应用数学和力学，第4卷第1期（1983年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

离散型线性定常系统的摄动矩阵李亚普诺夫方程的若干问题*

黄　琳　　朱伟灵

（北京大学力学系，1982年1月21日收到）

摘　要

本文讨论了离散型线性定常系统在系统参数发生扰动时的李亚普诺夫稳定性与波波夫超稳定性．给出了容许的摄动界，使得离散型线性系统的李亚普诺夫稳定性与波波夫超稳定性的维持得到了保证．该结果在MRAC（模型参考自适应控制）中是具有意义的．

在实际运用的广泛控制系统中经常会遇到离散型线性定常系统．在大多数情况下，当受到环境干扰时控制系统总会发生参数摄动，因此我们经常面临的是摄动的离散型线性定常系统．遇此情况，系统的稳定性问题就是首要关心的问题．因系统参数摄动的确实数据往往是未知的，我们就无法依据实际变动的参数值来判定离散型的线性系统是稳定的或不稳定的．我们希望建立一个一般性的标准，依据该标准可以确定系统参数可以改变到何适当范围，使其稳定性终将得到保证．"稳定性"这一词在此同时被理解为李亚普诺夫意义的稳定性与波波夫意义的超稳定性．

一、李亚普诺夫稳定性

设离散型线性定常系统的数学描述为

$$x(k+1)=Ax(k),\qquad x(0)=x_0 \tag{1.1}$$

其中 $x\in R^n$ 为状态变量，$A\in R^{n\times n}$ 为系统矩阵．系统（1.1）是渐近稳定的当且仅当下面的矩阵方程

$$A^TPA-P=-Q \tag{1.2}$$

对任意的正定阵 Q 具有唯一正定矩阵解 P．

记矩阵 $H\in R^{n\times n}$ 为系统矩阵的摄动阵．因此摄动的离散型线性系统的方程为

$$x(k+1)=(A+H)x(k),\ \ x(0)=x_0 \tag{1.3}$$

我们的目的是确定 H 的摄动界限，在此界限内无须知道系统矩阵的个别参数如何改变就能使摄动的系统（1.3）保持渐近稳定．处理该问题的主要数学工具是矩阵的 Kronecker 乘积及与此相关的映射 σ．现在给出下面的定义．

定义1． 矩阵 $F\in R^{m\times n}$ 与矩阵 $G\in R^{l\times k}$ 的 Kronecker 乘积为一 $(ml\times nk)$ 阶矩阵，表

---

* 朱照宣推荐．

为

$$F\otimes G=\begin{bmatrix} f_{11}G & f_{12}G & \cdots & f_{1n}G \\ f_{21}G & f_{22}G & \cdots & f_{2n}G \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{m1}G & f_{m2}G & \cdots & f_{mn}G \end{bmatrix}\in R^{ml\times nk}$$

显然，这是由 $R^{m\times n}\times R^{l\times k}$ 到 $R^{ml\times nk}$ 的一种特殊的映射。

定义2. 映射 σ 是由 $R^{m\times n}$ 到 R^{mn} 的一种线性映射，即一 m 行 n 列矩阵在该映射下的象是一 mn 维向量。如果

$$X=\begin{bmatrix} x_1^T \\ x_2^T \\ \vdots \\ x_m^T \end{bmatrix}\in R^{m\times n}$$，其中 x_i^T 是向量 x_i 的转置，则 X 的象 $\sigma(X)$ 被记为

