

# 解 Biot 固结方程的有限元方法

郑家栋 胡慧智

(上海计算技术研究所)

徐鸿江 朱泽民 殷宗泽

(黄委会水利科学研究所) (华东水利学院)

(钱伟长推荐, 1980年12月9日收到)

## 摘 要

饱和土固结的 Biot 理论<sup>[1]</sup>将固结过程作为一个弹性体应力和孔隙流流动的耦合问题, 和 Terzhigi 理论<sup>[2]</sup>相比, 它更能确切地反映固结机理. 本文用经典变分原理导出固结问题一般的 Biot 有限元方程, 具有明确的物理意义. 这一结果已用来分析巴家咀土坝的固结过程, 计算结果和工程实践一致.

## 一、引 言

饱和土固结的 Biot 理论将固结过程处理为一个弹性体应力和孔隙流流动的耦合问题, 它比目前工程界广泛采用的 Terzhigi 理论更能确切地反映固结机理. 因此, 发展基于 Biot 理论的数值方法是有意义的. 目前有一些解 Biot 方程的有限元方法, 例如 R. S. Sandhu 和 E. L. Wilson<sup>[3]</sup>构造了一个时间卷积形式的变分泛函去推导有限元方程, 这种泛函的物理意义并不明确. 以后 C. T. Wang 等<sup>[4]</sup>用 Galerkin 方法导出了另一种有限元方程组, 但要求知道应力边界条件中的孔隙水压力分布, 实际应用时有困难. 本文后几个作者也曾用流量平衡法导出线性三角形单元的有限元公式<sup>[5]</sup>, 但这种方法难于推广到高次元. 本文将以经典变分原理为基础推导有限元方程, 因而具有明确的物理意义, 而且只要适当构造插值函数, 即可导出种种有限元公式. 对时间域进行离散化时, 我们将若干差分格式纳入一个统一的计算公式. 最后, 作为实例, 对巴家咀水库在淤土地基上两期加高土坝的工程进行了固结计算, 取得了较好的成果. 本文仅讨论线性固结, 然而, 结合文献[5]的方法, 我们亦能用本文的结果直接处理非线性固结问题.

## 二、饱和土固结的特性方程和变分泛函

三维固结的 Biot 方程可简述如下<sup>(1)\*</sup>:

$$\text{平衡方程} \quad \sigma_{\alpha\beta,\beta} + \delta_{\alpha\beta}\tilde{p}_{,\beta} + \rho_1 F_\alpha = 0 \quad (2.1)$$

$$\text{应力-应变关系} \quad \sigma_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta\zeta\gamma} \varepsilon_{\zeta\gamma} \quad (2.2)$$

$$\text{应变-位移关系} \quad \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\tilde{u}_{\alpha,\beta} + \tilde{u}_{\beta,\alpha}) \quad (2.3)$$

$$\text{Darcy 定律} \quad q_{\alpha} = K_{\alpha\beta} (\tilde{p}_{,\beta} + \rho_2 F_{\beta}) \quad (2.4)$$

$$\text{不可压缩流体连续性方程} \quad q_{\alpha,\alpha} + \dot{\tilde{u}}_{\alpha,\alpha} = 0 \quad (2.5)$$

这里  $\sigma_{\alpha\beta}$  ( $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ ) 是应力张量的分量,  $\varepsilon_{\zeta\gamma}$  ( $\zeta, \gamma = 1, 2, 3$ ) 是应变张量的分量,  $C_{\alpha\beta\zeta\gamma}$  是弹性张量的分量,  $\rho_1$  是饱和土质量密度,  $F_{\alpha}$  是单位质量的体力向量分量,  $\tilde{u}_{\alpha}$  是土粒位移向量的分量 (因此  $\tilde{u}_{\alpha,\alpha}$  是体积应变),  $q_{\alpha}$  是孔隙流向量的分量,  $\rho_2$  是流体的质量密度,  $\tilde{p}$  是孔隙水压力,  $K_{\alpha\beta}$  是渗透系数对称张量的分量.

简化上述方程组, 我们将方程 (2.2), (2.3) 代入方程 (2.1), 将方程 (2.4) 代入方程 (2.5), 得到

$$\frac{1}{2} C_{\alpha\beta\zeta\gamma} (\tilde{u}_{\zeta,\gamma} + \tilde{u}_{\gamma,\zeta})_{,\beta} + \tilde{p}_{,\alpha} + \rho_1 F_{\alpha} = 0 \quad (2.6)$$

$$K_{\alpha\beta} (\tilde{p}_{,\beta} + \rho_2 F_{\beta})_{,\alpha} + \dot{\tilde{u}}_{\alpha,\alpha} = 0 \quad (2.7)$$

边界条件由

- 1) 位移边界条件  $\tilde{u}_{\alpha} = \bar{u}_{\alpha}$  在边界  $\Gamma_u$  上
- 2) 应力边界条件  $(\sigma_{\alpha\beta} + \delta_{\alpha\beta} \tilde{p}) n_{\beta} = \hat{T}_{\alpha}$  在边界  $\Gamma_{\sigma}$  上
- 3) 孔隙水压力边界条件  $\tilde{p} = \bar{p}$  在边界  $\Gamma_p$  上
- 4) 孔隙流边界条件  $q_{\alpha} n_{\alpha} = \hat{Q}$  在边界  $\Gamma_q$  上

给出, 而初始条件为

- 5)  $\tilde{u}_{\alpha}(x, 0) = 0$
- 6)  $\tilde{p}_{,\beta}(x, 0) + \rho_2(x) F_{\beta}(x) = 0$

这里  $\tilde{u}_{\alpha}(x, 0) = \tilde{u}_{\alpha}(x_1, x_2, x_3, t)|_{t=0}$ , 其余类推;  $\Gamma_u, \Gamma_{\sigma}, \Gamma_p, \Gamma_q$  各为位移, 应力, 孔隙水压力, 孔隙流的边界,  $n_{\alpha}$  为边界外法线方向余弦; 区域边界为  $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_{\sigma} = \Gamma_p \cup \Gamma_q$ , 且  $\Gamma_u \cap \Gamma_{\sigma} = 0$ ,  $\Gamma_p \cap \Gamma_q = 0$ .

