应用数学和力学，第3卷第5期（1982年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

弹性力学中的立兹法和屈列弗兹法的一般推导*

熊祝华

（湖南大学，1981年8月14日收到）

摘　要

本文采用一般的数学表示形式推导了线弹性力学中的立兹法和屈列弗兹法，证明了立兹法给出相应泛函极值的上限，屈列弗兹法则给出其下限．同时发现，特征值问题（例如自振频率问题）泛函变分法中的屈列弗兹法同求特征值的放松边界条件下限法是一致的．当然，此处的推导结果，也适用于一类泛函的变分法中，这类泛函的欧拉方程是线性正定的．

在实际问题中，要求出满足给定边界条件的制约微分方程式的精确解往往很困难，因此只有借助于求近似解．如果问题的制约方程为某一泛函的欧拉方程，则求这种近似解的最有效方法是泛函变分法．近二十年来发展极快的有限元法也是以泛函变分方法为基础的．为了估计近似解的误差，我们希望能同时求出精确解的上、下限．弹性力学中熟知的立兹法是计算泛函极值的上限，而屈列弗兹（Trefftz）法则是计算其下限．有时，由泛函极值的上、下限可以求出某种物理量的上、下限；例如，等直杆抗扭刚度的上、下限，自振频率的上、下限，电容器电容的上、下限等[1]．此处将采用一般的数学表示形式推导这两个方法；同时以薄板振动问题为例，证明了特征值问题泛函变分法中的屈列弗兹法和力学中求自振频率的边界条件放松下限法[1][2]是一致的．

（一）

在一些问题中，例如在弹性力学中，有一类泛函，它们的欧拉方程是线性微分方程，可以写成：

$$Au=f \tag{1.1}$$

式中A为线性微分算子，u为泛函的宗量函数，f为已知函数．这类泛函在一定的边界条件下可写成如下的形式[1]：

* 薛大为推荐．

$$V(u)=(Au,u)-2(f,u) \tag{1.2}$$

式中(Au,u)，(f,u)分别为Au和u，f和u的内积，即

$$(Au,u)=\int_\tau (Au)ud\tau \tag{1.3}$$

$$(f,u)=\int_\tau fud\tau \tag{1.4}$$

τ为泛函的积分区域．此处假定这个区域的边界是固定的，即只考虑不动边界的变分 问题．今后，我们将式(1.2)中的(Au,u)称为泛函$V(u)$的二次项，并记作$V^0(u)$．当A是正 定的，则$V^0(u)$是正定的．在弹性力学中，只要边界是固定的，或者部份固定、部份自由，则其泛函都具有(1.2)的形式，而且(Au,u)是正定的．

可以证明[1)]：

$$(Au^*,u)=(Au,u^*)+\int_s \Phi(u^*,u)ds \tag{1.5}$$

上式右侧的积分在泛函积分区域的边界上进行．被积函数是u^*和u的线性微分运算式，它对应于问题的边界条件，具有下述线性性质

$$\Phi(ku^*,u)=\Phi(u^*,ku)=k\Phi(u^*,u) \tag{1.6}$$

其中k为任意常数．

例如，弹性力学中平衡方程为

$$\sigma_{ij,j}+f_i=0 \tag{1.7}$$

式中$i,j=1,2,3$；重复字母标号表示求和，f_i为体积力；标号前的“，”表示对位置坐标求偏导数，如$u_{i,j}=\partial u_i/\partial x_j$．几何方程为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}) \tag{1.8}$$

应力应变关系为：

$$\sigma_{ij}=\lambda\theta\delta_{ij}+2\mu\varepsilon_{ij} \tag{1.9}$$

式中

$$\theta=\varepsilon_{ii}=u_{i,i} \tag{1.10}$$

δ_{ij}为Kronecker delta．将式(1.8—1.10)代入式(1.7)，可得

$$-\sigma_{ij,j}=-\lambda(\varepsilon_{kk})_{,i}-\mu(u_{i,j}+u_{j,i})_{,j}$$

$$=-\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\mu\delta_{ij}\nabla^2\right]u_j=A_{ij}u_j$$

所以用位移表示的平衡方程式可写成：

$$Au=[A]\{u\}=\{f\} \tag{1.8}$$

式中A为微分算子对称矩阵，其分量为

$$-A_{ij}=(\lambda+\mu)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\mu\delta_{ij}\nabla^2 \tag{1.9}$$