$$\sigma(X)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}=x\in R^{mn}$$

关于 Kronecker 乘积与相关的映射 σ 有一些重要的性质[1]，为下面讨论所需，在此仅列举二条性质。

性质1. 如果 A，B，C，$D\in R^{n\times n}$，则有下面的等式成立：

$$(A\otimes B)\cdot(C\otimes D)=(AC)\otimes(BD) \tag{1.4}$$

性质2. 如果 A，X，B，$Q\in R^{n\times n}$ 满足矩阵方程

$$AXB=Q \tag{1.5}$$

则 X 在映射 σ 之下的象满足方程

$$(A\otimes B^T)\cdot x=q \tag{1.6}$$

其中 $x=\sigma(X)$，$q=\sigma(Q)$。

现令 σ 作用到方程 (1.2) 的两端，便得到

$$(A^T\otimes A^T-I_{n^2})\cdot p=-q \tag{1.7}$$

其中 $p=\sigma(P)$，$q=\sigma(Q)$。

记 $\mathscr{A}=(A^T\otimes A^T-I_{n^2})$，立即可得到下面的引理。

引理1. 令矩阵 A 的特征值为 λ_i，$i\in \underline{n}$，(1) 则矩阵 $\mathscr{A}$ 的特征值为 $\lambda_i\lambda_j-1$，$i,j\in\underline{n}$；(2) 如果 A 为稳定阵，则 $\mathscr{A}$ 可逆。

证。令矩阵 A 的 Jordan 标准型为 J。因此存在非异阵 S 使得 $S^{-1}AS=J$。Kronecker 乘积的性质表明有

$$[S^T\otimes S^T][A^T\otimes A^T][(S^{-1})^T\otimes(S^{-1})^T]=J^T\otimes J^T$$

易知，$\lambda_i\lambda_j-1$ 就是矩阵 $\mathscr{A}$ 的特征值。因 $|\lambda_i|<1$ 当且仅当系统 (1.1) 渐近稳定，所以 $\lambda_i\lambda_j-1\neq 0$，即矩阵 $\mathscr{A}$ 可逆。

我们引入两种在往后的讨论中将要用到的矩阵范数。

(1) 矩阵 $G\in R^{n\times n}$ 的算子 2-范数 (记为 $\|G\|_2$)，按定义有

$$\|G\|_2=\sup_{x\neq 0}\frac{\|Gx\|_2}{\|x\|_2}，\quad 其中\ x\in R^n，\ \|x\|_2=(x^Tx)^{\frac{1}{2}}$$

(2) 矩阵 $G\in R^{n\times n}$ 的 Frobenivs 范数 (记为 $\|G\|_F$)，按定义有

$$\|G\|_F^2=\text{trace }G^TG=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n g_{ij}^2,\quad 其中G=(g_{ij})$$

利用 $\|A\otimes B\|_2^2=\|A^TA\otimes B^TB\|_2=\|A\|_2^2\|B\|_2^2$，则有

引理2. 下列范数不等式为真：

(1) $\|\mathscr{A}\|_\infty\leqslant\|A^T\|_\infty^2+1$ (1.8)

(2) $\|\mathscr{A}\|_2\leqslant\|A^T\|_2^2+1$ (1.9)

(3) 当 A 为正规阵时，$\|\mathscr{A}^{-1}\|_2=|\min(\lambda_i\lambda_j-1)|^{-1}$ (1.10)

证 (1) $\|\mathscr{A}\|_\infty\leqslant\left(\max\limits_{i,j}\sum\limits_{l=1}^n\sum\limits_{k=1}^n|a_{il}|\cdot|a_{jk}|\right)+1\leqslant\|A^T\|_\infty^2+1$；(2) 令 $A, X, B\in R^{n\times n}$，

则

$$\|AXB\|_F=\|[A\otimes B^T]x\|_2\leqslant\|A\otimes B^T\|_2\cdot\|x\|_2$$

因此由 $\|A\otimes B^T\|_2=\|A\|_2\cdot\|B\|_2$

即有 $$\|\mathscr{A}\|_2=\|A^T\otimes A^T-I_{n^2}\|_2\leqslant\|A^T\|_2^2+1$$

(3) 当 A 为正规阵时，易证 $\mathscr{A}$ 也正规，则

$$\|\mathscr{A}^{-1}\|_2=\max_{i,j}|\lambda_i\lambda_j-1|^{-1}=(\min_{i,j}|(\lambda_i\lambda_j-1)|)^{-1}$$

