

柱形弹体撞击塑性变形的G. I. 泰勒理论 的分析解及其改进

钱伟长

(清华大学, 1982年3月12日收到)

摘 要

柱形弹体对刚性靶体的纵向撞击塑性变形理论是 G. I. 泰勒^[1]首先提出的. 这个理论的重要性在于通过这个理论可以从实验数据计算动力屈服强度, 而且从实验结果^[2]中看到, 动力屈服强度和撞击速度无关, 动力屈服强度高于静力屈服强度, 对某些材料而言, 可以超出好几倍. 这样就为弹塑性撞击研究提供了一个重要的根据. 但是, 泰勒理论由于微分方程的复杂性, 求解过程都是数值计算, 这样对使用其结果时深感不便. 本文提供了全部分析解, 并对其结果进行了讨论.

本文对冲量计算进行了修正, 修正理论的分析解指出, 其结果比泰勒理论的解更加符合实验^[2].

一、G. I. 泰勒理论

弹体变形和靶体变形之间, 密切相关, 显然不能单独考虑; 但是, 在一定条件下, 人们还是可以略去靶体的变形, 从弹体的变形估计弹体材料的动力屈服强度. 最早又是最简单的是 G. I. 泰勒在 1948 年^[1]研究的平头柱形弹体对半无限靶元的纵向垂直撞击. 泰勒假定弹体材料是理想弹塑性的, 而靶体则是完全刚性的, 撞击只引起弹体变形. 此后李和托保 (1954)^[3]研究了刚硬化塑性的弹体, 而靶体仍是完全刚性的问题. 到 1967 年, 赖夫脱伯洛斯和台维兹^[4]研究弹性和向下凹曲的应力应变律的塑性的弹体和完全刚性的靶体的撞击问题. 在所有这些工作中, 仍以泰勒的工作最根本和最有历史重要性, 本文将详细地讨论泰勒的理论, 并提供泰勒理论的分析解.

泰勒理论的基本假定是单轴向的, 不可压缩的, 略去了侧向运动的惯性的. 柱形弹体中凡是撞击波前尚未到达的部份, 是以速度 v_0 作为一个刚性柱体向前运动的.

当柱形弹体的一端 (是平头的) 垂直撞击平整的刚性靶时, 弹体接触端的压应力迅速增长, 立刻就达到弹性极限, 同时就有一个弹性压缩波向弹体尾部的自由端以声速 $c_P = \sqrt{E_P/\rho_P}$ 传播. 这个压缩弹性波的应力强度就等于弹性压缩极限强度 $\sigma_P^0 c$. 就在这个弹性波离开了撞击面以后, 撞击面上的应力继续增长而进入塑性范围. 设材料是理想塑性材料, 则塑性区内的应力也应该是 $\sigma_P^0 c$, 在继续压缩时, 塑性区也向自由端延伸, 其延伸速度即等于弹塑性区交界面向左方传播的速度 u . 这个速度一般比声速 c_P 小得很多, 而且和撞击速度有关.

现在设弹性压缩波业已到达图 1 b 中 $B_1 B_1$ 截面处, 在声波波面的前方, 是无应力区, 它还没有感觉到在接触面上有了撞击, 所以这个区域的材料仍以原速度 v_0 向靶体运动, 在弹性区 $B_1 P$ 中, 弹体各点的运动速度由于压缩而有所减少. 如果称减少的速度为 v_1 , 则 $B_1 P$ 段中

各点的运动速度为

$$v_1 = v_0 - v'_0 \tag{1.1}$$

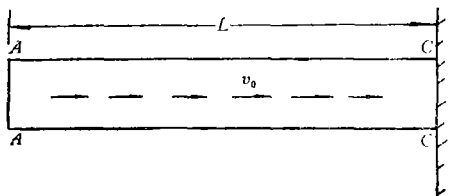
v'_0 可以用 B_1P 段的动量冲量守恒定律求得, 设声波波面从撞击点达到 B_1 点时所需时间为 δt , 则接触面上的撞击应力 σ_{YC}^D (即屈服应力) 在 δt 时间中每单位面积上所给冲量为 $\sigma_{YC}^D \delta t$, 设 $B_1P = \delta x$, 其运动速度的改变部份为 v'_0 , 该段所得动量 (单位断面的) 为 $\rho_P v'_0 \delta x$, 其 ρ_P 为柱体密度, 根据冲量动量守恒定律, 有

$$\sigma_{YC}^D \delta t = \rho_P v'_0 \delta x \tag{1.2}$$

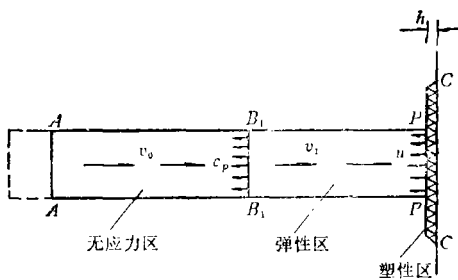
这里必须指出, $\delta x / \delta t = c_P =$ 弹体中的声速. 于是我们得

$$v'_0 = \frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_P c_P} \tag{1.3}$$

