta - a)^2} + gb(x_0 \pm \delta - a) \neq 0 \quad (\delta > 0)$$

经过整简则得

$$f(x_0, \delta) = a\omega^2 \sqrt{a^2 - (x_0 - a)^2} \{ \pm \delta + (x_0 \pm \delta) S \} \pm gb\delta \geq 0$$

据此， x_0 是个非稳定奇异点，其中

$$S = \frac{1}{2} \varepsilon_0 - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \varepsilon_0^2 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} \varepsilon_0^3 - \dots \geq 0, \quad \varepsilon_0 = \mp \frac{2(x_0 - a)\delta \pm \delta^2}{a^2 - (x_0 - a)^2}$$

对于下半椭圆，自 $P_t = 0$ 给出的 $a\omega^2 x_u \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} - gb(x_u - a) = 0$ 推出

$$f(x_u, \delta) = a\omega^2 (x_u \pm \delta) \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} - gb(x_u \pm \delta - a) \neq 0, \text{ 更以}$$

$$\varepsilon_u = \mp \frac{2(x_u - a)\delta \pm \delta^2}{a^2 - (x_u - a)^2}, \quad S = \frac{1}{2} \varepsilon_u - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4} \varepsilon_u^2 + \dots \leq 0, \quad a\omega^2 \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} < gb, \quad x_u \gg \delta$$

所以得

$$f(x_u, \delta) = \pm \{a\omega^2 \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} - gb\} \delta + a\omega^2 \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} (x_u \pm \delta) S \leq 0$$

这就说明 x_u 是个稳定奇异点。

(viii) 侧立椭圆形导轨。此处 $f(x) = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x-b)^2}$, $f'(x) = \mp \frac{a(x-b)}{b\sqrt{b^2 - (x-b)^2}}$ 。

对于上半椭圆, 自 $P_t = 0$ 得

$$b\omega^2 x_o \sqrt{b^2 - (x_o - b)^2} + gax_o - gab = 0$$

但

$$f(x_o, \delta) = b\omega^2 (x_o \pm \delta) \sqrt{b^2 - (x_o \pm \delta - b)^2} + ga(x_o \pm \delta) - gab \neq 0$$

再因 $\varepsilon_o = \mp \frac{2(x_o - b)\delta \pm \delta^2}{b^2 - (x_o - b)^2}$, $S = \frac{1}{2}\varepsilon_o - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\varepsilon_o' + \dots \geq 0$, $x_o < b$, $x_o \gg \delta$, 而得证明 x_o 是个非稳定点的关系。

$$f(x_o, \delta) = b\omega^2 \sqrt{b^2 - (x_o - b)^2} \{ \pm \delta + (x_o \pm \delta) S \} \pm ga\delta \geq 0$$

对于下半椭圆, $P_t = 0$ 给出 $b\omega^2 x_u \sqrt{b^2 - (x_u - b)^2} - gax_u + gab = 0$

从而推出 $f(x_u, \delta) = b\omega^2 (x_u \pm \delta) \sqrt{b^2 - (x_u \pm \delta - b)^2} - ga(x_u \pm \delta) + gab \neq 0$

注意 $\varepsilon_u = \mp \frac{2(x_u - b)\delta \pm \delta^2}{b^2 - (x_u - a)^2}$, $S = \frac{1}{2}\varepsilon_u - \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\varepsilon_u' + \dots \leq 0$, $2b > x_u > b$, $x_u \gg \delta$

$$b\omega^2 \sqrt{b^2 - (x_u - b)^2} < ga$$

所以得 $f(x_u, \delta) = \pm \{b\omega^2 \sqrt{b^2 - (x_u - b)^2} - ga\} \delta + b\omega^2 (x_u \pm \delta) S \sqrt{b^2 - (x_u - b)^2} \leq 0$
因而 x_u 是个稳定奇异点。

十九、用判据来判断稳态

前节曾用切向力方程与奇异点坐标距的少渐增减来检查质点的运动稳态。虽然判据是以切向力方程推论而得, 但在效用与简便等方面两者大不相同; 本节就专用判据 (13.3), (13.4), (13.5) 及判据由出的关系 (13.2) 来判断质点运动的稳态, 俾作比较。

