应用数学和力学，第3卷第6期（1982年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于Korteweg-de Vries型方程的Bäcklund变换的分解*

黄迅成

（上海计算技术研究所，1981年12月1日收到）

摘　要

本文讨论了Korteweg-de Vries(K-dV)方程，经修改的K-dV方程、高阶K-dV方程和柱面K-dV方程的scale变换和Bäcklund变换的分解，得出了$B_a=S_a^{-1}B_1S_a$型分解关系式．这对深入研究Bäcklund变换的内在结构，特别是对群结构性质极为有益的．

Bäcklund变换（BT）是研究非线性演化方程的重要工具．关于Bäcklund变换的分解Steudel已有不少工作(见文献[1—3])．诚如屠规彰指出[4]，由方程的Bäcklund变换求方程的无穷多个守恒律，解的非线性迭加公式以及孤立子解都需要用到该变换所含的任意参数，因而建立BT的分解无疑是很重要的．本文获得了Korteweg-de Vries（K-dV）方程，修改的K-dV(mK-dV)方程，高阶的K-dV方程以及柱面K-dV方程的有关结果．

一、K-dV方程

$$u_t-6uu_x+u_{xxx}=0 \tag{1.1}$$

这里及下面的下标表示关于t或x的微分．

令$u=2w_x$，改写(1.1)为

$$w_t-6w_x^2+w_{xxx}=0 \tag{1.2}$$

它的一个BT为（见文[5]）

$$B_k:\quad w'_x+w_x=d^2-k^2 \tag{1.3a}$$

$$w'_t+w_t=-2dd_{xx}+d_x^2+3(d^2-k^2)^2 \tag{1.3b}$$

其中$d=w'-w$，w'与w为方程(1.2)的两个解，w'为w的BT(1.3)的结果，k为任意参数．

定义1. scale变换（ST）S_λ定义为

$$S_\lambda:\quad \begin{aligned} &x\to\tilde{x}=\lambda x\\ &t\to\tilde{t}=\lambda^3 t\\ &w\to\tilde{w}=\lambda^{-1}w \end{aligned} \tag{1.4}$$

显然，可以证明方程(1.2)在ST(1.4)下不变．我们有

* 钱伟长推荐．

定理1. 对 K-dV 方程 (1.2) 来说有关系

$$B_k=S_\lambda^{-1}B_{k/\lambda}S_\lambda \tag{1.5}$$

特别地，有

$$B_k=S_k^{-1}B_1S_k \tag{1.6}$$

其中 $B_{k/\lambda}$，B_1 分别为参数取 k/λ 和 1 的 BT(1.3)，S_k 为参数取 k 的 ST(1.4)。

注：这里的结论与文[2]用Galilean 变换所得的结论显然是不相同的.

二、修 改 的 K-dV方 程

$$v_t+24v^2v_x+v_{xxx}=0 \tag{2.1}$$

由代换 $v=\phi_x$ 可改写为

$$\phi_t+8\phi_x^3+\phi_{xxx}=0 \tag{2.2}$$

它的一个 BT 为（见文[6]）

$$B_a:\quad \phi'_x+\phi_x=a\sin 2(\phi'-\phi) \tag{2.3a}$$

$$\phi'_t+\phi_t=-8a(\phi'_x)^2\sin 2(\phi'-\phi)-4a^2(\phi'_x-\phi_x)\cos 4(\phi'-\phi)$$
$$+4a\phi_{xx}\cos 2(\phi'-\phi) \tag{2.3b}$$

其中 ϕ'，ϕ 为方程(2.2)的两个解，a 为任意参数.

定义2. scale 变换 S_μ 定义为

$$S_\mu:\quad \begin{aligned} &x\to\tilde{x}=\mu x\\ &t\to\tilde{t}=\mu^3t\\ &\phi\to\tilde{\phi}=\phi \end{aligned} \tag{2.4}$$

易知，方程(2.2)在 ST(2.4) 下不变. 我们证明了

定理2. 对 mK-dV方程(2.2)亦有关系

$$B_a=S_\mu^{-1}B_{a/\mu}S_\mu \tag{2.5}$$

特别地，有

$$B_a=S_a^{-1}B_1S_a \tag{2.6}$$

其中 $B_{a/\mu}$，B_1 分别为参数取 a/μ 和 1 的 BT(2.3)，S_a 为参数取 a 的 ST(2.4).

三、高 阶 K-dV 方 程

$$u_t+45u^2u_x+15(u_xu_{xx}+u_{xxx}u)+u_{xxxxx}=0 \tag{3.1}$$

在代换 $u=2w_x$ 下，可改写为

$$w_t+60(w_x)^3+30w_xw_{xxx}+w_{xxxxx}=0 \tag{3.2}$$

它的一个 BT 为（见文[5]）

$$B_k:\quad (w'-w)_{xx}+3(w'-w)(w'+w)_x+(w'-w)^3=k^3 \tag{3.3a}$$

$$(w'-w)_t-\frac{3}{2}[(w'-w)_{xxxx}+5(w'-w)(w'+w)_{xxx}$$

$$+15(w'-w)_{xx}(w'+w)_x+15(w'-w)^2(w'-w)_{xx}$$
$$+30(w'-w)(w'+w)_x^2+30(w'-w)^3(w'+w)_x+6(w'-w)^5]_x \qquad (3.3b)$$

其中 w'，w 为方程(3.2)的两个解，k 为任意参数.