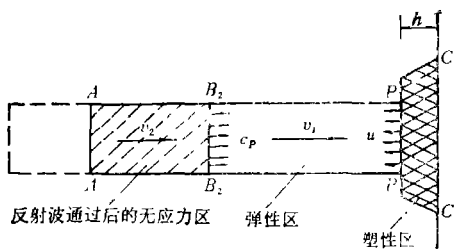
而弹性区 B_1P 段中弹体各点的运动速度 v_1 为



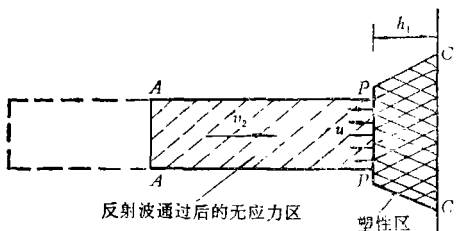
(a) 撞击前 ($t = 0$) 弹体各点运动速度 v_0



(b) 撞击后 ($t \leq L/c_P$). B_1B_1 弹性波: 波速 c_P (向左); PP 弹塑性界面: 传撞速度 u (待定); AB_1 无应力区: 运动速度 v_0 ; B_1P 弹性区: 运动速度 $v_1 = v_0 - \sigma_{YC}^D / \rho_P c_P$; PC 塑性区: 运动速度 = 0



(c) 撞击波反射后 ($\frac{L}{c_P} < t < \frac{2L-h_1}{c_P}$). B_2B_2 反射后弹性波: 波速 c_P (向右); PP 弹塑性界面: 传播速度 u (待定); AB_2 反射波通过后的无应力区: 运动速度 $v_2 = v_0 - 2\sigma_{YC}^D / c_P \rho_P$; B_2P 弹性区: 运动速度 $v_1 = v_0 - \sigma_{YC}^D / c_P \rho_P$; PC 塑性区: 运动速度 = 0



(d) 反射波遇见弹塑性界面, 第二次撞击开始 $t = \frac{2L-h_1}{c_P}$. AP 无应力区 (通过 2 次弹性波): 运动速度 $v_2 = v_0 - \frac{2\sigma_{YC}^D}{\rho_P c_P}$; PC 塑性区: 运动速度 = 0

图 1 柱形弹体撞击刚性靶体后, 弹性波和弹塑性界面的传播 (弹性波第一次往返过程)

$$v_1 = v_0 - \frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_P c_P} \quad (1.4)$$

当时间 $t = \frac{L}{c_P}$ 时, 弹性波到达自由端, 从那里得到反射. 反射波是拉伸波, 弹性拉伸波以相同的声波波速返回来向接触端传送(图 1 c), 这时这个柱形弹体分为三部分. 第一部份中不仅通过第一次弹性压缩波, 而且还通过了反射的拉伸波, 这个区域的材料重又处于无应力状态, 其运动速度通过反射而进一步减少为

$$v_2 = v_1 - \frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_P c_P} = v_0 - \frac{2\sigma_{YC}^D}{\rho_P c_P} \quad (1.5)$$

第二部份是只通过了第一次弹性波的弹性区, 其材料的运动速度仍是 v_1 . 第三部份是不再运动的塑性区. 一直到反射弹性波的波前回到弹塑性交界面(图 1 c) 时, 这一阶段才完全结束. 这时全弹体除了不再有纵向运动的塑性区外, 都是通过了第一次弹性波及其反射波的区域, 其运动速度都是 v_2 . 到这时, 塑性区域业已扩大了些, 柱形弹体的弹性部分比原来弹体长度减短了些, 正以 v_2 的速度进行一次对弹塑性交界面的新的撞击, 当然 v_2 比 v_0 要小. 这种新的撞击产生新的弹性波及其反射波, 弹塑性交界面也渐渐左移. 这样一轮轮的新的撞击中, 撞击速度也逐步降低, 即 v_0, v_2, \dots, v_{2n} , 其中

$$v_{2n} = v_0 - 2n \frac{\sigma_{YC}^D}{\rho_P c_P} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

到一定 n 后, $v_{2n} \cong 0$, 也即是说, 撞击运动停止了. 这时弹体有一部份仍没有发生塑性变形. 其靠近靶体部份是塑性变形部分, 由于材料的不可压缩性, 长度缩短了, 塑性部分的粗细一定要扩大. 我们的问题是: 在各个时间内, 弹塑性交界面的传播速度 u 是什么样的时间函数? 最后的未变形部分有多长? 塑性变形有多大?

这是一个按弹性波往返传播而分一系列逐渐降低强度的撞击过程, 所以是不连续的分阶段进行的运动过程, 其计算当然是很复杂的. 泰勒看到弹性波速度 c_P 比塑性区的扩张速度 u 高得很多. 弹性波往返一次所需时间很短, 在这样一段短时间内, u 的变化很小, 可以略去, v 的变化也很小, 也可以略去. 这样, 我们就可以把这个分段进行的过程, 近似地看作为一种连续过程.(图 2).

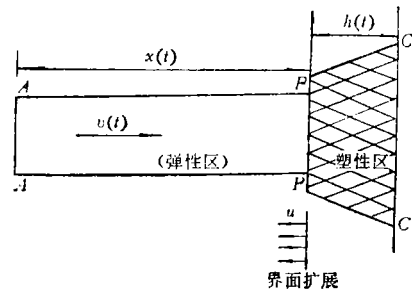


图2 泰勒的撞击运动连续模型

设 h 为弹塑性界面和靶面的距离, 它是时间的函数. 设 x 为尚未压缩成塑性的弹性区长度, 也是时间的函数. u 为弹塑性界面向左传播的速度, 也是时间的函数. v 为无应力区向前运动的速度, 也是时间的函数.