在下文中, 为简单起见, 我们设位移和孔隙水压力的边界条件是齐次的, 因而  $\bar{u}_{\alpha} = \bar{p} = 0$ .

方程 (2.6), (2.7) 连同给定的边界条件和初始条件构成饱和土固结的特性方程, 现在我们用下列方法推导对应的变分泛函.

$$\text{设 } \{f\} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3)^T, \{F\} = (F_1, F_2, F_3)^T, \nabla \tilde{p} = \left( \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_1}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_2}, \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x_3} \right)^T. \text{ 将 } \nabla \tilde{p} \text{ 看}$$

\* 本文所用符号可参见文献 [6], 特别是采用下列约定:

- 1° 重复出现的下标意为对该下标从 1 到 3 求和, 如  $K_{\alpha\beta} F_{\beta} = \sum_{\beta=1}^3 K_{\alpha\beta} F_{\beta}$ ;
- 2° 逗号后的下标表示对该空间变元求导, 如  $\sigma_{\alpha\beta,\beta} = \sum_{\beta=1}^3 \frac{\partial \sigma_{\alpha\beta}}{\partial x_{\beta}}$ ;
- 3° 字母上的一点表示对时间求导, 如  $\dot{u}_{\alpha} = \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial t}$ ;
- 4°  $\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \alpha \neq \beta \\ 1 & \alpha = \beta \end{cases}$ .

作为土体上承受的外力, 根据弹性力学最小势能原理, 我们构造泛函

$$J_1 = \iiint_V \frac{1}{2} \{e\}^T \{\sigma\} dV - \iiint_V \{f\}^T (\nabla \bar{p} + \rho_1 \{F\}) dV - \iint_{\Gamma_\sigma} \{f\}^T \{\hat{T}\} dS$$

这里  $\{\hat{T}\} = (\hat{T}_1, \hat{T}_2, \hat{T}_3)^T$ ,  $\hat{T}_\alpha = (\sigma_{\alpha\beta n_\beta})|_{\Gamma_\sigma}$ . 注意到在  $\Gamma_u$  上  $\tilde{u}_\alpha = 0$ , 由 Gauss 散度定理, 我们得到

$$-\iiint_V \{f\}^T \nabla \bar{p} dV = -\iiint_V \tilde{u}_{\alpha, \alpha} \bar{p} dV = \iiint_V \tilde{u}_{\alpha, \alpha} \bar{p} dV - \iint_{\Gamma_\sigma} \tilde{u}_\alpha \bar{p} n_\alpha dS$$

设  $\nabla = \left( \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T$  是梯度算子, 由应力边界条件得

$$\begin{aligned} J_1 &= \iiint_V \frac{1}{2} \{e\}^T \{\sigma\} dV + \iiint_V \nabla^T \{f\} \bar{p} dV - \iiint_V \{f\}^T \rho_1 \{F\} dV - \iint_{\Gamma_\sigma} \{f\}^T \{\hat{T}\} dS \\ &= \iiint_V \frac{1}{2} \sigma_{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} dV + \iiint_V \tilde{u}_{\alpha, \alpha} \bar{p} dV - \iiint_V \tilde{u}_\alpha \rho_1 F_\alpha dV - \iint_{\Gamma_\sigma} \hat{T}_\alpha \tilde{u}_\alpha dS \\ &= \iiint_V \frac{1}{8} (\tilde{u}_{\alpha, \beta} + \tilde{u}_{\beta, \alpha}) C_{\alpha\beta\gamma\delta} (\tilde{u}_{\gamma, \delta} + \tilde{u}_{\delta, \gamma}) dV + \iiint_V \tilde{u}_{\alpha, \alpha} \bar{p} dV \\ &\quad - \iint_{\Gamma_\sigma} \tilde{u}_\alpha \rho_1 F_\alpha dV - \iint_{\Gamma_\sigma} \hat{T}_\alpha \tilde{u}_\alpha dS \end{aligned}$$

这里  $\nabla^T \{f\} = \tilde{u}_{\alpha, \alpha}$  为单位体积改变量, 因而  $\iiint_V \tilde{u}_{\alpha, \alpha} \bar{p} dV$  表示孔隙水压力引起弹性体体积

改变所作的功转化成的内能, 其余各项的物理意义和经典意义下的一致, 但边界力  $\hat{T}_\alpha$  应为总应力, 而不单是有效应力  $\sigma_{\alpha\beta}$ . 由此可见  $J_1$  是弹性体的总势能, 可以直接验证:  $J_1$  关于  $\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \tilde{u}_3$  的一次变分产生的 Euler 方程即为 (2.6). 对于有初始应力和面荷载的问题, 可在  $J_1$  中添上相应的项, 不必赘述.