(i) 抛物线形导轨。由于这种导轨有些特别, 拟留给下一节去处理。

(ii) 正圆形导轨。对于此例,

$$f(x) = a \pm \sqrt{a^2 - x^2}, \quad f'(x) = \mp \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad f''(x) = \mp \frac{a^2}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

对于上半圆的 $x=0$ 点, 有 $f''(x) \Big|_{x=0} = -\frac{1}{a}$, $\frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2 x f'} \Big|_{x=0} = \frac{\omega^2}{g}$; 此外, $P_t = 0$ 能

给出 $\frac{\omega^2}{g} > -\frac{1}{a}$, 所以得 $f''(x) \Big|_{x=0} = -\frac{1}{a} < \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2 x f'} \Big|_{x=0} = \frac{\omega^2}{g}$

据此, 点 $(0, 2a)$ 是个非稳定奇异点。

对于下半圆, $P_t = 0$ 给出 $\frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\omega^2}{g}$, 因而 $\frac{1}{a} < \frac{\omega^2}{g}$; $f''(x) \Big|_{x=0} = \frac{1}{a}$,

$\frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2 x f'} \Big|_{x=0} = \frac{\omega^2}{g}$, 因而得

$$f''(x) \Big|_{x=0} = \frac{1}{a} \begin{cases} \leq \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \\ \geq \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \end{cases} \Big|_{x=0} = \begin{cases} \frac{\omega^2}{g} \\ 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \text{非稳定奇异点} \\ \text{稳定奇异点} \end{array} \right.$$

更因 $a > x_u$, 所 $a^2 > a^2 - x_u^2$, 于是得

$$f''(x) \Big|_{x=x_u} = \frac{a^2}{(a^2-x_u^2)^{3/2}} > \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \Big|_{x=x_u} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x_u^2}}$$

因此, 点 $\{x_u, f(x_u)\}$ 是个稳定点.

(iii) 正平椭圆形导轨. 此处有

$$f(x) = b \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}, \quad f'(x) = \mp \frac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad f''(x) = \mp \frac{ab}{(a^2 - x^2)^{3/2}}$$

对于上半椭圆, 对于点 $(0, 2b)$ 可得

$$f''(x) \Big|_{x-x_0=0} = -\frac{b}{a^2} < \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \Big|_{x-x_0=0} = \frac{\omega^2}{g} \Big|_{\omega>0}$$

据此, 即便 $\omega=0$, 点 $(0, 2b)$ 仍是个非稳定点.

对于下半椭圆, 可以验证

$$f''(x) \Big|_{x-x_0=0} = \frac{b}{a^2} \geq \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \Big|_{x-x_0=0} = \frac{\omega^2}{g} \Big|_{\omega>0}$$

更因 $P_i=0$ 给出 $a\omega^2x\sqrt{a^2-x^2} - gbx=0$, 从而得 $\frac{\omega^2}{g} > \frac{b}{a^2}$, 因而, 当 $\omega > 0$ 时, 点 $(0, 0)$ 是个非稳定点; 而当 $\omega=0$ 时, 点 $(0, 0)$ 是个稳定点, 仍因 $a^2\omega^2 > gb$, 所以有

$$f''(x) \Big|_{x-x_u>0} = \frac{a^4\omega^6}{g^3b^2} > \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \Big|_{x-x_u>0} = \frac{\omega^2}{g}$$

以致点 $\{x_u, f(x_u)\}$ 是个稳定奇异点, 其中自然 $x_u > 0$.

(iv) 正立椭圆形导轨. 在此例中

$$f(x) = a \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - x^2}, \quad f'(x) = \mp \frac{ax}{b\sqrt{b^2 - x^2}}, \quad f''(x) = \mp \frac{ab}{(b^2 - x^2)^{3/2}}$$

对于上半椭圆, 从而有

$$f''(x) \Big|_{x-x_0=0} = -\frac{a}{b^2} < \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \Big|_{x-x_0=0} = \frac{\omega^2}{g} \Big|_{\omega>0}$$

因而点 $(0, 2a)$ 无论如何是个非稳定点.