称弹性波在 AP 间往返一次所需时间为 Δt ,

$$\Delta t = \frac{2x}{c_P} \quad (1.7)$$

在这段时间内

$$\Delta h = u \Delta t \quad (1.8)$$

$$\Delta x = -(v + u) \Delta t \quad (1.9)$$

$$\Delta v = -\frac{2\sigma_{yc}^D}{\rho_P c_P} = \text{弹性波往返一次的弹性区减速} \quad (1.10)$$

消去 c_P , (1.7), (1.8), (1.9), (1.10) 可以化为

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = u \quad (1.11a)$$

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = -(u+v) \quad (1.11b)$$

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{2\sigma_{yc}^D}{2x\rho_P} = -\frac{\sigma_{yc}^D}{x\rho_P} \quad (1.11c)$$

如果把 Δt 的时间间隔看得很小, 把往返一次的过程化为连续过程, 在数学上相当于取 $\Delta x \rightarrow 0$ 的极限, 根据导数的定义, 从 (1.11a, b, c), 导得

$$\frac{dh}{dt} = u \quad (1.12a)$$

$$\frac{dx}{dt} = -(u+v) \quad (1.12b)$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\sigma_{yc}^D}{x\rho_P} \quad (1.12c)$$

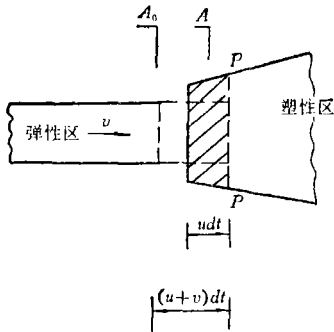


图3 弹塑性界面的扩展和连续方程

(1.12) 式中一共有 $h(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $x(t)$ 等四个待定量, 所以 (1.12) 式中三个关系不足以求解本题, 为了求解本题, 必须补充动力分析关系和变形连续关系. 首先让我们假设材料的不可压缩性. 在 dt 的时间中, 有一段截面为 A_0 , 长度为 $(u+v)dt$ 的弹性区材料压入了塑性区域, 变成了截面为 A , 长度为 $u dt$ 的塑性区域材料, 但体积不变 (图 3).

所以得连续方程

$$A_0(u+v) = Au \quad (1.13)$$

现在让我们考虑在 dt 中的动量冲量的守恒定理. 在 dt 中, 有 $\rho_P A_0(u+v)dt$ 的材料以速度 v 进入塑性区域, 它的动量为 $\rho_P A_0(u+v)v dt$. 这些动量转化为塑性区域中压缩应力 σ_{yc}^D 的合力的增加部分在 dt 中的冲量. 在 PP 截面上原有的压缩应力的合力为 $\sigma_{yc}^D A_0$, 在 dt 以后, PP 截面上的合力为 $\sigma_{yc}^D A$, 所以, 压缩应力的合力的增加部份为 $\sigma_{yc}^D (A - A_0)$, 它在 dt 中的冲量为 $\sigma_{yc}^D (A - A_0) dt$, 这就是 dt 中失掉的动量转化来的, 所以, 我们得动量冲量守恒方程

$$\rho_P A_0(u+v)v = \sigma_{yc}^D (A - A_0) \quad (1.14)$$

把 (1.12a, b, c), (1.13), (1.14) 放在一起, 有五个方程和五个待定量 $u(t)$, $v(t)$, $x(t)$, $h(t)$, $A(t)$. 在一定的起始条件下是可以求解的, 起始条件为

$$\text{当 } t=0 \text{ 时: } v=v_0, x=L, h=0, A=A_1 \quad (1.15)$$

这里的 A_1 是待定的. 其终止条件为

$$\text{当 } t=t_2 \text{ 时: } v=0, x=L_2, u=0, h=h_2, A=A_0 \quad (1.16)$$

其中 t_2 , L_2 , h_2 也都是待定的.

以上都是 G. I. 泰勒的理论^[1]成果, 也是用数值积分法进行积分的. 本文给出它的分

析解。

二、泰勒理论的分析解

从(1.13)式, 我们有

$$u = \frac{A_0}{A - A_0} v \quad (2.1)$$

把(2.1)代入(1.14), 消去 u , 即得 v 和 A 的关系

$$\frac{\rho_p v^2}{\sigma_{yc}^p} = \frac{(A - A_0)^2}{AA_0} = \frac{A}{A_0} + \frac{A_0}{A} - 2 \quad (2.2)$$

引入起始条件, 当 $v = v_0$ 时, $A = A_1$, 于是(2.2)式为

$$\frac{\rho_p v_0^2}{\sigma_{yc}^p} = \frac{A_1}{A_0} + \frac{A_0}{A_1} - 2 \quad (2.3)$$

解出 $\frac{A_1}{A_0}$, 得

$$\frac{A_1}{A_0} = \{\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}\} \quad (2.4)$$

其中

$$\lambda = \frac{\rho_p v_0^2}{2\sigma_{yc}^p} \quad (2.5)$$

这是一个已知的无量纲量。(2.4)式根号前取正号, 这是为了保证 $\frac{A_1}{A_0} > 1$ 。(2.4)式就给出了待定常数 A_1 。

从(1.12b, c)中消去 dt , 得

$$\frac{dx}{dv} = \frac{A}{A - A_0} vx - \frac{\rho_p}{\sigma_{yc}^p} \quad (2.6)$$

再从(2.2)和(2.6)中消去 $\frac{\rho_p v^2}{\sigma_{yc}^p}$, 即得求 x 和 A 的关系的微分方程

$$2 \frac{dx}{x} = -\frac{A}{A - A_0} d\left[\frac{(A - A_0)^2}{A_0 A}\right] = \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{A}\right) dA \quad (2.7)$$

