

# 复合挤压力的上限解\*

吴诗悖 唐才荣 安江水 宾 锋

(西北工业大学, 1982年2月3日收到)

## 摘 要

本文根据实验和滑移线场拟定复合挤压时的速度不连续刚性三角形, 由此得出复合挤压时凸模单位压力的最小上限解的解析式. 将此式解值和实测值进行比较, 表明上限值可供实际使用.

## 一、上限定理

上限定理并不考虑力的平衡方程, 而主要考虑的只是在全塑性物体内的应变增量及其必需满足的条件.

假设实际位移增量场为  $du_i$ , 另以  $du_i^*$  表示任意假想的其他许可位移增量场, 但它们在边界  $S_u$  上必须相等, 即在边界  $S_u$  上  $du_i = du_i^*$ . 另外假设物体是不可压缩的, 即应力球形张量所作的功为零. 这样就有可能找出每一点的位移增量.

如图1所示, 一个运动的已知位移增量场沿某面  $S_D^*$  的切线分量可以具有不连续性. 但其法线分量必须在面  $S_D^*$  的两边相等. 假设  $de_{ij}^*$  表示由  $du_i^*$  所引导出来的塑性应变增量. 如将虚功原理方程应用于运动许可位移增量场和真实应力场  $\sigma_{ij}$ , 则虚功原理方程为:

$$\int_S T_i du_i^* dS = \int_V \sigma_{ij} e_{ij}^* dV + \int_{S_D^*} q du^* dS_D^* \quad (1.1)$$

式中  $T_i$  为外力,  $du^*$  是对于运动许可位移增量场内某一面  $S_D^*$  上的切向位移分量不连续量,  $q$  是  $\sigma_{ij}$  在位移增量不连续方向的剪应力分量.  $V$  为整个变形体的体积.

根据 W. Johnson 所作的假设和推导<sup>[1]</sup>, 可得在平面变形条件下的上限定理的基本方程为:

$$\int_{S_u} T_i du_i dS_u \leq \int_{S_D^*} K du^* dS_D^* \quad (1.2)$$

式中  $K$  为平面变形时的屈服剪切应力.

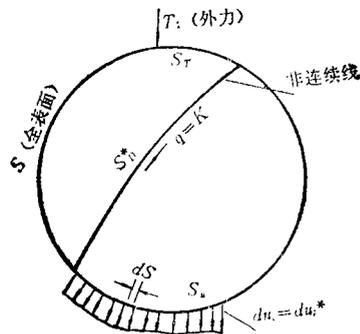


图1 表面条件及位移增量切线分量不连续示意图

\* 钱伟长推荐.

## 二、复合挤压时的金属流动

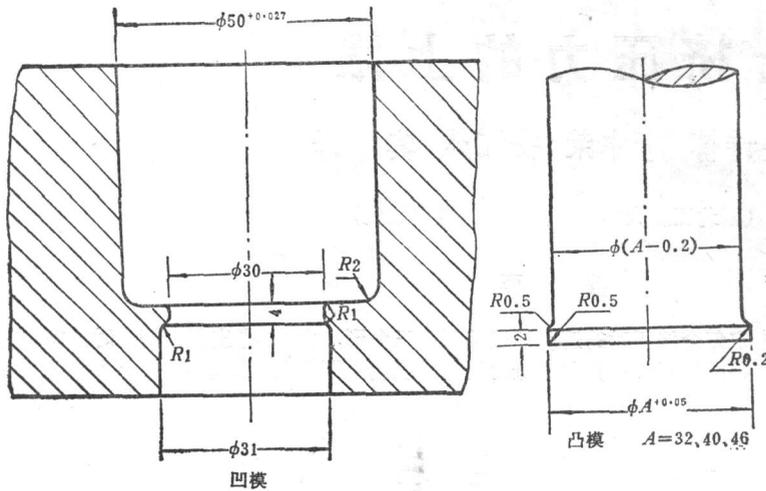
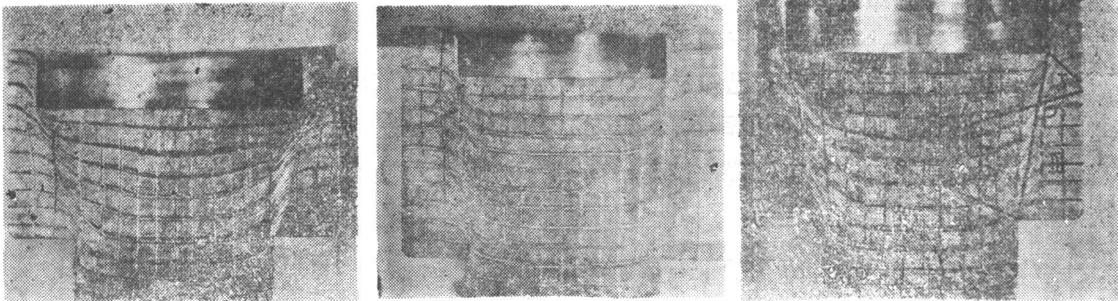