对于下半椭圆. $P_i=0$ 给出 $\{b\omega^2\sqrt{b^2-x_u^2} - ga\}x_{u1}=0$, 从而得 $\frac{\omega^2}{g} > \frac{a}{b^2}$, 所以推得

$$f''(x) \Big|_{x-x_{u1}=0} = \frac{a}{b^2} \geq \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \Big|_{x-x_{u1}=0} = \frac{\omega^2}{g} \Big|_{\omega>0}$$

$$f''(x) \Big|_{x-x_{u2}>0} = \frac{b^4\omega^6}{a^2g^3} > \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \Big|_{x-x_{u2}>0} = \frac{\omega^2}{g}$$

根据以上两不等式, 当 $\omega > 0$ 时, 点 $(0, 0)$ 是非稳定的; 当 $\omega=0$ 时, 点 $(0, 0)$ 是稳定的; 点

$(x_{u_2}, f(x_{u_2}))$ 是个稳定奇异点。

(v) 悬线形导轨。此例的有关式子是

$$f(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), f'(x) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right), f''(x) = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$$

从而推得 $f''(x) = \frac{1}{a} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a} \sqrt{1 + \frac{\omega^4 x^2}{g^2}}, \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g + \omega^2 x f'} = \frac{\omega^2}{g}$

因为 $P_i = 0$ 给出 $\sinh\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{\omega^2 x}{g}$, 于是可成立下式

$$1 + \frac{\omega^4 x^2}{g^2} \geq \frac{\omega^4 a^2}{g^2}$$

它可以用来探讨质点运动的稳态。

易于发现, 当 $\frac{\omega^4 a^2}{g^2} = 1$ 时, 则须 $\frac{\omega^4 x^2}{g^2} = 0$, 从而得 $x_i = 0$, 意即, 点 $(0, a)$ 是个稳定点;

当 $\frac{\omega^4 a^2}{g^2} > 1$ 时, 则 $\frac{\omega^4 x^2}{g^2} > 0$, 因而 $x_i > 0$, 意即, 在条件 $\frac{\omega^4 a^2}{g^2} > 1$ 之下, 原来的稳定奇异向外

移动了。因而得出, 当 $\omega \leq \sqrt{\frac{g}{a}}$ 时, $x_i = 0$; 当 $\omega > \sqrt{\frac{g}{a}}$ 时, $x_i > 0$ 。这个结果跟图17所示的稳态变化是一致的。

(vi) 侧圆形导轨。此处应是

$$f(x) = \pm \sqrt{a^2 - (x-a)^2}, f'(x) = \mp \frac{x-a}{\sqrt{a^2 - (x-a)^2}}, f''(x) = \mp \frac{a^2}{[a^2 - (x-a)^2]^{3/2}}$$

对于上半圆, $P_i = 0$ 给出产生一个奇异点 x_0 的关系 $\sqrt{a^2 - (x-a)^2} = \frac{g(a-x)}{\omega^2 x}$, ($x < a$),

于是由关系 $f''(x) \Big|_{x=x_0} = -\frac{a^2 \omega^6 x^3}{g^3 (a-x)^3} \Big|_{x=x_0} < \frac{a^2 \omega^6 x^3}{g^3 x (a-x)^2 \left[1 + \frac{\omega^2 x^2}{g^2}\right]} \Big|_{x=x_0}$

可以断定, 在导轨的 x_0 处有一个非稳定奇异点。

对于下半圆, $P_i = 0$, 给出含有一个奇异点 x_u 的关系 $\omega^2 x_u \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} - g(x_u - a) = 0$ 。

更因 $x_u - a \gg \delta$, $2a > x_u > a$, $x_u(x_u - a) = (a + \Delta)\Delta^2 > (x_u - a)^3 = \Delta^3$, ($\Delta > 0$); $1 + \frac{\omega^4 x_u^2}{g^2} > 1$,