积分得

$$\ln x^2 = -\frac{A}{A_0} + \ln \frac{A}{A_0} + \text{常数 } C_1 \quad (2.8)$$

利用起始条件和终止条件

$$\text{起始: } \quad x = L, \quad A = A_1 \quad (2.9a)$$

$$\text{终止: } \quad x = L_2, \quad A = A_0 \quad (2.9b)$$

我们分别求得

$$\ln L^2 = \frac{A_1}{A_0} + \ln \frac{A_1}{A_0} + C_1 \quad (2.10a)$$

$$\ln L_2^2 = 1 + C_1 \quad (2.10b)$$

消去 C_1 , 得

$$\ln\left(\frac{x}{L}\right)^2 = \frac{A-A_1}{A_0} + \ln\frac{A}{A_1} \quad (2.11a)$$

$$\ln\left(\frac{L_2}{L}\right)^2 = 1 - \frac{A_1}{A_0} - \ln\frac{A_1}{A_0} \quad (2.11b)$$

把(2.4)中 $\frac{A_1}{A_0}$ 的解, 代入(2.11b), 即求得了待定的最终未变形部份的长度 L_2 :

$$\ln\left(\frac{L_2}{L}\right)^2 = 1 - \{\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}\} - \ln[\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}] \quad (2.12)$$

其中 λ 见(2.5), 是已知量. 同样(2.11)也可以写成

$$\ln\left(\frac{x}{L}\right)^2 = \frac{A}{A_0} + \ln\frac{A}{A_0} - \{\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}\} - \ln[\lambda + 1 + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}] \quad (2.13)$$

这是 x/L 和 A/A_0 的关系式.

现在让我们求弹体在变形后的形式. 从(1.12a, b)中消去 dt , 得

$$\frac{dh}{dx} = -\frac{u}{u+v} = -\frac{A_0}{A} \quad (2.14)$$

积分, 得

$$h = -\int_L^x \frac{A_0}{A} dx \quad (2.15)$$

从(2.13)式, 微分给出

$$dx = \frac{1}{2} L \left(1 + \frac{A_0}{A}\right) \sqrt{\frac{A}{A_0}} e^{\frac{A}{2A_0}} e^{-\frac{1}{2}R} d\left(\frac{A}{A_0}\right) \quad (2.16a)$$

$$R = 1 + \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda} + \ln[1 + \lambda + \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda}] \quad (2.16b)$$

把(2.16a)代入(2.15), 得

$$h = \frac{1}{2} L e^{-\frac{1}{2}R} \int_{A_1/A_0}^{A/A_0} (\xi^{-\frac{1}{2}} + \xi^{-\frac{3}{2}}) e^{\frac{1}{2}\xi} d\xi \quad (2.17)$$

引入

$$\Gamma_\alpha(\xi) = \int_1^\xi \xi^{-(1-\alpha)} e^{a\xi} d\xi \quad (2.18)$$

当 $\alpha = \frac{1}{2}$ 时,

$$\Gamma_{\frac{1}{2}}(\xi) = \int_1^\xi \xi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\xi} d\xi \quad (2.18a)$$

(2.17)可以写成

$$h = L e^{-\frac{1}{2}R} \left\{ \Gamma_{\frac{1}{2}}\left(\frac{A_1}{A_0}\right) - \Gamma_{\frac{1}{2}}\left(\frac{A}{A_0}\right) + \left(\frac{A}{A_0}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{A}{A_0}\right)} - \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)} \right\} \quad (2.19)$$

在终止时, $A=A_0$, $h=h_2$, 所以

$$h_2 = L e^{-\frac{1}{2}R} \left\{ \Gamma_{\frac{1}{2}}\left(\frac{A_1}{A_0}\right) + e^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{A_1}{A_0}\right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\left(\frac{A_1}{A_0}\right)} \right\} \quad (2.20)$$

h 和 h_2 相减, 得

$$h = h_2 - L e^{-\frac{1}{2}R} \left\{ \Gamma_{\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{A_0} \right) + e^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{A}{A_0} \right)^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} \left(\frac{A}{A_0} \right) \right\} \quad (2.21)$$

(2.21) 式为柱形弹体在撞击后的形状表达式. 因为 $\frac{A_1}{A_0}$ 是根据 (2.4) 式由 λ 值决定的, 所以塑性区的最大长度 h_2 也是由 λ 决定的, $\Gamma_{\frac{1}{2}}(\xi)$ 可以用数值积分求得, 其值见表 1.

表 1 $\Gamma_{\frac{1}{2}}(\xi) = \int_1^{\xi} \xi^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\xi} d\xi$