另一方面, 令  $\varphi = K_{\alpha\beta} (\rho_2 F_\beta)_{, \alpha} + \tilde{u}_{\alpha, \alpha}$ , 方程 (2.7) 可写为

$$-K_{\alpha\beta} (\tilde{p}, \beta)_{, \alpha} = \varphi \quad (2.8)$$

这是一个二阶椭圆型方程, 若自然边界条件为

$$K_{\alpha\beta} \tilde{p}, \beta n_\alpha = \bar{Q} \quad \text{在 } \Gamma_q \text{ 上}$$

则方程 (2.8) 的变分泛函为

$$\begin{aligned} J'_2(\tilde{p}) &= \iiint_V \left[ \frac{1}{2} \tilde{p}, \alpha K_{\alpha\beta} \tilde{p}, \beta - \tilde{p} \varphi \right] dV - \iint_{\Gamma_q} \bar{Q} \tilde{p} dS \\ &= \iiint_V \frac{1}{2} \tilde{p}, \alpha K_{\alpha\beta} \tilde{p}, \beta dV - \iiint_V \tilde{p} \tilde{u}_{\alpha, \alpha} dV - \iiint_V K_{\alpha\beta} (\rho_2 F_\beta)_{, \alpha} \tilde{p} dV - \iint_{\Gamma_q} \bar{Q} \tilde{p} dS \end{aligned}$$

但由高斯定理

$$-\iiint_V K_{\alpha\beta} (\rho_2 F_\beta)_{, \alpha} \tilde{p} dV = \iiint_V K_{\alpha\beta} \tilde{p}, \alpha \rho_2 F_\beta dV - \iint_{\Gamma_q} K_{\alpha\beta} \rho_2 F_\beta n_\alpha \tilde{p} dV$$

因此由上式及孔隙流边界条件得出

$$J'_2(\tilde{p}) = \iiint_V \frac{1}{2} \tilde{p}_{, \alpha} K_{\alpha\beta} \tilde{p}_{, \beta} dV - \iiint_V \tilde{p} \tilde{u}_{\alpha, \alpha} dV + \iiint_V K_{\alpha\beta} \tilde{p}_{, \alpha} \rho_2 F_{\beta} dV - \iint_{\Gamma_q} \tilde{Q} \tilde{p} dS$$

将常数  $c = \iiint_V \frac{1}{2} \rho_2 F_{\alpha} K_{\alpha\beta} \rho_2 F_{\beta} dV$  加到  $J'_2(\tilde{p})$  中去, 注意到  $K_{\alpha\beta}$  的对称性, 得

$$\begin{aligned} J_2(\tilde{p}) &= J'_2(\tilde{p}) + c \\ &= \iiint_V \frac{1}{2} (\tilde{p}_{, \alpha} + \rho_2 F_{\alpha}) K_{\alpha\beta} (\tilde{p}_{, \beta} + \rho_2 F_{\beta}) dV - \iiint_V \tilde{p} \tilde{u}_{\alpha, \alpha} dV - \iint_{\Gamma_q} \tilde{Q} \tilde{p} dS \end{aligned}$$

容易证明:  $J_2$  关于  $\tilde{p}$  的一次变分得到的 Euler 方程即为 (2.7).

### 三、有限元离散方程

把区域  $V$  划分为有限个子域  $\{V_e\}$ , 对位移和孔隙压力可分别在  $V_e$  中指定一组结点, 位移场和孔压场均用结点值定义. 通常孔压元素的结点仅为位移元素结点的一部分, 使在每个  $V_e$  内部位移插值多项式比孔压插值多项式高一阶, 因而有效应力的分布可和孔压分布相匹配以得出较好的结果.

设  $N_i^e, N_j^e, N_m^e, \dots$  和  $\bar{N}_i^e, \bar{N}_j^e, \bar{N}_m^e, \dots$  各为位移场和孔压场的形态函数, 其中  $i, j, m, \dots$  等为元素的结点编号, 则在  $V_e$  内部, 位移插值函数  $\{f\}^e$  和孔压插值函数  $p^e$  可表示为

$$\{f\}^e = [IN_i^e, IN_j^e, IN_m^e, \dots] \{\delta\}^e = [N]^e \{\delta\}^e$$

$$p^e = [\bar{N}_i^e, \bar{N}_j^e, \bar{N}_m^e, \dots] \{p\}^e = [\bar{N}]^e \{p\}^e$$

这里  $I$  为单位矩阵, 其阶数等于固结问题的维数,  $\{\delta\}^e = (u_i^e, u_j^e, u_k^e, u_l^e, u_m^e, u_n^e, u_o^e, u_p^e, \dots)^T$  是结点位移向量,  $\{p\}^e = (p, p_i, p_m, \dots)^T$  是结点孔隙压力向量

令

$$[B]_e = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_j}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} & \frac{\partial N_j}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_l}{\partial x_3} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_j}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_l}{\partial x_1} \end{pmatrix} \quad (i, j, m, \dots)$$

$$[E]_e = (\nabla N_i)^T = \left( \frac{\partial N_i}{\partial x_1}, \frac{\partial N_j}{\partial x_2}, \frac{\partial N_l}{\partial x_3} \right) \quad (i, j, m, \dots)$$

$$[B] = [B_e, B_e, B_e, \dots], \quad [E] = [E_e, E_e, E_e, \dots]$$

$$[K^U] = \iiint_{V_e} [B]^T [D] [B] dV, \quad [L]^e = \iiint_{V_e} [E]^T [\bar{N}]^e dV$$

$$\{R\}^e = \iiint_{V_e} [N] e^T \rho_1 \{F\} dV, \quad \{T\}^e = \iint_{\Gamma_e^c} [N] e^T \{\hat{T}\} dS$$