所以自关系

$$f''(x) \Big|_{x=x_u} = \frac{a^2 \omega^6 x_u^3}{g^3 (x_u - a)^3} > \frac{\omega^2 (1 + f'^2)}{g + \omega^2 x f'} \Big|_{x=x_u} = \frac{a^2 \omega^6 x_u^3}{g^3 x_u (x_u - a)^2 \left[1 + \frac{\omega^4 x_u^2}{g^2}\right]}$$

能断言, 点 $(x_u, f(x_u))$ 是个稳定奇异点。

(vii) 侧平椭圆形导轨。对于此例,

$$f(x) = \pm \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - (x-a)^2}, f'(x) = \mp \frac{b(x-a)}{a \sqrt{a^2 - (x-a)^2}}$$

$$f''(x) = \mp \frac{ab}{[a^2 - (x-a)^2]^{3/2}}$$

对于上半椭圆, $P_t=0$, 给出产生奇异点坐标 x_o 的方程 $\omega^2 x_o \sqrt{a^2 - (x_o - a)^2} = \frac{gb(a - x_o)}{a}$, ($0 < x_o < a$), 并且可自能验证的不等式

$$f''(x) \Big|_{x=x_o < a} = -\frac{a^4 \omega^8 x_o^3}{g^3 b^2 (a - x_o)^3} < \frac{\omega^2 (1 + f'^2)}{g + \omega^2 x f'} \Big|_{x=x_o < a} = \frac{\omega^2}{g}$$

肯定, 点 $(x_o, f(x_o))$ 是个非稳定点。

对于下半椭圆, $P_t=0$ 提供奇异点坐标 x_u 的方程 $x_u \omega^2 \sqrt{a^2 - (x_u - a)^2} = g \frac{b}{a} (x_u - a)$. 由于能验证

$$\frac{a^4 \omega^8 x_u^3}{g^3 b^2 (x_u - a)^3} \gg 1 \quad (2a > x_u > a)$$

和下列不等式 $f''(x) \Big|_{x=x_u > a} = \frac{a^4 \omega^8 x_u^3}{g^3 b^2 (x_u - a)^3} > \frac{\omega^2 (1 + f'^2)}{g + \omega^2 x f'} \Big|_{x=x_u > a} = \frac{\omega^2}{g}$

可以断定, 点 $(x_u, f(x_u))$ 是个稳定奇异点。

(viii) 侧立椭圆形导轨。对于此例,

$$f(x) = \pm \frac{a}{b} \sqrt{b^2 - (x - b)^2}, f'(x) = \mp \frac{a(x - b)}{b \sqrt{b^2 - (x - b)^2}}, f''(x) = \mp \frac{ab}{\{b^2 - (x - b)^2\}^{3/2}}.$$

对于上半椭圆, 产生切向力消逝的地点 x_o 的方程是 $\sqrt{b^2 - (x_o - b)^2} = \frac{ga(b - x_o)}{b\omega^2 x_o}$, ($b > x_o > 0$). 于是可由下列不等式

$$f''(x) \Big|_{x=x_o > 0} = -\frac{b^4 \omega^8 x_o^3}{g^3 a^2 (b - x_o)^3} < \frac{\omega^2 (1 + f'^2)}{g + \omega^2 x f'} \Big|_{x=x_o > 0} = \frac{\omega^2}{g}$$

断言, 点 $\{x_o, f(x_o)\}$ 是个非稳定奇异点。

对于下半椭圆, $P_t=0$ 给出奇异点坐标 x_u 的方程 $\sqrt{b^2 - (x_u - b)^2} = \frac{ga(x_u - b)}{b\omega^2 x_u}$, ($x_u > b$).