因矩阵 Q，P 均正定，它们组成正则矩阵束 $\langle Q, P\rangle_{n\times n}$。记 π_1，π_2，$\cdots\pi_n$ 为正则矩阵束 $\langle Q, P\rangle_{n\times n}$ 按下述降序排的特征值：

$$\pi_1=\sup_{x\neq0}\frac{x^TQx}{x^TPx}\geqslant\pi_2\geqslant\cdots\geqslant\inf_{x\neq0}\frac{x^TQx}{x^TPx}=\pi_n>0 \tag{1.11}$$

即有下面的定理。

定理1. 设 λ 为矩阵 A 的任一特征值，则成立有下面的不等式：

$$1-\pi_n\geqslant|\lambda|^2\geqslant1-\pi_1 \tag{1.12}$$

其中 π_1 与 π_n 为正则矩阵束 $\langle Q, P\rangle_{n\times n}$ 的最大与最小特征值。

证 令 x 为相应于特征值 λ 的矩阵 A 的特征向量，即 $Ax=\lambda x$。

则有 $$x^TA^TPAx-x^TPx=-x^TQx$$

或 $$[|\lambda|^2-1]=-\frac{x^TQx}{x^TPx}$$

或 $$\pi_n\leqslant1-|\lambda|^2\leqslant\pi_1$$

即 $$1-\pi_n\geqslant|\lambda|^2\geqslant1-\pi_1$$

推论1. 正则矩阵束 $\langle Q, P\rangle_{n\times n}$ 的所有特征值满足不等式：$1\geqslant\pi_i>0$，$i\in\underline{n}$。

证 从不等式 (1.12) 看来此结果显然。

现在转而讨论摄动的离散型线性系统。有下面的主要定理。

定理2. 令系统 (1.1) 渐近稳定。如果实摄动矩阵 H 满足范数不等式

$$\|H\|_2<[\|A\|_2^2+(\|P\|_2\|Q^{-1}\|_2)^{-1}]^{\frac{1}{2}}-\|A\|_2 \tag{1.13}$$

则摄动的系统

$$x(k+1)=(A+H)x(k) \tag{1.3}$$

仍为渐近稳定。(注意：$\|Q^{-1}\|_2^{-1}$ 项等于矩阵 Q 的最小特征值。)

证　因 A, P, Q 满足 (1.2)，则 A, H, P, Q 将满足方程

$$(A+H)^T P(A+H)-P=-Q+H^T PH+H^T PA+A^T PH \tag{1.14}$$

令 μ_0 为 Q 的最小特征值，λ^* 为矩阵 $W=(H^T PH+H^T PA+A^T PH)$ 的最大特征值模。如果 $\mu_0>\lambda^*$，或当 H 满足条件

$$\|H\|_2^2\|P\|_2+2\|H\|_2\|P\|_2\|A\|_2<\|Q^{-1}\|_2^{-1}$$

或

$$\|H\|_2<[\|A\|_2^2+(\|P\|_2\cdot\|Q^{-1}\|_2)^{-1}]^{\frac{1}{2}}-\|A\|_2$$

则对任何 $x\in R^n$ 均有

$$x^T Qx\geqslant\mu_0 x^T x>\lambda^* x^T x\geqslant x^T Wx$$

由此立即得到系统 (1.3) 渐近稳定的结论。

从应用角度看，重要的是估计方程 (1.2) 的解与系统矩阵 A 的摄动界之间的关系。先将 (1.1) 的摄动方程形式地写为

$$(A+H)^T\bar{P}(A+H)-\bar{P}=-Q \tag{1.15}$$

其中 $\bar{P}=P+P_1$，或 P_1 形式上满足下面的方程

$$(A+H)^T P_1(A+H)-P_1=-H^T PH-H^T PA-A^T PH \tag{1.16}$$

我们感兴趣的是方程 (1.16) 之解 P_1 的存在性，希望知道当 H 的摄动界给定时 P_1 将偏移多远？下面的定理回答了这些问题。

定理3.　如果 (1.16) 中的 H 足够小，则非线性矩阵方程 (1.16) 将 P_1 确定为 H 的单值连续函数：$P_1=T(H)$，且存在极限：

$$\lim_{\|H\|_F\to 0}\|P_1\|_F=0 \tag{1.17}$$

证　方程 (1.16) 等价于方程

$$\sigma[(A+H)^T P_1(A+H)-P_1]=\sigma[-H^T PH-H^T PA-A^T PH]$$

或

$$[(A+H)^T\otimes(A+H)^T-I_{n^2}]p_1=-[H^T P\otimes I_n+A^T P\otimes I_n]h-[I_n\otimes A^T P]h'$$