其中  $\Gamma_e^c = V \cap \Gamma_0$ , 公式后面的记号  $(i, j, m, \dots)$  表示公式中足标可按此顺序轮换得到  $[B_i]$ ,  $[B_m]$ ,  $\dots$  及  $[E_i]$ ,  $[E_m]$ ,  $\dots$  等等, 这样, 我们有

$$\begin{aligned} J_1 &= \sum_e \iiint_{V_e} \frac{1}{2} \{e\}^T e^T \{\sigma\}^e dV + \sum_e \iiint_{V_e} \nabla^T \{f\}^e p^e dV - \sum_e \iiint_{V_e} \rho_1 \{f\}^e e^T \{F\} dV \\ &\quad - \sum_e \iint_{\Gamma_e^c} \{f\}^e e^T \{\hat{T}\} dS \\ &= \sum_e \iiint_{V_e} \frac{1}{2} \{\delta\}^e e^T [B]^T [D] [B] \{\delta\}^e dV + \sum_e \iiint_{V_e} \{\delta\}^e e^T [E] [\bar{N}]^e \{p\}^e dV \\ &\quad - \sum_e \iiint_{V_e} \{\delta\}^e e^T [N] e^T \rho_1 \{F\} dV - \sum_e \iint_{\Gamma_e^c} \{\delta\}^e e^T [N] e^T \{\hat{T}\} dS \\ &= \frac{1}{2} \sum_e \{\delta\}^e e^T [K^f]^e \{\delta\}^e + \sum_e \{\delta\}^e e^T [L]^e \{p\}^e - \sum_e \{\delta\}^e e^T \{R\}^e - \sum_e \{\delta\}^e e^T \{T\}^e \end{aligned}$$

类似地, 令

$$[H_i] = \nabla \bar{N}_i = \left( \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x_1}, \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x_2}, \frac{\partial \bar{N}_i}{\partial x_3} \right)^T \quad (i, j, m, \dots)$$

$$[H] = \nabla [\bar{N}] = [H_i, H_j, H_m, \dots], \quad [K^p]^e = \iiint_{V_e} [H]^T [K] [H] dV$$

$$\{S\}^e = \iiint_{V_e} \rho_2 [H]^T [K] \{F\} dV, \quad \{Q\}^e = \iint_{\Gamma_e^c} \hat{Q} [\bar{N}]^T dS$$

其中  $\Gamma_e^c = \Gamma_0 \cap V_e$ , 则我们有

$$\begin{aligned} J_2 &= \sum_e \iiint_{V_e} \frac{1}{2} [\nabla p^e]^T [K] \nabla p^e dV - \sum_e \iiint_{V_e} p^e \nabla^T \{f\}^e dV \\ &\quad + \sum_e \iiint_{V_e} \rho_2 [\nabla p^e]^T [K] \{F\} dV - \sum_e \iint_{\Gamma_e^c} \hat{Q} p^e dS \\ &= \sum_e \iiint_{V_e} \frac{1}{2} \{p\}^e e^T [H]^T [K] [H] \{p\}^e dV - \sum_e \iiint_{V_e} \{p\}^e e^T [\bar{N}]^T [E] \{\delta\}^e dV \\ &\quad + \sum_e \iiint_{V_e} \rho_2 \{p\}^e e^T [H]^T [K] \{F\} dV - \sum_e \iint_{\Gamma_e^c} \hat{Q} \{p\}^e e^T [\bar{N}]^T dS \\ &= \frac{1}{2} \sum_e \{p\}^e e^T [K^p]^e \{p\}^e - \sum_e \{p\}^e e^T [L]^e \{\delta\}^e + \sum_e \{p\}^e e^T \{S\}^e - \sum_e \{p\}^e e^T \{Q\}^e \end{aligned}$$

这样, 由

$$\frac{\partial J_1}{\partial u_i^e} = 0 \quad \alpha = 1, 2, 3, \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial f_i^e} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

可得到半离散有限元方程组

$$[K^I]\{\delta\} + [L]\{p\} = \{R\} + \{T\} \quad (3.1)$$

$$[L]^T\{\delta\} - [K^P]\{p\} = \{S\} - \{Q\} \quad (3.2)$$

其中  $[K^P] = \sum_e [K^P]^e$ ,  $[K^I] = \sum_e [K^I]^e$ ,  $[L] = \sum_e [L]^e$ ,  $\{T\} = \sum_e \{T\}^e$ ,

$\{R\} = \sum_e \{R\}^e$ ,  $\{Q\} = \sum_e \{Q\}^e$ ,  $\{S\} = \sum_e \{S\}^e$  方程组各项的物理意义是不言而喻的。

现在考虑时间  $t$  的离散问题, 设  $\Delta t_n = t_n - t_{n-1}$ ,  $\{\delta\}_n = \{\delta\}_{t_n}$  在区间  $[t_{n-1}, t_n]$  内设

$$\{\delta\} \approx \frac{\{\delta\}_n - \{\delta\}_{n-1}}{\Delta t_n}, \quad \{p\} \approx \alpha \{p\}_n + (1-\alpha) \{p\}_{n-1},$$

$$\{S\} \approx \alpha \{S\}_n + (1-\alpha) \{S\}_{n-1}, \quad \{Q\} \approx \alpha \{Q\}_n + (1-\alpha) \{Q\}_{n-1}$$

其中参数  $\alpha$  满足  $0 \leq \alpha \leq 1$ 。这样, 方程(3.1), (3.2)化为

$$[K^I]_n \{\delta\}_n + [L]\{p\}_n = \{R\}_n + \{T\}_n \quad (3.3)$$

$$[L]^T (\{\delta\}_n - \{\delta\}_{n-1}) - \alpha \Delta t_n [K^P]_n \{p\}_n = (1-\alpha) \Delta t_n [K^P]_n \{p\}_{n-1} \\ + \alpha \Delta t_n \{S\}_n + (1-\alpha) \Delta t_n \{S\}_{n-1} - \alpha \Delta t_n \{Q\}_n - (1-\alpha) \Delta t_n \{Q\}_{n-1} \quad (3.4)$$