再由可以验证的关系 $\frac{b^4 \omega^8 x_u^3}{g^3 a^2 (x_u - b)^3} \gg 1$ 和下列不等式

$$f''(x) \Big|_{x=x_u > b} = \frac{b^4 \omega^8 x_u^3}{g^3 a^2 (x_u - b)^3} > \frac{\omega^2 (1 + f'^2)}{g + \omega^2 x f'} \Big|_{x=x_u > b} = \frac{\omega^2}{g}$$

就可肯定, 点 $\{x_u, f(x_u)\}$ 是个稳定奇异点。

二十、出现 $f''(x) \Big|_{x=0} \equiv \infty$, $f''(x) \Big|_{-\infty < x < \infty} \equiv \text{Const.}$

和 $f''(x) \Big|_{-\infty < x < \infty} \equiv 0$ 等情况的例题

本节求解两个比较特殊的例题, 其中抛物线形导轨是以前曾提出过的, 把它留到本节处理是因为这种导轨的 $f''(x)$ 有点特殊, 两倾斜连结直轨是个新例子, 因为它的 $f''(x)$ 更加特殊。

(i) 抛物线形导轨。对于此例, 则有 $f(x) = \frac{x^2}{2p}$, $f'(x) = \frac{x}{p}$, $f''(x) = \frac{1}{p} > 0$ 。

易于验证, 可成立下列三个关系

$$P_t \left| \begin{array}{l} x = \pm \delta \\ \omega > \sqrt{\frac{g}{p}} \end{array} \right. = m \frac{\left(\omega^2 - \frac{g}{p}\right)x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}} \left| \begin{array}{l} x = \pm \delta \\ \omega = \sqrt{\frac{g}{p}} \end{array} \right. \geq 0 \quad (20.1)$$

$$P_t \left| \begin{array}{l} x = \pm \delta \\ \omega < \sqrt{\frac{g}{p}} \end{array} \right. = m \frac{\left(\omega^2 - \frac{g}{p}\right)x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}} \left| \begin{array}{l} x = \pm \delta \\ \omega < \sqrt{\frac{g}{p}} \end{array} \right. \leq 0 \quad (20.2)$$

$$P_t \left| \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ \omega = \sqrt{\frac{g}{p}} \end{array} \right. = m \frac{\left(\omega^2 - \frac{g}{p}\right)x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{p^2}}} \left| \begin{array}{l} -\infty < x < \infty \\ \omega = \sqrt{\frac{g}{p}} \end{array} \right. = 0 \quad (20.3)$$

公式(20.1)显示, 当 $\omega > \sqrt{\frac{g}{p}}$ 时, 坐标原点(0,0)是个非稳定奇异点; (20.2)式说明,

当 $\omega < \sqrt{\frac{g}{p}}$ 时, 坐标原点(0,0)才能成为一个稳定奇异点; 自(20.3)式看出, 当质点初速等于零时, 全 x 轴变成一条质点滞留点线; 而当质点有初速时, 质点不停地奔向 $+\infty$ 或 $-\infty$ 处, 因为虽无合力存在, 但有惯性作用。

再用判据(13.4)和(13.5)来检查, 则得

$$f''(x) = \frac{1}{p} \left\langle \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \right|_{\omega > \sqrt{\frac{g}{p}}} = \frac{\omega^2}{g} \left|_{\omega > \sqrt{\frac{g}{p}}} \quad (20.4)$$

$$f''(x) = \frac{1}{p} \left\langle \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \right|_{\omega < \sqrt{\frac{g}{p}}} = \frac{\omega^2}{g} \left|_{\omega < \sqrt{\frac{g}{p}}} \quad (20.5)$$

$$f''(x) = \frac{1}{p} = \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2xf'} \left|_{\omega = \sqrt{\frac{g}{p}}} = \frac{\omega^2}{g} \left|_{\omega = \sqrt{\frac{g}{p}}} \quad (20.6)$$

不等式(20.4)和(20.5)的结果与(20.1)式和(20.2)式的符合; (20.6)式则与(20.3)的符合, 意即, 在质点上没有作用合力。

(ix) 两连结倾斜直轨。这是本文中所选取的第九个例题。在这个例题中, 可取 $f(x) = qx \operatorname{sgn} x$, 或取 $f(x) = qx$, 其中 $q \geq 0$ 当 $x \geq 0$, 其安排如图25所示。