ξ	$\Gamma_{\frac{1}{2}}(\xi)$	$\Delta\Gamma_{\frac{1}{2}}$	ξ	$\Gamma_{\frac{1}{2}}(\xi)$	$\Delta\Gamma_{\frac{1}{2}}$	ξ	$\Gamma_{\frac{1}{2}}(\xi)$	$\Delta\Gamma_{\frac{1}{2}}$
1.0	0		2.0	1.74709		4.0	7.06790	
1.1	0.16500	0.16500	2.2	2.14161	0.39452	4.2	7.83538	0.76748
1.2	0.33075	0.16575	2.4	2.55822	0.41661	4.4	8.66913	0.83375
1.3	0.49787	0.16712	2.6	2.99984	0.44162	4.6	9.56391	0.89478
1.4	0.66693	0.16906	2.8	3.46948	0.46964	4.8	10.53138	0.96747
1.5	0.83842	0.17149	3.0	3.97030	0.50082	5.0	11.57870	1.04732
1.6	1.01278	0.17436	3.2	4.50563	0.53533	5.2	12.71336	1.13466
1.7	1.19044	0.17766	3.4	5.07906	0.57343	5.4	13.98777	1.27441
1.8	1.37180	0.18136	3.6	5.69443	0.61537	5.6	15.32219	1.33442
1.9	1.55722	0.18542	3.8	6.35588	0.66145	5.8	16.77085	1.44866
2.0	1.74709	0.18987	4.0	7.06790	0.71202	6.0		

现在让我们求 t 和 A/A_0 的关系, 从 (1.12c) 和 (2.6) 式消去 dv , 得 dt 和 dx 的关系式, 即

$$dt = - \frac{A - A_0}{Av} dx \quad (2.22)$$

把 (2.16a) 和 (2.2) 式中的 dx 和 v 的表达式代入上式, 整理后给出

$$dt = - \frac{1}{2} \left(\frac{\rho_F}{\sigma_F^2 c} \right)^{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{A_0}{A} \right) e^{-\frac{1}{2}R} e^{\frac{1}{2} \left(\frac{A}{A_0} \right)} d \left(\frac{A}{A_0} \right) \quad (2.23)$$

进行积分, 并用 $t=0$ 时 $A=A_1$ 的起始条件, 我们求得 t 和 $\frac{A}{A_0}$ 的关系式

$$t = \frac{1}{\sqrt{2} v_0} \lambda^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}R} \left\{ A \left(\frac{A_1}{A_0} \right) - A \left(\frac{A}{A_0} \right) \right\} \quad (2.24)$$

其中 $A(\xi)$ 如下式

$$A(\xi) = \int_1^{\xi} \left(1 + \frac{1}{\tau} \right) e^{\frac{1}{2}\tau} d\tau \quad (2.25)$$

$A(\xi)$ 的值见表 2.

当 $t=t_2$ 时, 即当变形终止时, $A=A_0$, 而 $A(1)=0$, 所以, 从 (2.24) 式有

$$t_2 = \frac{L}{\sqrt{2} v_0} \lambda^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}R} A \left(\frac{A_1}{A_0} \right) \quad (2.26)$$

最后, 从 (2.1), (2.2) 式, 我们可以用 $\frac{A}{A_0}$ 来表示 u 和 v , 即

$$u = v_0 \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{\frac{A_0}{A}} \quad (2.27a)$$

表 2 $\Lambda(\xi) = \int_1^{\xi} \left(1 + \frac{1}{\tau}\right) e^{\frac{1}{\tau}} d\tau$ 的数值表

ξ	$\Lambda(\xi)$	$\Delta\Lambda$	ξ	$\Lambda(\xi)$	$\Delta\Lambda$	ξ	$\Lambda(\xi)$	$\Delta\Lambda$
1.0	0		2.0	3.58001		4.0	15.98067	
1.1	0.33013	0.33013	2.2	4.42404	0.84403	4.2	17.91391	1.93324
1.2	0.66246	0.33233	2.4	5.33065	0.90661	4.4	20.03098	2.11707
1.3	0.99881	0.33635	2.6	6.30833	0.97768	4.6	22.35108	2.32010
1.4	1.34075	0.34194	2.8	7.36595	1.05762	4.8	24.89536	2.54428
1.5	1.68966	0.34891	3.0	8.51300	1.14705	5.0	27.68708	2.79173
1.6	2.04681	0.35715	3.2	9.75972	1.24672	5.2	30.75193	3.06484
1.7	2.41333	0.36652	3.4	11.11720	1.35748	5.4	34.11815	3.36622
1.8	2.79034	0.37701	3.6	12.59750	1.48030	5.6	37.78360	3.66545
1.9	3.17889	0.38855	3.8	14.21384	1.61634	5.8		
2.0	3.58001	0.40112	4.0	15.98067	1.76685	6.0		

$$v = v_0 \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \sqrt{\frac{A_0}{A}} \left(\frac{A}{A_0} - 1 \right) \tag{2.27b}$$

从上面的结果中，我们已把 u, v, t, h, x 化为 $\frac{A}{A_0}$ 的表达式。它们分别是 (2.27a), (2.27b),

(2.24), (2.21) 和 (2.13), 其中 $\lambda, R, \frac{A_1}{A_0}$ 见

(2.5), (2.16) 和 (2.4), 它们都是已知的。

从上面的计算结果，还可以求得终端条件 t_2, L_2, h_2 ，它们是分别用 (2.26)、(2.11) 和 (2.20) 表示的。上面所给的解，是以 $\frac{A}{A_0}$ 为参数的参数解。我们根据这些结果计算了撞击后的弹体变形和撞击速度的关系，即 $\frac{h_2}{L}, \frac{L_2}{L}$,

$\frac{h_2 + L_2}{L}$ 和 $\lambda = \frac{\rho_p v_0^2}{2\sigma_{yc}}$ 的关系曲线，也计算了

弹体的撞击延续时间和撞击速度的关系。见表 3 和图 4，其中实验点是惠芬⁽²⁾和泰勒⁽¹⁾的工作中取来的。 $\frac{h_2}{L}$ 的曲线和实验点有一定差距，这正说明这个理论很有改进的必要。