其中  $[L]$  和时间无关, 因为它只取决于单元形态函数。若用  $\{\Delta \delta\}_n = \{\delta\}_n - \{\delta\}_{n-1}$  表示位移

增量, 且令  $\{d\}_n = \sum_{i=1}^n [K^I]_i \{\Delta \delta\}_i = \{d\}_{n-1} + [K^I]_n \{\Delta \delta\}_n$ , 则方程(3.3), (3.4)可用位移的

增量形式写成:

$$[K^I]_n \{\Delta \delta\}_n + [L]\{p\}_n = \{R\}_n + \{T\}_n - \{d\}_{n-1} \quad (3.5)$$

$$[L]^T \{\Delta \delta\}_n - \alpha \Delta t_n [K^P]_n \{p\}_n = (1-\alpha) \Delta t_n [K^P]_n \{p\}_{n-1} + \alpha \Delta t_n \{S\}_n \\ + (1-\alpha) \Delta t_n \{S\}_{n-1} - \alpha \Delta t_n \{Q\}_n - (1-\alpha) \Delta t_n \{Q\}_{n-1} \quad (3.6)$$

易证其系数矩阵是稀疏对称的非奇异阵, 参数  $\alpha$  可根据需要选择而得到各种差分格式。例如, 取  $\alpha = 0$ , 则为向前差分法; 取  $\alpha = 1$ , 则为向后差分法; 取  $\alpha = \frac{1}{2}$ , 则为 Crank-Nicolson

方法。参数  $\alpha$  亦可随时间而变, 如取  $\alpha = n - 1 / \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)$ , 则为 Hwang<sup>[4]</sup> 方法等等。

下面具体讨论平面固结问题, 为简单起见, 假定应力边界条件和孔隙流边界条件是齐次的, 即  $\hat{T}_a = \hat{Q} = 0$ ; 又设 Darcy 定律的渗透系数为各向同性, 且  $K_{\alpha\beta} = \frac{k}{\gamma_w} \cdot \delta_{\alpha\beta}$ , 其中  $k$  为单位质量的渗透系数,  $\gamma_w$  是水的容重; 此外, 设孔隙流的体力引起的流量可以忽略不计, 因而方程(2.7)简化为

$$-\frac{k}{\gamma_w} \nabla^2 p + \tilde{u}_{\alpha, \alpha} = 0 \quad (3.7)$$

设  $\{pd\}_n = \{R\}_n - \{d\}_{n-1}$ ,  $\alpha \Delta t_n [K^P]_n = [\bar{K}^P]_n$ , 则方程(3.5), (3.6)能改写成

$$[K^I]_n \{\Delta \delta\}_n + [L]\{p\}_n = \{pd\}_n \quad (3.8)$$

$$[L]^T \{\Delta\delta\}_n - [\bar{K}^p]_n \{p\}_n = \frac{(1-\alpha)}{\alpha} [\bar{K}^p]_n \{p\}_{n-1} \quad (3.9)$$

这就是平面固结问题的有限元方程，向量 $\{pd\}_n$ 可用下式递推计算：

$$\begin{aligned} \{pd\}_n &= \{R\}_n - \{d\}_{n-1} = \{R\}_n - \{d\}_{n-2} - [K^f]_{n-1} \{\Delta\delta\}_{n-1} \\ &= (\{R\}_n - \{R\}_{n-1}) + \{pd\}_{n-1} - [K^f]_{n-1} \{\Delta\delta\}_{n-1} \end{aligned}$$

只要适当选择插值函数，不难导出各种单元的刚度矩阵的计算公式。作为例子，我们可得到平面六结点复合三角形单元（图1）的刚度矩阵。位移场取角点 $i, j, m$ 和边中点 $1, 2, 3$ 为插值结点，因而在三角形内是二次多项式，孔压场仅取角点为插值结点，因而在三角形内为线性多次式。我们用面积坐标构造插值函数 $\{f\}^e = \{u, v\}^e = [N]^e \{\delta\}^e$ 和 $p = [\bar{N}]^e \{p\}^e$ ，这里

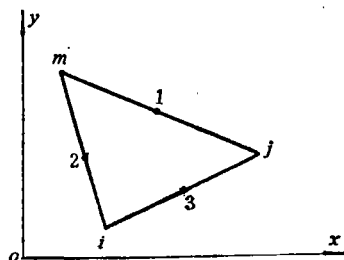


图1 六结点复合三角形单元

$$[N]^e = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}$$

$$[\bar{N}]^e = [\bar{N}_1, \bar{N}_2, \bar{N}_3]$$

$$\{\delta\}^e = (u_i, v_i, u_j, v_j, u_m, v_m, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)^T$$

$$\{p\}^e = (p_i, p_j, p_m)^T$$

$$N_i = L_i(2L_i - 1), \quad \bar{N}_i = L_i, \quad (i, j, m)$$

$$N_1 = 4L_i L_m \quad (1, 2, 3, i, j, m)$$

$$L_i = (a_i + b_i x + c_i y) / 2\Delta \quad (i, j, m) \quad \Delta \text{为三角形面积}$$

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j, \quad b_i = y_j - y_m, \quad c_i = -x_i + x_m \quad (i, j, m)$$

但

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = b_i(4L_i - 1) / 2\Delta, \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} = c_i(4L_i - 1) / 2\Delta \quad (i, j, m)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = 4(b_i L_m + L_i b_m) / 2\Delta \quad (1, 2, 3, i, j, m)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y} = 4(c_i L_m + L_i c_m) / 2\Delta$$