1) 切向力法。 $P_t|_{x=x_i \pm \delta} \geq 0$, $P_t|_{x=x_i \pm \delta} \leq 0$ 于是有 $f'(x) = q = \tan \alpha$; $f''(x) \equiv 0$, ($x \geq 0$)。于是依切向力公式而得

$$P_t \left| \begin{array}{l} x_i = \pm \delta \\ x < \frac{gq}{\omega^2} \end{array} \right. = m \frac{\omega^2(\pm \delta) - gq}{\sqrt{1+q^2}} \leq 0 \quad (x \geq 0) \quad (20.7)$$

$$P_t \left| \begin{array}{l} x_i = \frac{gq}{\omega^2} \pm \delta \\ x > \frac{gq}{\omega^2} \end{array} \right. = m \frac{\omega^2 x - gq}{\sqrt{1+q^2}} \left|_{x_i = \frac{gq}{\omega^2} \pm \delta} = \pm \frac{\omega^2 \delta}{\sqrt{1+q^2}} \geq 0 \quad (20.8)$$

据(20.7)式所示, 坐标原点是个稳定点; (20.8)式示明, $x_i = \frac{gq}{\omega^2}$ 是个非稳定点。

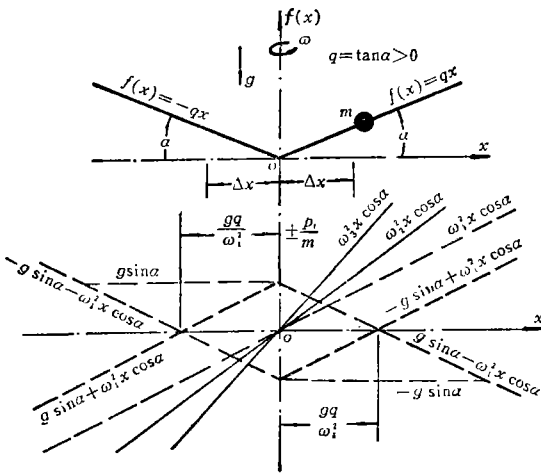


图25 两连接倾斜直线导轨及其作用力特征线

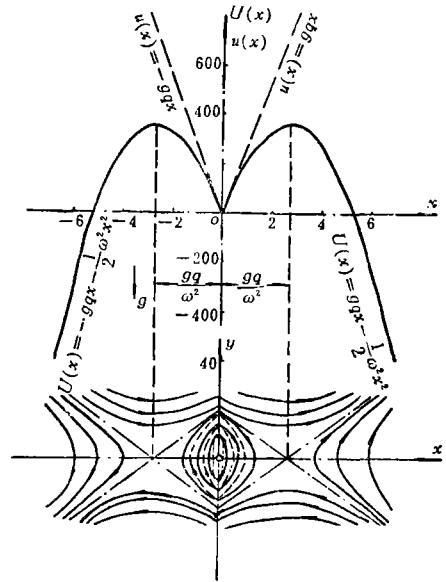


图26 两连接倾斜直轨一例的势函数曲线及态平面解

2) 态平面法。这里右枝的势函数是 $U_r = m \left\{ gqx - \frac{\omega^2}{2} x^2 \right\}$, ($x > 0$); 左枝的势函数式

是 $U_l = m \left\{ -gqx - \frac{\omega^2}{2} x^2 \right\}$, ($x < 0$)。 $\frac{dU_l}{dx} = 0$ 提供 $x_l = \pm \frac{gq}{\omega^2}$; $\frac{d^2U_l}{dx^2} = -m\omega^2 < 0$ 说明,

U_l 有其最高峰。此外, 根据(9.8)式, 尚须利用 $(1+f'^2)y^2 + 2gf - \omega^2 x^2 = C$; $C = \frac{g^2 q^2}{\omega^2}$ 作为积分常数, 即得图解的两叉分线

$$y = \mp \frac{\omega^2 x - gq}{\omega \sqrt{1+q^2}} \quad (x \geq 0, q \geq 0) \quad (20.9)$$