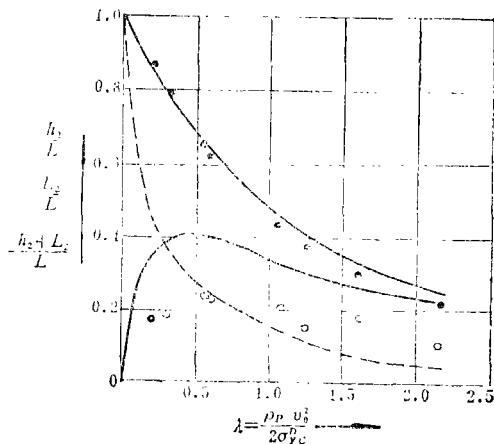


图 4 $\frac{h_2}{L}, \frac{L_2}{L}, \frac{h_2 + L_2}{L}$ 和 λ 的关系曲线

- c $\frac{h_2 + L_2}{L}$ 的实验值⁽¹⁾
- o $\frac{h_2}{L}$ 的实验值⁽¹⁾

表 3 $\frac{h_2}{L}, \frac{L_2}{L}, \frac{h_2 + L_2}{L}, \frac{t_2 v_0}{L}$ 和 $\lambda = \frac{\rho_p v_0^2}{2\sigma_{yc}}$ 的关系

λ	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0
h_2/L	0	0.2830	0.3638	0.3992	0.4012	0.4010	0.3552	0.2965	0.2469
L_2/L	1	0.6060	0.4768	0.3892	0.3250	0.2752	0.1321	0.0586	0.0370
$(h_2 + L_2)/L$	1	0.8950	0.8446	0.7884	0.7264	0.6762	0.4873	0.3651	0.2839
$\frac{t_2 v_0}{L}$	0	0.1559	0.2771	0.3778	0.4621	0.5322	0.8344	0.8934	0.9516

三、泰勒理论的修正

泰勒理论忽视了塑性材料横向运动的惯性作用的影响, 忽视靶体在撞击中的变形的动量和能量消耗, 也忽视弹体塑性强化过程. 这是泰勒理论的 h_2/L 值和实验相差较多的主要原因. 但是, 除了上述因素外, 泰勒理论有一点是显然可以改进的. 即关于 (2.1) 式的问题和它的修正.

PP 截面从 A_0 增加到 A 那样大有一个过程, 这个过程需要的总时间是 δt , 所以, 压缩应力的合力的增加部份在 δt 中的冲量决不可能是 δt 乘 $\sigma_{yc}^0(A-A_0)$, 而是小于这个量. 这个扩展过程的具体情况, 我们不知道, 但我们可以近似地假设接触面积 S 是一个等减速的扩张过程. δt 的一段时间开始时, 面积扩张速度为 w_0 , 结束时为零. 于是在其它时刻 t 时, 扩张速度 $\frac{dS}{dt}$ 为

$$\frac{dS}{dt} = w_0 \left(1 - \frac{t}{\delta t} \right) \quad 0 \leq t \leq \delta t \quad (3.1)$$

积分得

$$S = \int_0^t \frac{dS}{dt} dt = w_0 \left(t - \frac{t^2}{2\delta t} \right) + C' \quad (3.2)$$

w_0, C' 都是待定的. 它们由起始条件 ($t=0, S=A_0$), 和结束条件 ($t=\delta t, S=A$) 求得, 即

$$A_0 = C' \quad (3.3a)$$

$$A = \frac{1}{2} w_0 \delta t + C' \quad (3.3b)$$

解之, 得

$$C' = A_0, \quad w_0 = \frac{2(A-A_0)}{\delta t} \quad (3.4)$$

代入 (3.2), 得 δt 时段中各个时刻 t 时的接触半径

$$S = (A-A_0) \left(2t - \frac{t^2}{\delta t} \right) - \frac{1}{\delta t} + A_0 \quad (3.5)$$

所以, 压缩应力 σ_{yc}^0 的合力增加部份在 δt 中的冲量 I 应该是

$$I = \int_0^{\delta t} \sigma_{yc}^0 (S - A_0) dt = \sigma_{yc}^0 (A - A_0) \int_0^{\delta t} \left(2t - \frac{t^2}{\delta t} \right) \frac{dt}{\delta t} \quad (3.6)$$

积分, 得

$$I = \frac{2}{3} \sigma_{yc}^0 (A - A_0) \delta t \quad (3.7)$$

和泰勒的冲量相比, 这个冲量只有泰勒的冲量的 $\frac{2}{3}$. 于是动量冲量守恒定律 (1.14) 式应该写成

$$\rho_F A_0 (u+v)v = \frac{2}{3} \sigma_{Yc}^p (A - A_0) \quad (3.8)$$

从(1.13)和(3.8)中消去 u , 得

$$\frac{\rho_F v^2}{\sigma_{Yc}^p} = \frac{2}{3} \frac{(A - A_0)^2}{A A_0} \quad (3.9)$$

当 $v=v_0$ 时, $A=A_1$, 我们有

$$\lambda = \frac{1}{3} \left(\frac{A_1}{A_0} + \frac{A_0}{A_1} - 2 \right) \quad (3.10)$$

其中 λ 见(2.5)式, 从(3.10)式解 $\frac{A_1}{A_0}$, 得

$$\frac{A_1}{A_0} = 1 + \frac{3}{2} \lambda + \sqrt{3\lambda + \frac{9}{4} \lambda^2} \quad (3.11)$$

把它和(2.4)式相比, 对相同的 λ 值而言, (3.11)式所算得的 $\frac{A_1}{A_0}$ 值大于从(2.4)式所算得的 $\frac{A_1}{A_0}$ 值.