图2 实验模具的工作部分形态和尺寸

I区与II区。图4所示的P点为分流点。所谓分流点就是在该点以外的材料形成反挤部分，而在该点以内的材料形成正挤部分。

复合挤压实验采用铅作为挤压材料，毛坯直径49.5毫米。采用工业菜油作为润滑剂。模具工作部分的形状和尺寸如图2所示。实验在10吨材料试验机上进行。将试件沿中间剖开，在剖面上画上 $3 \times 3$ 毫米的网格，并涂上润滑剂，对合后进行挤压。

由图3和图4可见，在凸模下存在几乎不变形的粘滞区(IV区)，在凹模下角部存在死区(III区)。变形区为



(a) 正挤部分断面缩减率  $\varepsilon_{F_f} = 64\%$   
反挤部分断面缩减率  $\varepsilon_{F_b} = 64\%$

(b)  $\varepsilon_{F_f} = 64\%$   
 $\varepsilon_{F_b} = 41\%$

图3 复合挤压时的金属流动

图4 复合挤压时的变形区划分  
I、II—变形区；III、IV—未变形区

## 三、复合挤压时的滑移线场

当采用有效润滑剂进行复合挤压时，可以认为模具与材料之间的摩擦为零。W. Johnson和H. Kudo<sup>[2]</sup>等已作出其滑移线场，如图5所示。根据Л. А. Шлофман<sup>[3]</sup>对滑移线网的节点标注法可将节点标号标出。图中节点标号的第1个数字表示 $\beta$ 族滑移线，第2个数字表示 $\alpha$ 族滑移线。作图时滑移线场的网眼角 $\Delta\alpha$ 均相等。根据[3]，并结合图5，则任意节点的应力可以用下式求出：

$$\sigma_x = K \{-1 - (l+m)2\Delta\alpha - \cos[(l-m)2\Delta\alpha]\} \quad (3.1)$$

$$\sigma_y = K \{-1 - (l+m)2\Delta\alpha + \cos[(l-m)2\Delta\alpha]\} \quad (3.2)$$

$$\tau_{xy} = K \sin[(l-m)2\Delta\alpha] \quad (3.3)$$

式中 $K$ 为平面变形时的屈服剪切应力。

$\Delta\alpha$  为网眼角, 以弧度表示。  
在图 5 中,  $\Delta\alpha=5^\circ$ , 以弧度表示  
则为  $\frac{\pi}{36}$ ;

$l, m$ ——分别为  $\beta$  族和  $\alpha$  族  
滑移线的标号。

图 5 中的  $P$  点即为分流点。

根据式(3.2), 在图 5 的情  
况下, 即凹模腔直径为 50 毫米、  
凸模直径为 46 毫米、凹模孔直径  
为 30 毫米, 且毛坯高度为 46 毫米  
时, 在  $APE$  面上各节点的  $\sigma_y/K$   
值如表 1 所示。

根据各节点的  $\sigma_y/K$  值, 可  
以绘出在凸模端面上的  $\sigma_y/K$  或  
 $\sigma_y$  (压力) 分布 (图 6), 可得挤  
压力

$$P = \Sigma \Delta P = \Sigma 2\pi r \cdot \Delta r \cdot \sigma_y$$

$$= 4980K \text{ 公斤}$$

赵静远<sup>[4]</sup>用几何方法证明,  
复合挤压的滑移线网的分流点  $P$   
一定落在两组滑移线网的扇形中  
心  $A, B$  的联线上, 而且该点到  
 $A, B$  的距离与它们各自的扇形  
半径成比例 (图 7)。当模具尺寸  
( $r_1, r_2, R$ ) 不变时, 随凸模行  
程的变化或毛坯高度的变化 (即  
 $h$  的变化), 分流点  $P$  的位置只在  
垂直方向上移动, 而到对称轴的距离  $\rho$  保持不变。因此  $AB$  和  $CD$  两直线的交点就是分流点  $P$  (图 7)。而且