若取 $m = 1$, $\alpha = 15^\circ$, $q = 0.2680$, $g = 981 \text{ cm/sec}^2$, $\omega = 10 \text{ rad/sec}$ 来进行计算, 所得数据可用来绘成图 26 中的势函数曲线和质点运动轨迹曲线。图26显示, 稳态全符合切向力法的结果。图中围绕态平面坐标原点的三条合口曲线是 $\omega = 0$ 时的质点运动轨迹^[4]。

3) 直接利用判据。 $P_t = 0$ 给出奇异点的坐标 $x_t = -\frac{gq}{\omega^2}$; 据此可得

$$f''(x) \Big|_{x=x_t = \frac{gq}{\omega^2}} = 0 < \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2 x f'} \Big|_{x=x_t = \frac{gq}{\omega^2}} = \frac{\omega^2}{g} \quad (20.10)$$

据此, $\left\{ \frac{gq}{\omega^2}, \frac{g^2 q^2}{\omega^2} \right\}$ 是个非稳定奇异点。

此外, 又可得

$$f''(x) \Big|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q - (-q)}{2 \Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{q}{\Delta x} = \infty$$

$$> \frac{\omega^2(1+f'^2)}{g+\omega^2 x f'} \Big|_{x=0} = \frac{\omega^2(1+q^2)}{g+\omega^2 x q} \Big|_{x=0} = \frac{\omega^2}{g}(1+q^2) \quad (20.11)$$

因此, 坐标原点(0,0)是个高度稳定点。

二十一、半稳定点或半非稳定点

本节要略作提述, 当导轨曲线上存在着转折点(inflectional point)的特殊情况, 如图27和图28的示意.

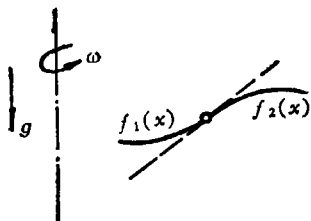


图27 $f_1(x)$ 是稳轨, 非稳轨 $f_2(x)$;
半稳定导轨 $f_1(x)+f_2(x)$.

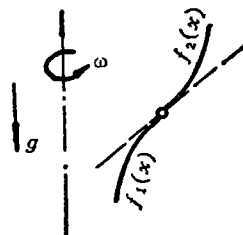


图28 非稳轨 $f_1(x)$, 稳轨 $f_2(x)$;
半稳定导轨 $f_1(x)+f_2(x)$.

在这两种导轨上, 则有 $f'_1(x_i) = f'_2(x_i) = \frac{\omega^2}{g}x_i$ 和 $f''_1(x_i) \neq f''_2(x_i)$, 其中 x_i 是 $gf'_i(x) - x\omega^2 = 0$ 和 $gf'_i(x) - x\omega^2 = 0$ 的同根. 于是对于图27的安排, 则得

$$\left. \begin{aligned} f''_1(x) \Big|_{x=x_i} &> \frac{g(1+f_1'^2)}{g+\omega^2xf'_1} \Big|_{x=x_i} \\ f''_2(x) \Big|_{x=x_i} &< \frac{g(1+f_2'^2)}{g+\omega^2xf'_2} \Big|_{x=x_i} \end{aligned} \right\} \quad (21.1)$$

$$P_i \Big|_{x=x_i \pm \delta} > 0$$

对于图28所示的导轨, 则有

$$\left. \begin{aligned} f''_1(x) \Big|_{x=x_i} &< \frac{g(1+f_1'^2)}{g+\omega^2xf'_1} \Big|_{x=x_i} \\ f''_2(x) \Big|_{x=x_i} &> \frac{g(1+f_2'^2)}{g+\omega^2xf'_2} \Big|_{x=x_i} \end{aligned} \right\} \quad (21.2)$$

$$P_i \Big|_{x=x_i \pm \delta} < 0$$

其中 δ 是个微小正值. 关于这种中间性情况, 前人在著作中也曾提到^{[6][12]}, 虽然那里的例子有所不同. 在[5]和[12]里也载有所属态平面运动轨迹, 兹不重论.