通过(2.6)到(2.13)相同的步骤, 我们得

$$\ln \frac{x}{L} = \frac{1}{3} \left[\frac{A}{A_0} + \ln \frac{A}{A_0} - \frac{A_1}{A_0} - \ln \frac{A_1}{A_0} \right] \quad (3.12a)$$

$$\ln \frac{L_2}{L} = \frac{1}{3} \left[1 - \frac{A_1}{A_0} - \ln \frac{A_1}{A_0} \right] \quad (3.12b)$$

其中 $\frac{A_1}{A_0}$ 是已知量, (3.12a)是 $\frac{x}{L}$ 和 $\frac{A}{A_0}$ 的关系式.

用(2.14)式到(2.21)式的相同步骤, 我们可以求得

$$h = \frac{1}{3} L e^{-\frac{1}{3} R_1} \left[\Phi \left(\frac{A_1}{A_0} \right) - \Phi \left(\frac{A}{A_0} \right) \right] \quad (3.13)$$

其中

$$R_1 = \frac{A_1}{A_0} + \ln \frac{A_1}{A_0} \quad (3.14)$$

$$\Phi(\xi) = \int_1^\xi \xi^{-\frac{5}{3}} (1+\xi) e^{\frac{1}{3}\xi} d\xi \quad (3.15)$$

当 $A=A_0$ 时, $\Phi(1)=0$, $h=h_2$, 所以有

$$h_2 = \frac{1}{3} L e^{-\frac{1}{3} R_1} \Phi \left(\frac{A_1}{A_0} \right) \quad (3.16)$$

$$h = h_2 - \frac{1}{3} L e^{-\frac{1}{3} R_1} \Phi \left(\frac{A}{A_0} \right) \quad (3.17)$$

$\Phi(\xi)$ 的积分可以用数值积分求得, 其结果见表4.

通过(2.22)到(2.24)式的相同步骤, 我们可以求得 t 和 A/A_0 的关系

$$t = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{3}v_0} L e^{-\frac{1}{3}R_1} \left\{ T\left(\frac{A_1}{A_0}\right) - T\left(\frac{A}{A_0}\right) \right\} \quad (3.18)$$

其中 R_1 见(3.14), $T(\xi)$ 为

$$T(\xi) = \int_1^\xi \xi^{-\frac{7}{6}} (1+\xi) e^{\frac{1}{3}\xi} d\xi \quad (3.19)$$

$T(\xi)$ 的积分可以用数值积分求得, 其结果见表 4.

表 4 $\Phi(\xi)$ 和 $T(\xi)$ 的数值表

ξ	$\Phi(\xi)$	$\Delta\Phi$	$T(\xi)$	ΔT	ξ	$\Phi(\xi)$	$\Delta\Phi$	$T(\xi)$	ΔT
1.0	0		0		4.0	5.722973		8.753650	
		0.268397		0.274966			0.380964		0.771414
1.1	0.268397		0.274966		4.2	6.103937		9.525064	
		0.250047		0.268061			0.390901		0.810612
1.2	0.518444		0.543027		4.4	6.494838		10.335676	
		0.235416		0.263136			0.401973		0.852743
1.3	0.753860		0.806163		4.6	6.896811		11.188419	
		0.223589		0.259734			0.414177		0.897966
1.4	0.977449		1.065897		4.8	7.310988		12.086385	
		0.213930		0.257568			0.427515		0.946380
1.5	1.191379		1.323465		5.0	7.738503		13.032765	
		0.205981		0.256408			0.442395		0.983555
1.6	1.397360		1.579873		5.2	8.180898		14.016320	
		0.199405		0.256111			0.458055		1.053661
1.7	1.596765		1.835984		5.4	8.638953		15.069981	
		0.193946		0.256550			0.468803		1.112907
1.8	1.790711		2.092534		5.6	9.107756		16.182888	
		0.189756		0.257632			0.490278		1.176186
1.9	1.980466		2.350166		5.8	9.598034		17.359074	
		0.185690		0.259284			0.509667		1.243741
2.0	2.166156		2.609450		6.0	10.107700		18.602815	
		0.362725		0.525532			0.532743		1.315836
2.2	2.528881		3.134982		6.2	10.640443		19.918651	
		0.354642		0.537765			0.554861		1.392752
2.4	2.883523		3.672747		6.4	11.195304		21.311403	
		0.349875		0.553146			0.578434		1.474791
2.6	3.233398		4.225893		6.6	11.773738		22.786221	
		0.347752		0.571377			0.603533		1.562278
2.8	3.581150		4.797270		6.8	12.377271		24.348498	
		0.347813		0.592279			0.632632		1.655558
3.0	3.928963		5.389549		7.0	13.009903		26.004056	
		0.349729		0.615749			0.658612		1.755004
3.2	4.278692		6.005298		7.2	13.668515		27.759060	
		0.353270		0.641741			0.688760		1.861012
3.4	4.631962		6.647039		7.4	14.357275		29.620072	
		0.358267		0.670261			0.720773		1.974006
3.6	4.990229		7.317300		7.6	15.078048		31.594077	
		0.361266		0.701329			0.754749		2.094439
3.8	5.351495		8.018629		7.8	15.832797		33.688515	
		0.371478		0.735021			0.790800		2.222794
4.0	5.722973		8.753650		8.0	16.623596		35.911308	