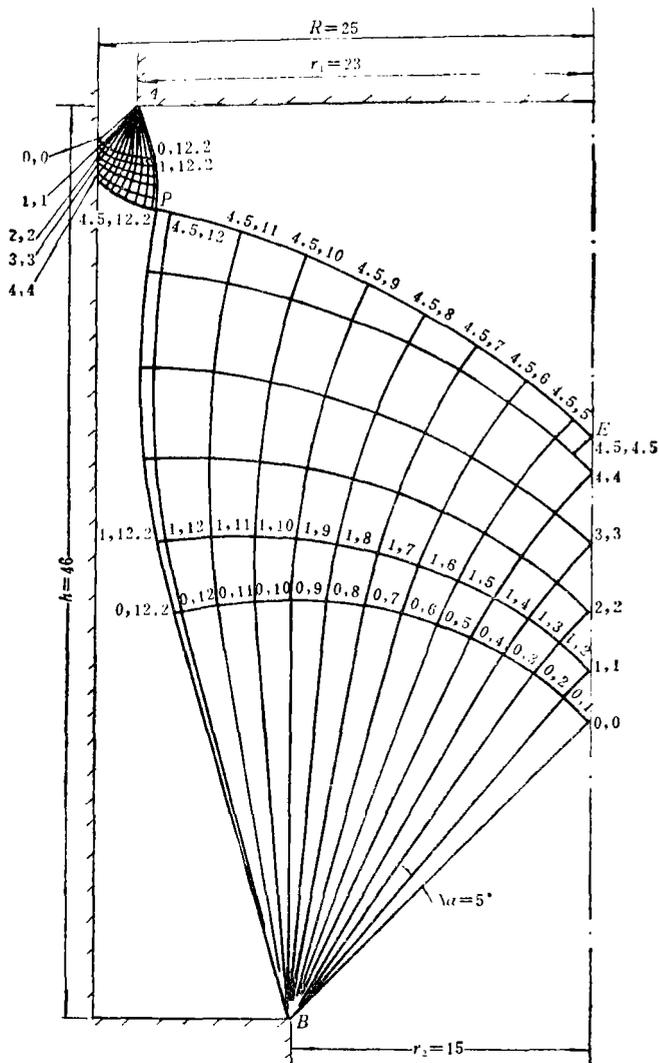


图 5 复合挤压时的滑移线场

表 1 在  $APE$  面上各节点的  $\sigma_y/K$  值

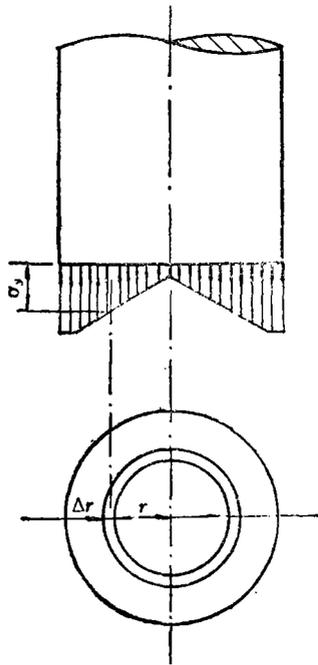
(凸模  $r_1=23$  毫米, 凹模  $r_2=15$  毫米, 毛坯  $R=25$  毫米,  $h=46$  毫米)

$l$	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4.5	4	3	2	1	0
$m$	4.5	5	6	7	8	9	10	11	12	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2	12.2
$\sigma_y/K$ *	-1.56	-1.65	-1.86	-2.09	-2.35	-2.64	-2.94	-3.27	-3.61	-3.68	-3.67	-3.67	-3.67	-3.66	-3.64

