应用数学和力学，第4卷第1期（1983年1月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

对“关于非均质变截面弹性直杆的纵向自主振动”一文的讨论

白珍娥（中国空间技术研究院卫星总体部）

文[1]论述了非均质变截面弹性直杆的自由振动问题。文中参数考虑较多，能用于各种不同的情况。文中解微分方程的方法尚可改进，特提出来以供讨论。

文[1]最后归结为解下面的微分方程（如下引用符号除有说明外，其余均与文[1]中的符号相同）：

$$\frac{d^2U}{d\zeta^2}+\frac{\alpha+\beta}{\alpha+\beta-\lambda}\frac{dU}{d\zeta}+\frac{K}{k_0(\alpha+\beta-\lambda)^2}e^{-\zeta}U=0 \tag{1}$$

其推导过程较繁锁，解的表达式冗长，不易直接进行数值计算。

如将$z=-\zeta$代入(1)式则可得

$$\frac{d^2U}{dz^2}-k_1\frac{dU}{dz}+k_2e^zU=0 \tag{2}$$

根据文献[2]第2.37a条，当k_1不为整数时方程的通解为

$$U(\zeta)=e^{-\frac{k_1\zeta}{2}}[c_1J_{k_1}(y)+c_2J_{-k_1}(y)] \tag{3}$$

这里

$$y=2\sqrt{k_2}\ e^{\frac{z}{2}}=2\sqrt{k_2}\ e^{-\frac{\zeta}{2}} \tag{4}$$

$J_{k_1}(y)$是第一类贝塞耳函数，它是贝塞耳方程的线性解．当k_1为整数时，$J_{-k_1}(y)=(-1)^{k_1}\cdot J_{k_1}(y)$，此时$J_{-k_1}(y)$已不是贝塞耳方程的独立解，$J_{-k_1}(y)$就得用第二类贝塞耳函数$N_{k_1}(y)$来代替，因此方程(1)的通解为

$$U(\zeta)=e^{-\frac{k_1\zeta}{2}}[c_1J_{k_1}(y)+c_2N_{k_1}(y)] \tag{5}$$

当k_1为整数或等于整数加减二分之一，三分之一时，第一、二类贝塞耳函数值已有表可查，具体查法见文献[3]。当y值很大时，贝塞耳函数可近似用初等函数来表达，即

$$J_{k_1}(y)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi y}}\left[\cos\left(y-\frac{\pi}{2}k_1-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$N_{k_1}(y)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi y}}\left[\sin\left(y-\frac{\pi}{2}k_1-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

从上可见，此法求解方程(1)不需要繁长的推导过程，不易搞错。其解的表达式简单明了，尤其当k_1为一些特殊值时，利用查表就可算得其值。当y值相当大时只要求初等函数就可将值计算出来。

参 考 文 献

[1] 刘先志，关于非均质变截面弹性直杆的纵向自主振动，应用数学和力学，1，2(1980)237.

[2] E. 卡姆克，《常微分方程手册》，科学出版社(1977).

[3] Fletchen, A., J. C. P. Miller. L. Rosenhead and L. J. Comrie, An index of mathematical tables, second edition, 1 (1962).

刘先志（山东工学院）

回忆，当初此文完成之际，曾觉与本人的意愿尚未完全浃洽，盖解答仍嫌冗长繁琐，应用困难。当时也曾猜想通过改换变量来简化微分方程后或能利用适当类型的Bessel函数，以求得比较简短的解式。其间由于尚有其他工作，未能着手探索。今有同业白珍娥同志先行一步，果然能用Bessel函数求解。就此我于遥贺其成功之外，甚表欢迎此项报闻。白珍娥同志的结果对求解技术很有助益，从而通过白同志的机敏，我的愿望也已满足了。

Discussion on "Longitudinal Free Vibration of Inhomogeneous Elastic Straight Strut with a Variable Cross Section"

Bai Zhen-e

(Department of Satellite Body, Space Technology Institute, Beijing)

Liu Hsien-chih

(Shandong Institute of Technology, Jinan)