最后, 从(1.13)式和(3.9)式, 我们可以用 $\frac{A}{A_0}$ 来表示 u 和 v , 即

$$v = \frac{1}{\sqrt{3\lambda}} v_0 \sqrt{\frac{A_0}{A}} \left(\frac{A}{A_0} - 1 \right) \tag{3.20a}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{3\lambda}} v_0 \sqrt{\frac{A_0}{A}} \tag{3.20b}$$

从上述结果, 我们已把修正理论的 u, v, t, h, x 化为 $\frac{A}{A_0}$ 的表达式. 它们是(3.20a),

(3.20b), (3.18), (3.17), (3.12a). 其中 $\lambda, R_1, \frac{A_1}{A_0}$ 见(2.5), (3.14), (3.15), 它们

都是已知的. 这也是以 $\frac{A}{A_0}$ 为参数的参数解. 根据(3.16), (3.12b), 和(3.18)式, 我们可

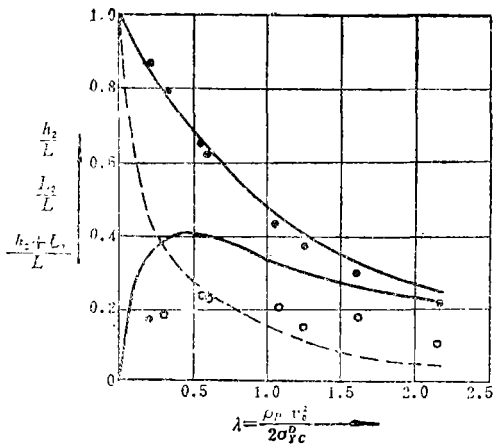


图5 修正理论的 $h_2/L, L_2/L, (h_2+L_2)/L$ 和 λ 的关系曲线

- $\frac{h_2+L_2}{L}$ 的实验值
- $\frac{h_2}{L}$ 的实验值

以计算 $\frac{h_2}{L}, \frac{L_2}{L}, \frac{h_2+L_2}{L}$ 和 $\frac{t_2 v_0}{L}$ 和 λ 的关系, 见表5和图5.

把图4和图5相较, 不论 $(h_2+L_2)/L$ 或 h_2/L 曲线, 都是修正理论更接近于实验值. 但 h_2/L 还是偏高. 这是因为理论中还略去了其它因素所引起的.

从图5中可以看到修正理论的 $(h_2+L_2)/L \sim \lambda$ 关系曲线和实验值吻合很好. 因此, 如果把修正理论的 $(h_2+L_2)/L \sim \lambda$ 关系列出表格, 则从 $(h_2+L_2)/L$ 的实验值就可以用插值法求得

λ 值, 从此, 可以计算 $\sigma_{yc}^D = \frac{\rho F v_0^2}{2\lambda}$ 的实验值.

表5 修正理论中 $\frac{h_2}{L}, \frac{L_2}{L}, \frac{L_2+h_2}{L}, \frac{t_2 v_0}{L}$ 和 λ 的关系

λ	σ	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	1.0	1.5	2.0
h_2/L	0	0.2561	0.3060	0.3265	0.3333	0.3333	0.2920	0.2403	0.1958
L_2/L	1	0.6573	0.5331	0.4469	0.3809	0.3279	0.1676	0.0910	0.0509
$(h_2+L_2)/L$	1	0.9134	0.8391	0.7734	0.7144	0.6609	0.4596	0.3313	0.2467
$t_2 v_0/L$	0	0.1618	0.2912	0.3999	0.4925	0.5720	0.8354	0.9297	1.0264

参 考 文 献

1. Taylor, G. I., The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, I. Theoretical consideration, *Proc. of Royal Society(London)*, Series A, 194, (1948), 289—299.
2. Whiffins, A. C., The use of flat-ended projectiles for determining dynamic yield stress, II. Tests on various metallic materials, *Proc. of Royal Society (London)*, Series A, 194, (1948), 300—322.
3. Lee, E. H. and S. J. Tupper, Analysis of plastic derormation in a stool cylinder striking a rigid target, *J. of Applied Mechanics*, 21, (1954), 62—70.
4. Raftopoulos, D. and N. Davids, Elastoplastic impact on rigid targets, *AIAA J.*, 6, (1967), 2254—2260.

The Analytical Solution of G. I. Taylor's Theory of Plastic Deformation in Impact of Cylindrical Projectiles and Its Improvement

Chien Wei-zang

(*Qinghua University, Beijing*)

Abstract

The theory of plastic deformation in impact of cylindrical projectiles on rigid targets are first introduced by G. I. Taylor⁽¹⁾. The importance of this theory lies on the fact that dynamic yield strength can be determined from the measurement of the plastic deformation of flat-ended cylindrical projectiles. From the experimental results⁽²⁾, we find that the dynamic yield strength is independent of impact velocity, and is higher than the static yield strength in general, and is as high as several times of static yield strength in certain cases. This gives an important foundation for the study of elasto-plastic impact problems in general. However it is well-known that the complexity of differential equations in Taylor's theory compelled us to use the troublesome numerical solution. In this paper, the analytical solution of all the equations in Taylor's theory is given in parametric form and the results are discussed in detail.

In the later part of this paper, the method of calculation of impulse of impact is improved by considering the processes of radial movement of materials. The analytical solution of improved theory shows that it gives better agreement with the experimental results than that of original Taylor's theory.