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{1.10}$$

---

1) 满足(1.5)的算子称为自伴随算子．

$$\{u\}=\{u_1,u_2,u_3\}^T,\quad \{f\}=\{f_1,f_2,f_3\}^T \tag{1.11}$$

于是

$$-(Au^*,u)=-(A_{ij}u_j^*u_i)=\int_\tau\left[(\lambda+\mu)\frac{\partial^2u_j^*}{\partial x_i\partial x_j}u_i+\mu\delta_{ij}(\nabla^2u_j^*)u_i\right]d\tau$$

经过某些运算并应用 Green 定理，可得

$$-(Au^*,u)=-(Au,u^*)+\int_s\Phi(u^*,u)ds \tag{1.12}$$

$$\int_s\Phi(u^*,u)ds=\int_s[\lambda\theta^*\delta_{ik}+\mu(u_{i,k}^*+u_{k,i}^*)]l_ku_ids$$
$$-\int_s[\lambda\theta\delta_{jk}+\mu(u_{j,k}+u_{k,j})]l_ku_j^*ds \tag{1.13}$$

式中 $\theta^*=u_{i,i}^*$，l_i 为边界上外法线的方向余弦．

注意到：

$$[\lambda\theta^*\delta_{ik}+\mu(u_{i,k}^*+u_{k,i}^*)]l_k=\sigma_{ik}^*l_k=p_i^* \tag{1.14}$$

这对应于位移为 $\{u^*\}$ 时边界上的表面力；而

$$[\lambda\theta\delta_{jk}+\mu(u_{j,k}+u_{k,j})]l_k=\sigma_{jk}l_k=p_j \tag{1.15}$$

这对应于位移为 $\{u\}$ 时的边界力．于是式(1.12)可写成：

$$(Au^*,u)+\int_s p_i^*u_ids=(Au,u^*)+\int_s p_ju_j^*ds \tag{1.16}$$

上式实际上就是功的互等定理．显然，式(1.12)与式(1.5)一致，其中 $\Phi(u^*,u)$ 满足线性关系(1.6)．

(二)

设有三个函数 u_1，u_2，u_3，而且 $u_1=u_2+u_3$．因为 A 是线性算子，故由式(1.2)可得

$$V(u_1)=V(u_2)+V^0(u_3)+(Au_2,u_3)+(Au_3,u_2)-2(f,u_3)$$

根据式(1.5)，上式可写成：

$$V(u_1)=V(u_2)+V^0(u_3)+2(Au_2-f,u_3)+\int_s\Phi(u_2,u_3)ds, \tag{2.2}$$

由上式可以推导立兹法和屈列弗兹法．

立兹法

设 $u_1=u^{**}$ 是某一只满足边界条件的函数，且设

$$u^{**}=a_i\varphi_i,\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k \tag{2.3}$$

式中 φ_i 为满足边界条件的选定函数，a_i 为待定系数．又设 $u_2=u$ 是泛函的极值函数，它同时满足边界条件和欧拉方程 $Au-f=0$．于是，$u_3=u^{**}-u=\tilde{u}$ 是近似函数和极值函数之差，显然它的边界值为零．于是根据 (Au,u) 的正定性恒有

$$V^0(\tilde{u})\geqslant 0 \tag{2.4}$$

只当 $\tilde{u}=0$ 时才取等号．将 u^{**}，u 及 $\tilde{u}$ 代入式(2.2)，可得

$$V(u^{**})=V(u)+V^0(\tilde{u})+2(Au-f,\tilde{u})+\int_s\Phi(u,\tilde{u})ds \tag{2.5}$$

式中$V(u)=V_{极值}$，$Au-f=0$．因u满足边界条件，$\tilde{u}$的边界值为零，所以上式的边界积分为零．于是式(2.5)变为：

$$V(u^{**})=V(u)+V^0(\tilde{u})$$

因$V^0(\tilde{u})\geqslant 0$，所以

$$V(u^{**})\geqslant V_{极值} \tag{2.6}$$

即$V(u^{**})$是泛函极值的上限．为了得到最好的上限，应该调整式(2.3)中的待定系数α_i，使V^{**}取最小值．即确定α_i的条件为：

$$\frac{\partial V^{**}}{\partial \alpha_i}=0 \quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k, \tag{2.7}$$

这就是立兹法．

屈列弗兹法

设$u_1=u$是泛函的极值函数；$u_2=u^*$是近似极值函数，它只满足欧拉方程$Au^*-f=0$；并设

$$u^*=g_0+\beta_i g_i+\beta_0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k. \tag{2.8}$$