二十二、三种方法的摘要比较

态平面法和势函数法虽然在其计算细节上颇有区别, 但这两法在基本原理上应当认为是属于一类; 当分析一些比较简单的问题时, 这两法的运算尚不太冗长; 但对于比较复杂的问题, 例如本文提出的侧圆导轨和侧椭圆导轨, 则运算繁重, 往往会出现高次代数方程求解.

本文所建议的切向力法就比较简便. 在应用此法的过程中, 不需要通过繁难的思索去先建立Lagrange微分方程, 而是只需要把必然已事先给定了的导轨函数 $f(x)$ 及其一阶微商 $f'(x)$ 代进切向力的一般方程, 然后再进行别的分析.

在显示问题的物理意义上, 切向力法的效用就更为突出; 就此, 切向力法能使大家惯于

引用的重要参数 $\lambda = \omega^2 - 2g \frac{f(x)}{x^2}$ 的物理意义更加明显。

由于其有关方程都比较简短，切向力法能给出更准确的奇异点位置；对于探定奇异点的性质，切向力法的运算过程也比较简短，尤其当借助于所建立的三个判律时，更觉简便。

参 考 文 献

- [1] Butenin, N. V., *Elements of the Theory of Nonlinear Oscillations*, New York, London, (1966).
- [2] Lorenz, H., *Technische Mechanik Starrer Gebilde*, Julius Springer, (1924).
- [3] Бабаков, И. М., *Теория Колебаний*, Москва, (1958).
- [4] Kauderer, H., *Nichtlineare Mechanik*, Berlin/Göttingen/Heidelberg, (1958).
- [5] Андронов, А.А., А.А. Витт и С. Э. Хайкин, *Теория Колебаний*, Москва, (1959).
- [6] Pöschl, Th., *Lehrbuch der Technischen Mechanik*, Springer-Verlag, (1930).
- [7] Stoker, J. J., *Nonlinear Vibrations in Mechanical and Electrical Systems*, New York, London, (1950).
- [8] Wittenbauer, F. und Th. Pöschl, *Aufgaben aus der Technische Mechanik*, 1. Teil, Springer Verlag, Berlin, (1931).
- [9] Hamel, G., *Theoretische Mechanik*, eine einheitliche Einführung in die gesamte Mechanik, Springer Verlag, Berlin, (1949).
- [10] Prasil, F., *Technische Hydrodynamik*, Springer Verlag, Berlin, (1926).
- [11] Schuler, M., *Einführung in die Mechanik*, Teil I, Wolfenbüttel, (1950).
- [12] Andronow, A. A. and C. E. Chaikin, *Theory of Oscillations*, Princeton University Press, New Jersey, (1949).
- [13] "Hütte" des *Ingenieurs Taschenbuch*, Verlag von Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin, (1931).

Using Tangential Force Method to Detect the Singular Points and to Discriminate Their Stability Conditions of a Movable Mass Point on any Guide Curve Rotating about a Vertical Axis without Friction

Liu Hsien-chih

(*Shandong Institute of Technology, Jinan*)

Abstract

Ever since one has used generally the state plane method to search the singular points and to decide their equilibrium state for a mass points sliding on a guide rail rotating about a vertical axis with friction disregarded. For the same purpose, this paper presents another method which may be briefly named; "The Tangential Force Method". In contrast with the state plane method, the new one is much more simpler both in argumentation and in calculation, especially when one resorts to the five criteria in section XIII.

Throughout the paper the function for defining the guide rail was introduced, with most endeavor, in the equations newly set up, in order to avoid to deduce them each time, i. e., the useful equations are set up somewhat once for ever.

Moreover, the condition of letting the tangential force to vanish yield two solutions, the parabolic and the exponential curves of the shape of the guide rails; they are two other orthogonal curve families although not conjugate harmonics.

In the last part of the paper, we present nine examples to show the superiority of this method against the state plane and the potential function methods; seven of the nine examples might be considered as newly introduced by this paper.