其中 $p_1=\sigma(P_1)$，$h=\sigma(H)$，$h'=\sigma(H^T)$，$h'=Gh$，$\mathrm{Det}\ G\neq 0$。易证有

(1) $f(p_1,h)=[(A+H)^T\otimes(A+H)^T-I_{n^2}]p_1+\{[H^T P\otimes I_n+A^T P\otimes I_n]+[I_n\otimes A^T P]\cdot G\}h$ 在 (p_1, h) 空间的坐标原点领域内有定义且对其变元可微；

(2) $f(0, 0)=0$；

(3) $\mathrm{Det}\left(\dfrac{\partial f}{\partial p_1}\right)_{h=p_1=0}=\mathrm{Det}\,[A^T\otimes A^T-I_{n^2}]\neq 0$；

则必存在正数 δ，当 $\|H\|_F<\delta$, $\|P_1\|_F<\delta$ 时方程 (1.16) 确定 $P_1=T(H)$，且 P_1 为H的单值连续函数，即有

$$\lim_{\|H\|_F\to 0}\|P_1\|_F=0$$

定理4.　如果实摄动阵 H 满足 (1.13)，则 P_1 与 H 满足范数估计式

$$\|P_1\|_F\leqslant\frac{\|\mathcal{A}^{-1}\|_2\cdot\|H\|_2\cdot\|P\|_F(\|H\|_2+2\|A\|_2)}{1-\|\mathcal{A}^{-1}\|_2\cdot\|H\|_2(\|H\|_2+2\|A\|_2)} \tag{1.18}$$

其中 $\mathcal{A}=A^T\otimes A^T-I_{n^2}$。

证　将方程 (1.16) 改写为

$$A^T P_1 A-P_1=-H^T PH-H^T PA-A^T PH-H^T P_1 A-A^T P_1 H-H^T P_1 H$$

或 $[A^T\otimes A^T-I_{n^2}]p_1=-[H^T\otimes H^T+H^T\otimes A^T+A^T\otimes H^T]p$
$$-[H^T\otimes A^T+A^T\otimes H^T+H^T\otimes H^T]p_1$$

令 $\mathscr{A}=[A^T\otimes A^T-I_{n^2}]$，$\mathscr{A}$ 非奇异，

则有 $p_1=-\mathscr{A}^{-1}\{[H^T\otimes H^T+H^T\otimes A^T+A^T\otimes H^T]p+[H^T\otimes A^T+A^T\otimes H^T+H^T\otimes H^T]p_1\}$

或 $\|p_1\|_2\leqslant\|\mathscr{A}^{-1}\|_2\{[\|H\|_2^2+2\|H\|_2\cdot\|A\|_2]\cdot\|p\|_2+[2\|H\|_2\cdot\|A\|_2+\|H\|_2^2]\cdot\|p_1\|_2\}$