\*  $\sigma_y/K$  值为负值, 表示  $\sigma_y$  为压应力

$$\rho = \frac{r_2 R}{r_2 + R - r_1} \tag{3.4}$$

式中  $R$ ——凹模腔半径;  $r_1$ ——凸模半径;  $r_2$ ——凹模孔半径。



$$P = \sum \Delta P = \sum 2\pi r \cdot \Delta r \cdot \sigma_y$$

图6 求解凸模端面法向应力的示意图

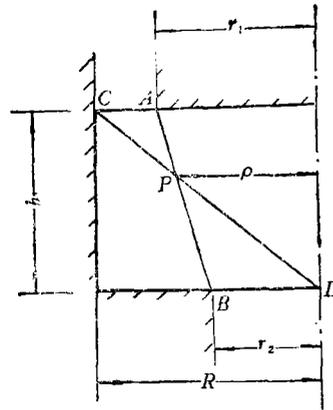


图7 分流点P的位置

#### 四、利用上限定理计算复合挤压力

根据金属流动实验和滑移线场可将平面变形时复合挤压的变形区分成多个刚性三角形，如图8所示<sup>[2]</sup>。图中P点就是分流点，它的位置按图7确定。图8中的AD和BF是垂直线，DP和PE是水平线。因此靠近分流点P处的三角形为直角三角形（ $\triangle ADP$ 及 $\triangle BEP$ ），其旁

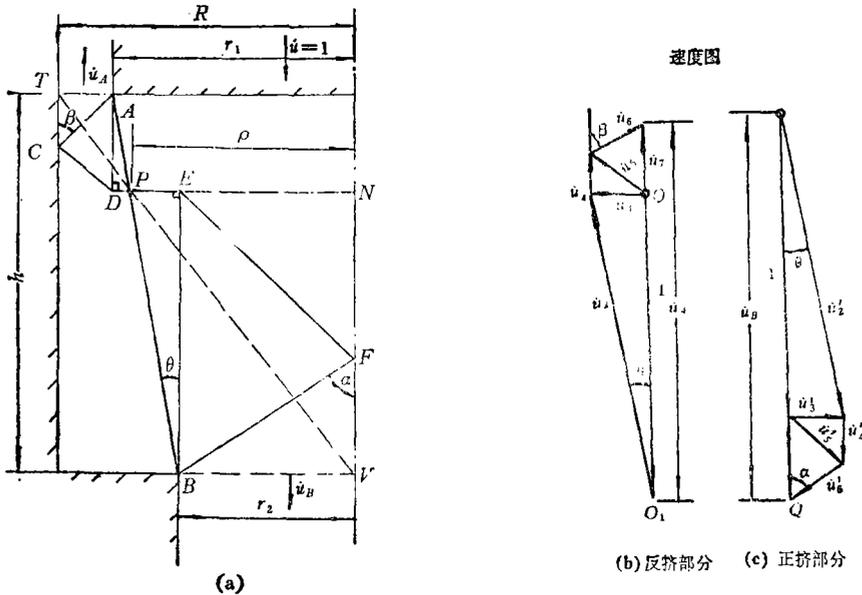


图8 复合挤压时变形区刚性三角形块与速度图

的三角形为任意三角形 ( $\triangle ADC$  及  $\triangle BEF$ )。  $\alpha, \beta$  角取任意值。

作反挤部分的速度图的方法如下 (图8b): 假设凸模向下的速度  $\dot{u}=1$ 。 平行于凸模运动方向作速度矢量  $OO_1$ , 过  $O_1$  点作  $\dot{u}_2$  平行于  $AP$ , 过  $O$  点作  $\dot{u}_3$  平行于  $PD$  且与  $\dot{u}_2$  相交, 过  $\dot{u}_2$  和  $\dot{u}_3$  的交点作  $\dot{u}_4$  平行于  $AD$ , 过  $O$  点作  $\dot{u}_5$  平行于  $DC$  且与  $\dot{u}_4$  相交, 再过  $\dot{u}_4$  和  $\dot{u}_5$  的交点作  $\dot{u}_6$  平行于  $CA$  且与  $O_1O$  相交, 这样就可以得出刚性三角形各个面上的速度不连续值。  $\dot{u}_2, \dot{u}_3, \dot{u}_4, \dot{u}_5$  和  $\dot{u}_6$  分别为面  $AP, DP, AD, CD$  和  $AC$  上的速度不连续值。  $\dot{u}_A$  为反挤部分的挤出速度。