我们得到

$$[B_i] = \frac{4L_i - 1}{2\Delta} [S_i], \quad [E_i] = \frac{4L_i - 1}{2\Delta} [b_i, c_i] \quad (i, j, m)$$

$$[B_1] = \frac{2L_m}{\Delta} [S_i] + \frac{2L_i}{\Delta} [S_m] \quad (1, 2, 3, i, j, m)$$

其中

$$[S_i] = \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & c_i \\ c_i & b_i \end{pmatrix} \quad (i, j, m)$$

若将单元自由度重新排列成 $(u_i, v_i, p_i, u_j, v_j, p_j, u_m, v_m, p_m, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)^T$ ，则用上述公式计算 $[K^f]^e$ ， $[L]^e$ ， $[K^p]^e$ 时，单元刚度矩阵为





其中

$$[H_{ij}] = \frac{1}{12\Delta} [S_i]^T [D] [S_j]$$

$$= a \begin{bmatrix} b_i b_j + a_2 c_i c_j & a_1 b_i c_j + a_2 b_j c_i \\ a_1 b_j c_i + a_2 b_i c_j & c_i c_j + a_2 b_i b_j \end{bmatrix} \quad (i, j, m)$$

$$a = \frac{E(1-\mu)}{12\Delta(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad a_1 = \frac{\mu}{1-\mu}, \quad a_2 = \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}$$

$$\tilde{K}_{ij} = -\frac{k\alpha \cdot \Delta t_n}{4\gamma_w \Delta} (b_i b_j + c_i c_j) \quad (i, j, m)$$

这里,  $E$ 为弹性模量,  $\mu$ 为泊松比.

#### 四、巴家咀土坝的固结分析

巴家咀土坝(图2)是大型拦泥坝,坝高66米.1962年建成后在11年中坝前淤积土高达31米.1973—1975年在坝前淤土上将土坝加高8米,这比坝后加高大大节省了工程量.由于近几年的淤积,拟于近期在坝前淤土上再继续加高6米.为了控制施工速度,使淤土中孔隙压力不致过大,以保证淤土强度稳定增长,我们对两期加高工程作了固结分析.结果表明,第一期加高工程的计算结果基本上符合实际,因而第二期加高的计算结果可作为分析论证的依据.

##### 1. 边界条件

由图2,土坝分为坝体填土和坝前淤土两部分,上游水位随淤土沉积而逐步抬高,计算中假定它与淤土面齐平,其浸润线按相应水位根据稳定渗流计算确定.

第一期加高工程的边界条件是:AB为上游水位线,也是顶部排水边界,其孔压值为零;BC为浸润线,其孔压为常数;CD、AB为孔压已知边界,假定其孔压为线性分布,数值由靠近CD边界的实测值推算;新加高体(一)和老坝体浸润线以上部分假定固结立即完成,孔压始终为零.

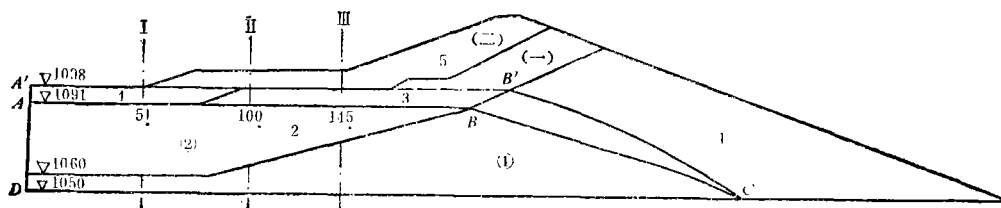


图2 巴家咀土坝固结计算简图 1:2000

第二期坝前加高的边界条件是:上游水位线抬高至A'B',其浸润线为B'C,孔压已知,边界CD及A'D的孔压仍按实测资料的相应水头推估,新加高体(一)的上游水位以上部分及新加高体(二)和浸润线B'C以上的老坝体假定固结立即完成,孔压始终为零.

##### 2. 荷载分级

由图2,两期工程荷载共分五级:第一级为老坝体自重,不计固结;第二级荷载包括新

增单元自重及浸润线 BC 以下单元所含水重, 按实际淤积时间进行固结计算; 第三级荷载为坝前加高体(一), 固结消散640天; 第四级荷载包括坝前新淤土自重, 老坝体中B'C与BC间的单元及水位抬高后的盖重体部分(即坝前加高体(一)位于A'B'BA内的单元)所含水重, 固结消散时间为第一期工程竣工至第二期加高开始前这一段时间; 第五级荷载是坝前加高体(二), 固结消散500天。

### 3. 土的计算参数

表 1

土类	容重		凝聚力		摩擦角		渗透系数		E		μ		R		Kpa		n		G		F		d		[σ]		
	(吨/米 <sup>3</sup> )	(吨/米 <sup>2</sup> )	(度)	(度)	(米/天)																						
①	1.87	0	32.2	0.0216	1300	0.35	0.89	2670	0.383	0.335	0.175	2.2	2														
②	2.01	0	34.2	0.000432	500	0.30	0.62	1000	0.945	0.299	0.083	3.2	2														

注 土类①②参见图 1。

### 4. 计算结果的分析

#### (I) 孔隙水压力

取图 2 的 I、II、III 断面, 它们在不同时刻的孔压分布及消散规律如图 3。由图可见, 距荷载中心近的断面, 孔压增值较大, 因而与边界孔压之间产生较大的水头差, 形成较快的