令 $\eta=\|H\|_2[2\|A\|_2+\|H\|_2]\cdot\|\mathscr{A}^{-1}\|_2$

则 $\|P_1\|_F\leqslant\dfrac{\eta\|P\|_F}{1-\eta}$

此即不等式 (1.18)。

现在考虑矩阵 Q 的摄动。记矩阵 Q 的摄动为 Q_1，则有下面的定理。

定理5. 如果矩阵 Q 变为 $\overline{Q}=Q+Q_1$，仍正定，则摄动 Q_1 与方程 (1.2) 之解的摄动 P_1 满足下面的不等式：

(1) $\|p_1\|_\infty\leqslant\|\mathscr{A}^{-1}\|_\infty\cdot\|q_1\|_\infty$

或 $\|P_1\|_F\leqslant\|\mathscr{A}^{-1}\|_2\cdot\|Q_1\|_F$

其中 $p_1=\sigma(P_1)$，$q_1=\sigma(Q_1)$

证 因 $\overline{Q}=Q+Q_1$ 正定，则 P_1 与 Q_1 满足方程
$$A^T(P+P_1)A-(P+P_1)=-Q-Q_1$$

或 $A^TP_1A-P_1=-Q_1$

或 $[A^T\otimes A^T-I_{n^2}]p_1=-q_1$

或 $p_1=-\mathscr{A}^{-1}\cdot q_1$

由此立即得到定理结果。

二、波波夫超稳定性

假定离散型线性定常系统的数学描述为
$$\left.\begin{aligned}x(k+1)&=Ax(k)+Bu(k)\\y(k)&=Cx(k)+Du(k)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

其中 $x\in R^n$，u，$y\in R^m$，A，B，C，D 为适当行列数的矩阵。从波波夫超稳定性出发，已知离散型线性系统 (2.1) 的（渐近）超稳定性等价于（严格）正实性。假定离散型线性系统 (2.1) 渐近超稳定，即系统 (2.1) 的传递函数阵
$$H(z)=D+C(zI-A)^{-1}B$$
为严格正实，换言之，$H(z)$ 满足下述条件：

(1) $H(z)$ 的所有元素在单位圆 $|z|=1$ 上及圆外解析。

(2) 对所有位于单位圆 $|z|=1$ 上的 z，矩阵 $H(z)+H^T(\bar{z})$ 为正定厄密特阵。

因 $H(z)$ 严格正实，据 Kalman-Szegö-Popov 引理知，存在正定阵 P，正定阵 Q 及矩阵 K 与 L，使得
$$A^TPA-P=-LL^T-Q$$
$$B^TPA+K^TL^T=C$$
$$K^TK=D+D^T-B^TPB$$

上述条件(1.2)意味着矩阵

$$
\begin{aligned}
H(z)+H^T(\bar z) &= D+C(zI-A)^{-1}B+D^T+B^T(\bar zI-A^T)^{-1}C^T \\
&= D+D^T+B^T[(\bar zI-A^T)^{-1}A^TP+PA(zI-A)^{-1}]B \\
&\quad +B^T(\bar zI-A^T)^{-1}LK+K^TL^T(zI-A)^{-1}B \\
&= K^TK+B^TPB+B^T(\bar zI-A^T)^{-1}[A^TP(zI-A) \\
&\quad +(\bar zI-A^T)PA]\cdot(zI-A)^{-1}B+B^T(\bar zI-A^T)^{-1}LK \\
&\quad +K^TL^T(zI-A)^{-1}B \\
&= K^TK+B^T(\bar zI-A^T)^{-1}LK+K^TL^T(zI-A)^{-1}B \\
&\quad +B^T(\bar zI-A^T)^{-1}LL^T(zI-A)^{-1}B+B^T(\bar zI-A^T)^{-1}\cdot[LL^T \\
&\quad +(zA^T-I)P+P(\bar zA-I)](zI-A)^{-1}B+B^TPB \\
&= [K^T+B^T(\bar zI-A^T)^{-1}L]\cdot[K+L^T(zI-A)^{-1}B] \\
&\quad +B^T(\bar zI-A^T)^{-1}\cdot[LL^T-\Gamma(z)](zI-A)^{-1}B+B^TPB
\end{aligned}
$$

对所有单位圆 $|z|=1$ 上的 z 为正定阵，其中矩阵 $\Gamma(z)=-[(zA^T-I)P+P(\bar zA-I)]$ 为正定厄密特阵，这是因为 $|z|=1$ 及 (zA^T-I) 为稳定阵。

现在考虑系统矩阵 A 受到小扰动的情况。令 H 表小扰动阵。依定理 2，如果 H 满足不等式(1.13)，则摄动的矩阵 $(A+H)$ 仍稳定（即 $(A+H)$ 的特征值都在单位圆 $|z|=1$ 内）。假定范数不等式(1.13)在下面的讨论中恒成立。记摄动的离散型线性定常系统为

$$
\left.\begin{aligned}
x(k+1)&=(A+H)x(k)+Bu(k)\\
y(k)&=Cx(k)+Du(k)
\end{aligned}\right\}\tag{2.2}
$$