正挤部分的速度图作法与此类似。  $\dot{u}_B$  为正挤部分的挤出速度 (图8c)。

根据图 8, 可以得到:

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}_A &= \frac{R-\rho}{R-r_1} \\ \dot{u}_B &= \frac{\rho}{r_2} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

将式(3.4)代入式(4.1), 则得:

$$\dot{u}_A = \dot{u}_B \quad (4.2)$$

即在平面变形时, 在假设的条件下, 正挤挤出速度等于反挤挤出速度。 根据几何关系, 可以求得:

$$\left. \begin{aligned} PD &= r_1 - \rho \\ AP &= \frac{r_1 - \rho}{\sin \theta} \\ AD &= \frac{r_1 - \rho}{\operatorname{tg} \theta} \\ AC &= \frac{R - r_1}{\sin \beta} \\ DC &= \sqrt{(R - r_1)^2 + \left( \frac{r_1 - \rho}{\operatorname{tg} \theta} - \frac{R - r_1}{\operatorname{tg} \beta} \right)^2} \\ \dot{u}_2 &= \frac{1}{\cos \theta} \\ \dot{u}_3 &= \operatorname{tg} \theta \\ \dot{u}_4 &= \dot{u}_A - 1 - \frac{\dot{u}_3}{\operatorname{tg} \beta} \\ \dot{u}_5 &= \sqrt{\dot{u}_3^2 + \left( \dot{u}_A - 1 - \frac{\dot{u}_3}{\operatorname{tg} \beta} \right)^2} \\ \dot{u}_6 &= \frac{\dot{u}_3}{\sin \beta} \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

以及

$$\left. \begin{aligned} PE &= \rho - r_2 \\ EB &= \frac{\rho - r_2}{\operatorname{tg} \theta} \\ BF &= \frac{r_2}{\sin \alpha} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 PB &= \frac{\rho - r_2}{\sin \theta} \\
 EF &= \sqrt{r_2^2 + \left( \frac{\rho - r_2}{\operatorname{tg} \theta} - \frac{r_2}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2} \\
 \dot{u}'_2 &= \frac{1}{\cos \theta} \\
 \dot{u}'_3 &= \operatorname{tg} \theta \\
 \dot{u}'_4 &= \left( \frac{\rho - r_2}{r_2} - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \alpha} \right) \\
 \dot{u}'_5 &= \sqrt{\operatorname{tg}^2 \theta + \left( \frac{\rho - r_2}{r_2} - \frac{\operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2} \\
 \dot{u}'_6 &= \frac{\operatorname{tg} \theta}{\sin \alpha}
 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

根据式(1.2)可得反挤部分的凸模单位压力  $p_b$  为:

$$p_b = \frac{K}{r_1} (AP \cdot \dot{u}'_2 + PD \cdot \dot{u}'_3 + AD \cdot \dot{u}'_4 + DC \cdot \dot{u}'_5 + AC \cdot \dot{u}'_6) \quad (4.5)$$

以及正挤部分的凸模单位压力  $p_f$  为:

$$p_f = \frac{K}{r_1} (PB \cdot \dot{u}'_2 + PE \cdot \dot{u}'_3 + EB \cdot \dot{u}'_4 + EF \cdot \dot{u}'_5 + BF \cdot \dot{u}'_6) \quad (4.6)$$

将式(4.3)代入式(4.5), 式(4.4)代入式(4.6), 可得:

$$\begin{aligned}
 p_b &= \frac{K}{r_1} \left\{ \frac{r_1 - \rho}{\sin \theta \cdot \cos \theta} + (r_1 - \rho) \operatorname{tg} \theta + \frac{(r_1 - \rho)^2}{(R - r_1) \operatorname{tg} \theta} \right. \\
 &\quad \left. - \frac{r_1 - \rho}{\operatorname{tg} \beta} + 2(R - r_1) \operatorname{tg} \theta + \frac{(R - r_1) \cdot \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg}^2 \beta} \right. \\
 &\quad \left. + (R - r_1) \cdot \operatorname{tg} \theta \left[ \frac{r_1 - \rho}{(R - r_1) \operatorname{tg} \theta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right]^2 \right\} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p_f &= \frac{K}{r_1} \left\{ (\rho - r_2) \operatorname{tg} \theta + \frac{\rho - r_2}{\sin \theta \cdot \cos \theta} + \frac{(\rho - r_2)^2}{r_2 \cdot \operatorname{tg} \theta} + 2r_2 \cdot \operatorname{tg} \theta \right. \\
 &\quad \left. + \frac{r_2 \cdot \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{\rho - r_2}{\operatorname{tg} \alpha} + r_2 \cdot \operatorname{tg} \theta \left( \frac{\rho - r_2}{r_2 \cdot \operatorname{tg} \theta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \right\} \quad (4.8)
 \end{aligned}$$

为了求  $p_b$  和  $p_f$  的最小值, 取

$$\frac{d p_b}{d \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} \right)} = 0 \quad \text{和} \quad \frac{d p_f}{d \left( \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)} = 0 \quad (4.9)$$

解之, 得:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{3(r_1 - \rho)}{4(R - r_1) \operatorname{tg} \theta} \quad (4.10)$$

和

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{3(\rho - r_2)}{4r_2 \cdot \operatorname{tg} \theta} \quad (4.11)$$

由图 8 的几何关系可得:

$$\frac{r_1 - \rho}{\rho - r_2} = \frac{AP}{PB} = \frac{R - r_1}{r_2}$$

所以

$$\frac{r_1 - \rho}{R - r_1} = \frac{\rho - r_2}{r_2} \quad (4.12)$$

比较式 (4.10)、(4.11) 和式 (4.12), 可得:

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta \quad (4.13)$$

这就是说, 当  $p_f$  和  $p_b$  具有最小值时,  $\alpha = \beta$ , 而复合挤压时总的凸模单位压力

$$p = p_f + p_b \quad (4.14)$$

所以

$$\begin{aligned} p_{\min} = & \frac{K}{r_1} \left\{ (r_1 - r_2) \operatorname{tg} \theta + \frac{r_1 - r_2}{\sin \theta \cdot \cos \theta} + \frac{(r_1 - \rho)^2}{(R - r_1) \operatorname{tg} \theta} \right. \\ & + \frac{(\rho - r_2)^2}{r_2 \cdot \operatorname{tg} \theta} + 2(R + r_2 - r_1) \operatorname{tg} \theta - \frac{r_1 - r_2}{\operatorname{tg} \alpha} \\ & + \frac{(R + r_2 - r_1) \operatorname{tg} \theta}{\operatorname{tg}^2 \alpha} + r_2 \operatorname{tg} \theta \left( \frac{\rho - r_2}{r_2 \operatorname{tg} \theta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right)^2 \\ & \left. + (R - r_1) \operatorname{tg} \theta \left[ \frac{r_1 - \rho}{(R - r_1) \operatorname{tg} \theta} - \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} \right]^2 \right\} \quad (4.15) \end{aligned}$$

由图 8 可得:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{r_1 - r_2}{h} \quad (4.16)$$

又因式 (3.4), 所以

$$\frac{\rho - r_2}{r_2 \cdot \operatorname{tg} \theta} = \frac{r_1 - r_2}{(R + r_2 - r_1) \operatorname{tg} \theta} = \frac{h}{R + r_2 - r_1} \quad (4.17)$$

由图 8 又可得:

$$\frac{1}{\sin \theta \cdot \cos \theta} = \frac{h^2 + (r_1 - r_2)^2}{h \cdot (r_1 - r_2)} = \frac{h}{r_1 - r_2} + \frac{r_1 - r_2}{h} \quad (4.18)$$

将式 (4.12)、(4.16)、(4.17) 和 (4.18) 代入式 (4.15), 可得:

$$\begin{aligned} p_{\min} = & \frac{K}{r_1} (r_1 - r_2) \left[ \frac{h}{r_1 - r_2} + \frac{2h}{R + r_2 - r_1} + \frac{2R}{h} \right. \\ & \left. + \frac{2(R + r_2 - r_1)}{h \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha} - \frac{3}{\operatorname{tg} \alpha} \right] \quad (4.19) \end{aligned}$$

由式 (4.10)、(4.11)、(4.13) 和 (4.17), 得:

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{3}{4} \frac{(\rho - r_2)}{r_2 \cdot \operatorname{tg} \theta} = \frac{3}{4} \frac{h}{(R + r_2 - r_1)} \quad (4.20)$$

将式 (4.19) 代入式 (4.20), 得:

$$p_{\min} = \frac{K}{r_1} (r_1 - r_2) \left( \frac{h}{r_1 - r_2} + \frac{2R}{h} + \frac{7}{8} \frac{h}{R + r_2 - r_1} \right) \quad (4.21)$$

这就是平面变形的复合挤压时凸模单位压力的最小上限解。

对于硬化材料，由于正挤部分与反挤部分材料的硬化不同，因而  $K$  值不同。这时可按式(4.21)计算  $p_{\min}$  值：

$$p_{\min} = \frac{K_b + mK_f}{r_1} \cdot \frac{R - r_1}{R + r_2 - r_1} \left[ \frac{2R}{h}(r_1 - r_2) + \frac{h}{8} \left( 1 + \frac{7R}{R + r_2 - r_1} \right) \right] \quad (4.22)$$

式中  $m = \frac{r_2}{R - r_1}$ ;

$K_f$  和  $K_b$  分别为正挤部分与反挤部分的材料剪切屈服应力，可按相当应变求出。

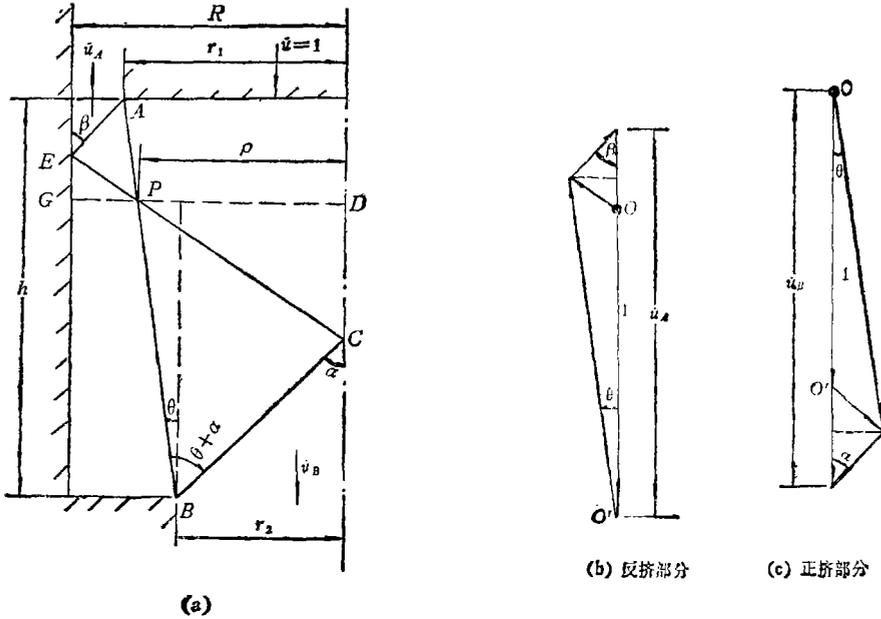


图9 复合挤压时简化的变形区刚性块与速度图

如果将变形区的刚性块划得更简单一些，如图9所示。但这时难于用解析法求出最小值。根据计算表明，上述两种刚性块的划法（图8和图9），对复合挤压时  $p_{\min}$  的影响相差不大（例如后者比前者约大1~2%）。

## 五、验证与比较

将由式(4.21)所得的平面变形时所需的凸模单位压力值与由滑移线法所得的值以及铅轴对称变形时的实测值加以比较，如表2所示。

图10和图11示出挤压力与毛坯高度的关系曲线。可见在实验范围内计算曲线与实测曲线基本平行，而且计算曲线略高于实测曲线。

## 六、结论

- 一、使用式(4.21)可以很方便地求出复合挤压时凸模单位压力的最小上限解。
- 二、根据式(4.21)求得的上限解可供实际使用。

表2 凸模单位压力的上限法计算值、滑移线法计算值与实测值的比较

凸模直径 (毫米)	反挤部分变形程度 $\varepsilon_{F_b}$ (%)	毛坯高度 $h$ (毫米)	实 测 值 (公斤/毫米 <sup>2</sup> )	按上限法的计算值 (公斤/毫米 <sup>2</sup> )	按滑移线法的计算值 (公斤/毫米 <sup>2</sup> )
φ32	41	36	5.4	5.5	4.4
		28	4.2	4.4	—
φ40	64	28	4.2	4.9	—
		36	5.2	5.8	5.4
		46	6.6	7.1	6.1