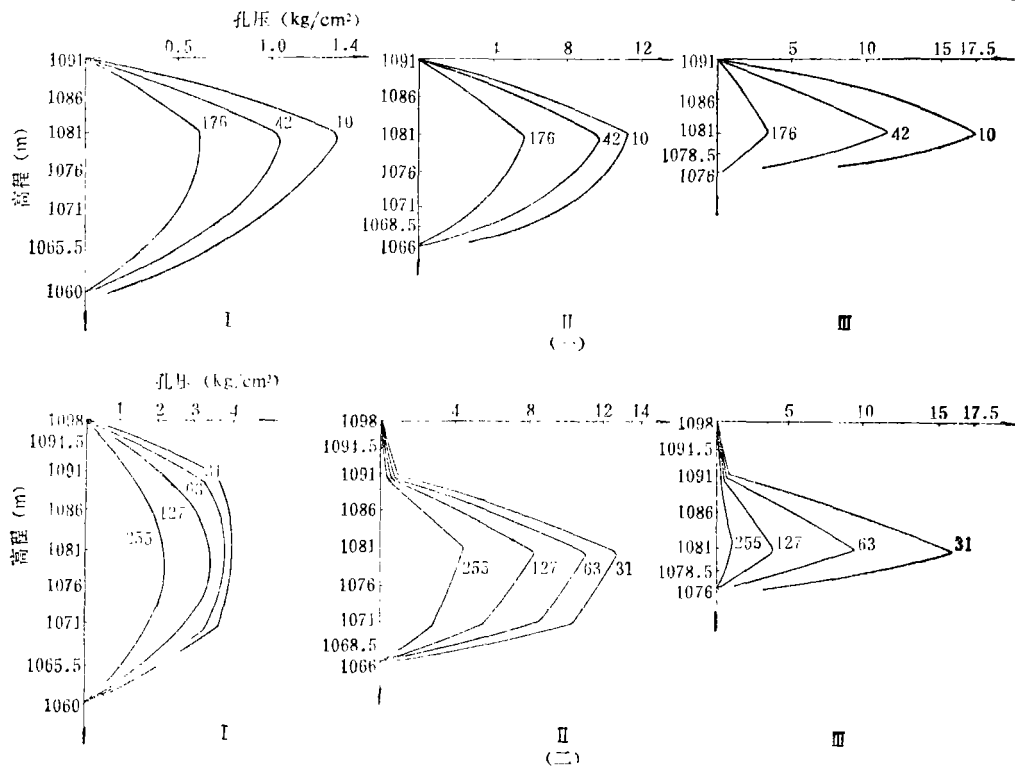


图 3 巴加咀土坝加高体断面孔压分布

消散速率, 各断面孔压峰值一般在1081米高程处(即图 2 的145、100、51号点)。此外, 断面 I 全为淤土地基, 故图 3 (二) 的孔压增量分布较均匀, 而断面 II 和 III 在1091—1098米之间

为第一期加高的人工填土,性质与淤土性质迥然不同(其渗透系数要比淤土大 50 倍)故引起的孔压增量很少,导致孔压分布在1091米处突变. 最后,如绘出初期孔压等值线,则可见第二期加高比第一期加高孔压普遍增大,进而观察145、100、51号点的孔压消散过程线,可以看出二期加高后期的孔压消散较快,致使施工末期的孔压值均低于第一期加高后相应时刻的数值.

### (II) 变形

位移的等值线图显示坝体各部分移动方向与加高体施工荷载作用方向一致,且在坡脚附近淤土面及老坝体下游出现坡面局部隆起现象,和第一期加高时的现场观测相符. 图4、图5是不均匀沉降率(拉应变)等值线,根据国内几座土坝工程的调查结果,发生裂缝时拉应变一般在0.75—1.25的范围内,估计允许值在1左右. 图4中有两个区域拉应变大于1,一个在老坝体与加高体顶部,另一个在加高体前缘25米深入淤土10米的范围内. 实际观测表明,第一期加高工程确实在老坝体下游坡面顶部产生九条纵向裂缝,与拉应变大值区基本吻合. 在图5中,加高体与老坝体顶部拉应变大于1的区域明显上抬而且向加高体上游发展,而盖重前缘拉应变大于1的区域也有所扩大. 可以预计,第二期加高竣工后,加高体下游坡面和坝

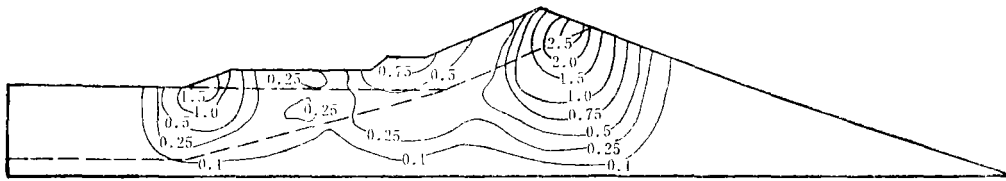


图4 一期加高不均匀沉降率等值线

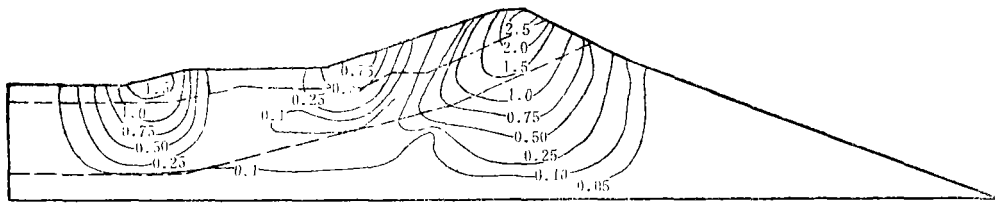


图5 二期加高不均匀沉降率等值线

顶有可能产生裂缝,其深度可达第一、第二期加高的新填土体,对这一裂缝区需作适当处理才可保证安全度汛.