令系统(2.2)的传递函数阵为 $G(z)=D+C[zI-(A+H)]^{-1}B$。

令 $$[zI-(A+H)]^{-1}=[zI-A]^{-1}+T(H)$$

及 $$[\bar zI-(A+H)^T]^{-1}=[\bar zI-A^T]^{-1}+T'(H)$$

或
$$
\begin{aligned}
T(H)&=[zI-(A+H)]^{-1}-[zI-A]^{-1}\\
&=(zI-A)^{-1}\{[I-H(zI-A)^{-1}]^{-1}-I\}
\end{aligned}
$$

及
$$
\begin{aligned}
T'(H)&=[\bar zI-(A+H)^T]^{-1}-[\bar zI-A^T]^{-1}\\
&=(\bar zI-A^T)^{-1}\{[I-H^T(\bar zI-A^T)]^{-1}-I\}
\end{aligned}
$$

则
$$
\begin{aligned}
G(z)+G^T(\bar z)&=D+C[zI-(A+H)]^{-1}B+D^T+B^T[\bar zI-(A+H)^T]^{-1}C^T\\
&=D+D^T+C[zI-A]^{-1}B+B^T[\bar zI-A^T]^{-1}C^T+CT(H)B+B^TT'(H)C^T\\
&=H(z)+H^T(\bar z)+CT(H)B+B^TT'(H)C^T
\end{aligned}
$$

其中 $H(z)$ 为原系统(2.1)的传递函数阵。令 $\mu(z)$ 为正定厄密特阵 $H(z)+H^T(\bar z)$ 的最小特征值，其中的复数 z 位于单位圆 $|z|=1$ 上，则 $G(z)+G^T(\bar z)$ 对所有满足条件 $|z|=1$ 的 z 为正定厄密特阵，仅需 H 满足：

$$\|C\|_2\cdot\|B\|_2[\|T(H)\|_2+\|T'(H)\|_2]<\mu(z)$$

或
$$\|T(H)\|_2+\|T'(H)\|_2<\frac{\mu(z)}{\|C\|_2\cdot\|B\|_2}\tag{2.3}$$

但因
$$
\begin{aligned}
\|T(H)\|_2&=\|(zI-A)^{-1}\{[I-H(zI-A)^{-1}]^{-1}-I\}\|_2\\
&\leqslant\|(zI-A)^{-1}\|_2\cdot\|[I-H(zI-A^{-1})^{-1}]^{-1}-I\|_2\\
\|T'(H)\|_2&=\|(\bar zI-A^T)^{-1}\{[I-H^T(\bar zI-A^T)]^{-1}-I\}\|_2\\
&\leqslant\|(\bar zI-A^T)^{-1}\|_2\cdot\|[I-H^T(\bar zI-A^T)]^{-1}-I\|_2
\end{aligned}
$$

如果 $\|H\|_2$ 足够小，使得 $\|H(zI-A)^{-1}\|_2<1$，其中 z 满足 $|z|=1$，则

$$\|[I-H(zI-A)^{-1}]^{-1}-I\|_2<\frac{\|H\|_2\cdot\|(zI-A)^{-1}\|_2}{1-\|H\|_2\cdot\|(zI-A)^{-1}\|_2}$$

及

$$\|[I-H^T(\bar{z}I-A^T)]^{-1}-I\|_2<\frac{\|H^T\|_2\cdot\|(\bar{z}I-A^T)^{-1}\|_2}{1-\|H^T\|_2\cdot\|(\bar{z}I-A)^{-1}\|_2}$$