定义3. scale 变换 S_ν 定义为

$$S_\nu: \quad x\to\tilde{x}=\nu x$$
$$t\to\hat{t}=\nu^5 t$$
$$w\to\tilde{w}=\nu^{-1}w \qquad (3.4)$$

显然，可证方程(3.2)在ST(3.4)下不变．我们有

定理3. 高阶K-dV方程的BT满足关系

$$B_k=S_\nu^{-1}B_{k/\nu}S_\nu \qquad (3.5)$$

特别地，有

$$B_k=S_k^{-1}B_1 S_k \qquad (3.6)$$

其中 $B_{k/\nu}$，B_1 为参数分别取 k/ν 和 1 的 BT(3.3)．S_k 为参数取 k 的 ST(3.4).

四、柱面K-dV方程

$$u_t+6uu_x+u_{xxx}+u/2t=0 \qquad (4.1)$$

在代换 $u=w_x$ 下可写为

$$w_t+3(w_x)^2+w_{xxx}+w/2t=0 \qquad (4.2)$$

它的一个 Bäcklund 变换为（见文[7]）

$$B_a: \quad (w'+w)_x=(x+a)/6t-\frac{1}{2}(w'-w)^2 \qquad (4.3a)$$

$$(w'-w)_t=(w_{xx}-w_{xx})(w'-w)-2(w_x)^2$$
$$-2w_xw_x-2w_x^2-(w'-w)/2t \qquad (4.3b)$$

其中 w',w 为方程(4.2)的两个解，a 为任意参数.

定义4. scale 变换 S_ξ 定义为

$$S_\xi: \quad x\to\tilde{x}=\xi^{-1}x$$
$$t\to\hat{t}=\xi^{-3}t$$
$$w\to\tilde{w}=\xi w \qquad (4.4)$$

易证．方程(4.2)在ST(4.4)下不变．我们有

定理4. 对柱面K-dV方程成立

$$B_a=S_\xi^{-1}B_{a/\xi}S_\xi \qquad (4.5)$$

特别地，有

$$B_a=S_a^{-1}B_1S_a \qquad (4.6)$$

其中 $B_{a/\xi}$,B_1 为参数分别取 a/ξ 和 1 的BT(4.3)．S_a 为参数取 a 的 ST(4.4).

这些定理的证明思路与文[8,9]相仿，这里不再赘述.

关于文中所涉及的方法在物理、力学和工程中都有广泛应用．例如，K-dV 方程最初由 Korteweg 和 de Vries 在 1895 年研究单方向运动的浅水波时所提出；后来在许多不同的领

域中曾反复出现，如出现在等离子体的离子声波，磁流体的动力波，非调和晶格，弹性杆中的纵向色散波，流体-气泡混合物中的压力波，低温非线性晶体的热激发声波等许多领域中，修改的 K-dV 方程可用来描述非调和晶格的声波运动，等离子体的 Alfvēn 波，具有不同密度的两个浅层流体的内波和在水平剪切带形大气流中的长距行星波等的传布．柱面 K-dV 方程是具有孤立子解的多维系统中最简单从而也是极为重要的非线性波动方程．它最初由 Maxon 和 Viecelli 在柱面几何系统中研究发射入等离子体的离子声波的传布而提出，至今不过六、七年时间，但也研究得相当完善．

本文承屠规彰教授和成安生副教授的热情指教，作者致以深切谢意．

参考文献

1. Steudel, H., Nother's theorem and higher conservation laws in ultrashort pulse propagation, *Annalen der Physik*, B32(1975), 205—216.
2. Steudel, H., Nother's theorem and the conservation laws of the Korteweg-de Vries equation, ibid, B32(1975), 445—455.
3. Steudel, H., Nonlinear Phenomena, A relation connecting scale transformation, Galilean transformation and Bäcklund transformation for the nonlinear Schrosinger equation, *Physica, D*, 1D(1980), 420—421.
4. 屠规彰，Boussinesq 方程的 Bäcklund 变换与守恒律，应用数学学报，4，1(1981)，63—68.
5. Boullough, R. K. and P. J. Gaudrey, (ed.), *Solitons Topics in Current Physics*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 17 (1980).
6. Hirota, R., A new form of Bäcklund transformation and its relation to the inverse scattering problem, *Prog. Thero. Phys.*, 52(1974), 1498—1512.
7. Nimmo, J. J. C. and D. G. Crighton, Bäcklund transformation for the cylindrical Korteweg-de Vries equation, *Phys. Lett.* 82A(1981), 211—214.
8. 黄迅成，自然杂志（研究通信），5，4(1982)，313.
9. 黄迅成，科学通报，27，9(1982)，569.

Decompositions of Bäcklund Transformations for the Korteweg-de Vries Equation

Huang Xun-cheng

(*Shanghai Institute of Computing Technique, Shanghai*)

Abstract

In this paper, decomposition relations such $B_a = S_a^{-1} B_1 S_a$, connecting scale transformations and Bäcklund transformations for the Korteweg-de Vries (K-dV), modified K-dV, higher order K-dV and cylindrical K-dV equations, are obtained.