### (III) 应力

图6、图7是应力水平

$$SS = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_3)_f}$$

的等值线图. 应力水平值越大,表示越接近破坏.  $(\sigma_1 - \sigma_3)_f$  为破坏时的主应力力差,根据Mohr—Coulomb 破坏准则,可表示为

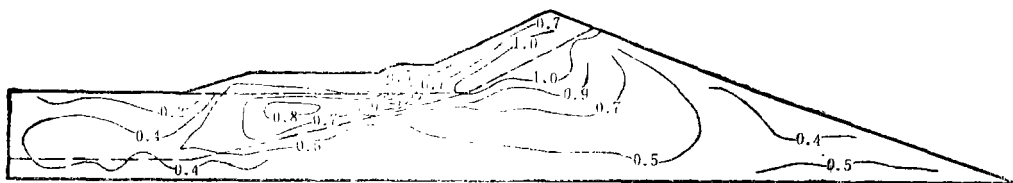


图6 一期加高应力水平等值线

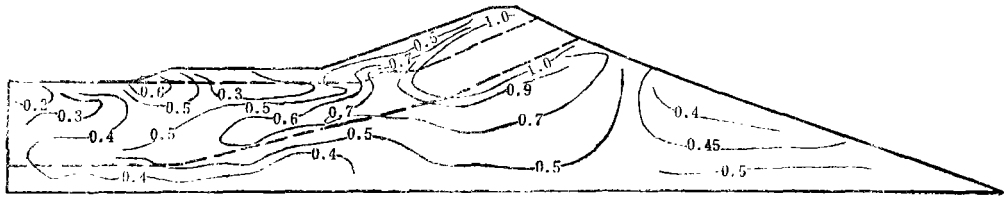


图7 二期加高应力水平等值线

$$(\sigma_1 - \sigma_3)_f = \frac{2c \cos \varphi + 2\sigma_3 \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}$$

式中  $\varphi$  为土体内摩擦角(度),  $c$  为土体凝聚力(公斤/厘米<sup>2</sup>)。第一期加高后, 剪切破坏( $ss=1$ )主要发生在老坝体上游坡面两侧的局部区域, 坡脚下的淤土中亦有小范围的破坏区(见图6)。第二期加高后应力状态有所调整, 整个淤土中的应力水平值均比较均匀, 无剪破迹象, 但加高体顶部的破坏区域明显上抬和扩展(图7), 这与拉应变的发展趋势是一致的, 然而就整个坝体来看, 应力水平值并不大, 说明竣工时大坝整体是稳定的。当然, 由应力-应变分析可见, 两期加高中, 新加高体上游坝坡的局部断面稳定性将比大坝的整体稳定性为低, 这是加荷后的应力状态所致, 我们曾对加高断面用圆弧滑动法作过稳定验算, 其结果与应力分析的结论相符。

## 五、结 语

本文从经典变分原理出发推导了 Biot 有限元方程, 这一结果本质上和 [3] 的一致, 但这里所用的方法物理意义比较明确。在对半离散有限元方程组作时间离散化时, 我们将若干差分方法归纳成一个统一的计算格式, 由于孔隙压力消散速率在加载初期和后期相差很大, 因此具体计算时应采取变时间步长的方式来提高精度, 节省运算时间。我们在计算中观察到这种变步长格式是稳定的, 当然今后还需要从理论上给以严格的证明。

用有限元方法解 Biot 固结问题, 一个突出的优点是可以适应各种复杂的边界条件、加荷情况和不同的土质。巴家咀土坝的计算条件是复杂的, 但通过对第一期加高的验证分析, 结果与工程实践基本相符, 因此对第二期加高的论证结果是可以借鉴的。计算中未考虑土的非线性特性和施工期逐级分段加荷的特点, 但利用这里的有限元方程增量形式, 结合 [5] 的方法, 是容易推广到非线性固结问题的。

## 参 考 文 献

1. Biot, M. A., General theory of three-dimensional consolidation, *J. Appl. Phys.*, 12, (1941).
2. Terzhagi, K. and R. B. Peck, *Soil Mechanics in Engineering Practice*, Wiley, (1948).
3. Sandhu, R. S. and E. L. Wilson, Finite element analysis of seepage in elastic media, *J. Eng. Mech. Div. ASCE*, 95, (1969).
4. Hwang, C. T., N. R. Morgenstern, and D. W. Murray, On solutions of plane strain consolidation problems by finite element methods, *Canadian Geotechnical Journal*, 8, (1971).
5. 殷宗泽、徐鸿江、朱泽民, 饱和土平面固结问题有限单元法, *华东水利学院学报*, 1, (1973).
6. 鷲津久一郎, 《弹性学の变分原理概論》, 东京, (1972).

# The Application of the Finite Element Method to Solving Biot's Consolidation Equations

Zheng Jia-dong    Hu Hui-zhi

*(Shanghai Institute of Computing Technique, Shanghai)*

Xu Hong-jiang    Zhu Ze-min

*(Institute of Hydraulic Research, Yellow River  
Water Conservancy Commission, Zhengzhou)*

Yin Zong-ze

*(East China College of Hydraulic Engineering, Nanjing)*

## Abstract

Biot's theory of consolidation of saturated soil regards the consolidation process as a coupling problem between stress of elastic body and flow of fluid existing in pores. It can reflect the mechanism of consolidation more precisely than Terzhigi's theory. In this article, We obtain the general Biot's finite element equations of consolidation with classical variational principles. The equations have clear physical meaning and have been applied to analysing the consolidation of Bajiazui earth dam. The computational results are in accord with engineering practice.