易证有

$$\|H\|_2=\|H^T\|_2,\qquad \|(\bar{z}I-A^T)^{-1}\|_2=\|(zI-A)^{-1}\|_2$$

不等式 (2.3) 成立的充分条件是：

$$\|[I-H(zI-A)^{-1}]^{-1}-I\|_2+\|[I-H^T(\bar{z}I-A^T)^{-1}]^{-1}-I\|_2$$

$$<\frac{2\|H\|_2\cdot\|(zI-A)^{-1}\|_2}{1-\|H\|_2\cdot\|(zI-A)^{-1}\|_2}<\frac{\mu(z)}{\|C\|_2\cdot\|B\|_2}\|(zI-A)^{-1}\|_2^{-1}\tag{2.4}$$

而这只须使H满足下面的条件：

$$\|H\|_2<\frac{\mu(z)}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2\cdot\|(zI-A)^{-1}\|_2}\left[\|(zI-A)^{-1}\|_2+\frac{\mu(z)}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2}\right]^{-1}\tag{2.5}$$

因 (2.5) 的右端依赖于变量 $z=e^{j\omega}$，但H是常阵，故代替 (2.5)，可要求

$$\|H\|_2<\inf_{|z|=1}\left\{\frac{\mu(z)}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2\cdot\|(zI-A)^{-1}\|_2}\left[\|(zI-A)^{-1}\|_2+\frac{\mu(z)}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2}\right]^{-1}\right\}\tag{2.6}$$

但实际计算 (2.6) 的右端是麻烦的，故可作一小修改，代之以 (2.4)，可要求

$$\frac{2\|H\|_2\sup\limits_{|z|=1}\|(zI-A)^{-1}\|_2}{1-\|H\|_2\cdot\sup\limits_{|z|=1}\|(zI-A)^{-1}\|_2}<\frac{\inf\limits_{|z|=1}\mu(z)}{\|C\|_2\cdot\|B\|_2}\cdot\inf_{|z|=1}\|(zI-A)^{-1}\|_2^{-1}\tag{2.7}$$

令

$$\sup_{|z|=1}\|(zI-A)^{-1}\|_2=\alpha>0$$

$$\inf_{|z|=1}\mu(z)=\mu_0>0$$

单位圆 $|z|=1$ 为闭集，所以α与μ_0都存在且为正，故 (2.7) 将成立当H满足范数不等式

$$\|H\|_2<\frac{\mu_0}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2\cdot\alpha}\left[\alpha+\frac{\mu_0}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2}\right]^{-1}\tag{2.8}$$

令

$$h=\min\left\{[\|A\|_2^2+(\|P\|_2\cdot\|Q^{-1}\|_2^{-1}]^{\frac{1}{2}}-\|A\|_2,\ \frac{\mu_0}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2\cdot\alpha}\left[\alpha+\frac{\mu_0}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2}\right]^{-1}\right\}\tag{2.9}$$

如果摄动阵H满足范数不等式

$$\|H\|_2<h\tag{2.10}$$

则 $G(z)$ 在 $|z|\geqslant 1$ 解析且 $G(z)+G^T(\bar{z})$ 为正定厄密特阵。这样我们就得到了下面的主要定理。

定理6. 假定离散型线性定常系统 (2.1) 渐近超稳定。如果系统摄动阵 H 满足范数不等式

$$\|H\|_2<\min\left\{[\|A\|_2^2-(\|P\|_2\cdot\|Q^{-1}\|_2)^{-1}]^{\frac{1}{2}}-\|A\|_2,\ \frac{\mu_0}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2\cdot\alpha}\left[\alpha+\frac{\mu_0}{2\|C\|_2\cdot\|B\|_2}\right]^{-1}\right\}\tag{2.11}$$

其中$\mu_0=\inf\limits_{\substack{|z|=1\\ i\in \underline{n}}}\mu_i(z)$，$\mu_i(z)$为正定厄密特阵$H(z)+H^T(\bar{z})$的特征值，

$$\alpha=\sup_{|z|=1}\|(zI-A)^{-1}\|_2$$

则摄动的离散型线性系统(2.2)仍将渐近超稳定。

评论1. 如果A为正则阵，即$A^TA=A\cdot A^T$，则α的计算可大为简化。因原系统矩阵A是李亚普诺夫意义渐近稳定的，即A的所有特征值都位于单位圆$|z|=1$内。