注：(1)凹模孔直径为30毫米，毛坯直径50毫米，即正挤部分变形程度 $\varepsilon_{F_j} = 64\%$ ；

(2)在计算时，取铅的 $\sigma_s = 3$ 公斤/毫米<sup>2</sup>， $K = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} = 2.3$ 公斤/毫米<sup>2</sup>。

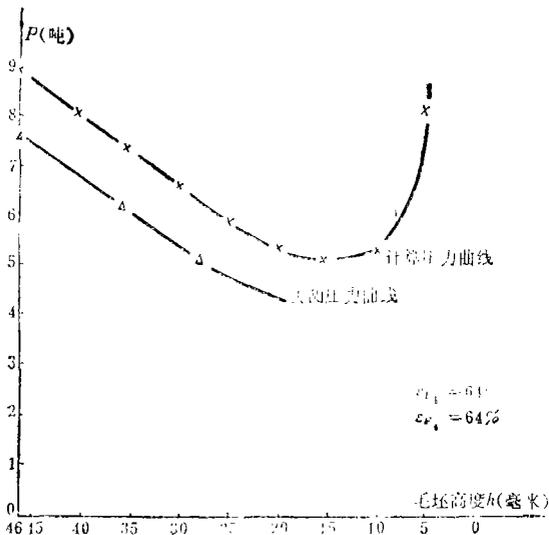


图10 挤压力与毛坯高度的关系曲线  
(毛坯直径50毫米，凸模直径40毫米，凹模孔直径30毫米， $\varepsilon_{F_j} = 64\%$ ， $\varepsilon_{F_b} = 64\%$ )

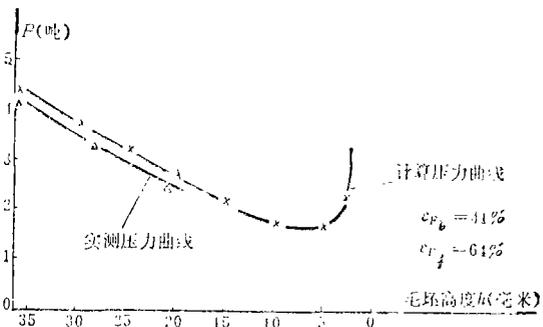


图11 挤压力与毛坯高度的关系曲线  
(毛坯直径50毫米，凸模直径32毫米，凹模孔直径30毫米， $\varepsilon_{F_j} = 64\%$ ， $\varepsilon_{F_b} = 41\%$ )

参 考 文 献

1. Johnson, W., and P. B. Mellor. *Engineering Plasticity*, VNR(1973).
2. Johnson, W., and H. Kudo, *The Mechanics of Metal Extrusion*, Manchester University Press, (1962).
3. Шюфман, Л. А., *Теория и Расчеты Процессов Холодной Штамповки*, Машиностроение, Москва, (1964), 39.
4. 赵静远, 金属复合挤压变形规律的研究, 锻压技术, 1(1980).
5. 张作梅, 赵士达, 不同温度、速度条件下G3、Cr13、铅、铅等塑性变形抗力的研究, 金属学报, 2(1963).

## An Upper-Bound Solution for the Force of Combined Backward-Forward Extrusion

Wu Shi-chun Tang Cai-rong An Jiang-shui Bin Feng

*(Northwestern Polytechnical University, Xian)*

### Abstract

A rigid-triangle velocity field based on the experiments and the slip-line field in combined backward-forward extrusion is drawn up. The point of flow separation in the rigid-triangle velocity field is defined in accordance with the slip-line field. Thus a formula of minimum upper-bound solution for force calculation is calculated. The formula is solely depended on the geometrical dimensions of the tools and the blank. It has been proved by experiments that the formula can be applied to practice. The minimum upper-bound solutions is also compared with the slip-line solutions.