令 $$\rho(A)=\max_{i\in \underline{n}}\{|\lambda_i|\}<1,\ \text{及}\ \mathrm{d}=1-\rho(A)>0$$

如果λ为A的一个特征值，必存在一非零向量x，使$Ax=\lambda x$，因此有$(zI-A)x=(z-\lambda)x$，即$(z-\lambda)$为矩阵$(zI-A)$的特征值。

$$\inf_{\substack{|z|=1\\ i\in \underline{n}}}(z-\lambda_i)=1-\rho(A)=d$$

$$\sup_{|z|=1}\rho[(zI-A)^{-1}]=\frac{1}{\inf\limits_{|z|=1}\rho[(zI-A)]}$$

$$=\frac{1}{\inf\limits_{|z|=1}\max\limits_{i\in \underline{n}}|z-\lambda_i|}=\frac{1}{d}$$

$$\alpha=\sup_{|z|=1}\|(zI-A)^{-1}\|_2=\sup_{|z|=1}\rho[(zI-A)^{-1}]=\frac{1}{d}$$

故可在不等式(2.11)的右端用$1/d$取代α。

评论2. 就模型参考自适应控制而论，通常总假定参考模型是固定的，它的参数是给定且不变的。如果只能得到系统的输出，为了综合稳定的适应律必须假定参考模型是严格正实的，也就是说参考模型的参数不考虑有扰动。但在大多数实际作业中参考模型可能是一个模拟装置或其它一种动态控制系统。所以无论是实际系统也好，参考模型也好，都可能发生参数摄动。因此有必要弄清楚，参考模型的参数摄动允许有多大范围，使在该范围内模型参考自适应控制方法仍能工作并产生需要的稳定适应律。这就是本文考虑的基本出发点，我们得到的结果已经清楚地回答了上述问题。

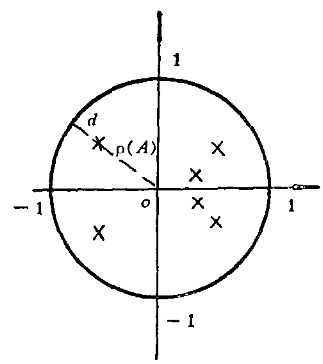

图 1

参 考 文 献

[1] 黄琳，《系统与控制理论中的线性代数》，即将出版，科学出版社，北京.

[2] Narendra, K. S., *Adaptive Control-MRAC*, Lecture Notes in Nanjing Institute of Technology, Sept. (1981).

[3] Narendra, K. S. and L. S., Valavani, A comparison of Lyapunov and hyperstability approaches of adaptive control of continuous systems, *IEEE Trans.* on AC-25 (1980).

[4] Anderson, B. D. Q., A simplified viewpoint of hyperstability, *IEEE Trans.* on AC-13 (1968).

[5] Kalman, R. E., Lyapunov function for the problem of Luré in automatic control, Proc. of the NAS of the U. S. A. (1963).

[6] Landau, Y. D., Adaptive Control, Model Reference Approach.

[7] 黄琳，郑应平，李亚普诺夫第二方法与多变量线性系统，《控制理论会议文集》，厦门，科学出版社，北京，(1979).

[8] Zhu Wei-ling (朱伟灵) and Hwang Ling (黄琳), Some problems concerning the hyperstability theory in the design of adaptive control, Proceedings of Biennial Meeting on Control Systems, Shanghai, (1981).

Some Problems Associated with the Disturbed Matrix Lyapunov Equation for Linear Time-Invarint Discrete Systems

Hwang Ling Zhu Wei-ling

(*Mechanics Department, Beijing University, Beijing*)

Abstract

Both the Lyapunov stability and Popov's hyperstability of discrete linear time-invariant system in case of system parameter disturbance are discussed in this paper. The allowable disturbance ranges are given so that the maintainance of the Lyapunov stability and the Popov's hyperstability of a discrete linear system is guaranteed. The results find their significance in the MRAC.