选取g_0和g_i，使满足

$$Ag_i=0 \qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k \tag{2.9}$$

$$Ag_0=f \tag{2.10}$$

β_0，β_i为待定系数．显然，$u_3=u-u^*=\tilde{u}$是极值函数与近似函数之差．将u，u^*及$\tilde{u}$代入式(2.2)，得到：

$$V(u)=V(u^*)+V^0(\tilde{u})+2(Au^*-f,\tilde{u})+\int_s \Phi(u^*,\tilde{u})ds$$

已知$Au^*-f=0$，所以

$$V(u)=V(u^*)+V^0(\tilde{u})+\int_s \Phi(u^*,\tilde{u})ds \tag{2.11}$$

如果调整待定系数β_i，使得u^*满足近似边界条件

$$\int_s \Phi(u^*,\tilde{u})ds=0 \tag{2.12}$$

则$\tilde{u}=u^*-u$的边界条件是（近似）齐次的．于是根据$V^0(\tilde{u})\geqslant 0$，由式(2.11)可得：

$$V(u)\geqslant V(u^*) \tag{2.13}$$

上式表明，满足欧拉方程和近似边界条件(2.12)的近似函数将给出泛函极值的下限．这就是屈列弗兹法．

易于证明，调整待定系数β_i，使$V^0(\tilde{u})$取极值，则可保证近似函数u^*满足近似边界条件(2.12)．已知$V^0(\tilde{u})$是β_i的函数，当β_i存变分$\delta\beta_i$时，$V^0(\tilde{u})$的变分为：

$$\delta V^0(\tilde{u})=(A\tilde{u},\delta\tilde{u})+(A\delta\tilde{u},\tilde{u})$$

按式(1.5)，可得

$$(A\tilde{u},\delta\tilde{u})=(A\delta\tilde{u},\tilde{u})+\int_s \Phi(\delta\tilde{u},\tilde{u})ds \tag{2.14}$$

注意到$\tilde{u}=u-u^*$，其中u与β_i无关，因此

$$\delta\tilde{u}=-\delta u^*=-\frac{\partial u^*}{\partial\beta_i}\delta\beta_i=-g_i\delta\beta_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ k \tag{2.15}$$

于是（参阅式1.6）：

$$\delta V^0(\tilde{u})=-2(Ag_i,\tilde{u})\delta\beta_i-\int_s(g_i,\tilde{u})\delta\beta_i ds \tag{2.16}$$

$V^0(\tilde{u})$取极值时，$\delta V^0(\tilde{u})=0$，又 $Ag_i=0$，$\delta\beta_i$ 是任意变分，由此可得 $V^0(\tilde{u})$取极值的条件为：

$$\int_s\Phi(g_i,\tilde{u})ds=0,\quad i=1,2,\ \cdots,\ k \tag{2.17}$$

为了确定 β_0 及 β_i 共$(k+1)$个系数，再加一个边界条件：

$$\int_s\Phi(g_0+\beta_0,\ \tilde{u})ds=0 \tag{2.18}$$

将式(2.17)分别乘 β_i，然后相加，并加上式(2.18)，可以得到近似边界条件（2.12）.

（三）

设特征值方程为

$$Au-\lambda wu=0 \tag{3.1}$$

式中 w 为给定的函数，λ 为某常数，A 为线性正定算子．在函数 u 满足一定的边界条件下，式(3.1)为下列泛函的欧拉方程：

$$V(u)=(Au,\ u)-(\lambda wu,u) \tag{3.2}$$

上式便是特征值问题的泛函．当 u 为极值函数时，$V(u)=V_{极值}$，而且

$$V_{极值}=(Au-\lambda wu,\ u)=0 \tag{3.3}$$

如果 u 是只满足边界条件的近似极值函数，且令

$$\lambda=\frac{I}{J}=\frac{(Au,u)}{(wu,u)}, \tag{3.4}$$

则

$$\delta\lambda=\frac{\delta I}{J}-\frac{I\delta J}{J^2}=\frac{\delta I-\lambda\delta J}{J}=\frac{\delta V(u)}{J} \tag{3.5}$$

上式表明，泛函(3.4)取极值与泛函(3.2)取极值是等价的．此即瑞利（Rayleigh）原理．因为$(Au,\ u)$是正定的，如果在积分区域内 $w>0$（有时 $w=1$），则 λ 总是正数，此时泛函 λ 及 $V(u)$的极值为最小值．

现设 u^{**} 是只满足边界条件的近似极值函数．因为 u^{**} 只是所有满足边界条件的函数中的一部份，所以对应于 u^{**}的泛函极值是泛函真实极值的上限，即

$$V(u^{**})\geqslant u_{极值}=0 \tag{3.6}$$

或者

$$V(u^{**})=I^{**}-\lambda J^{**}\geqslant 0 \tag{3.7}$$

由此可得

$$\lambda^{**}=\frac{I^{**}}{J^{**}}\geqslant\lambda \tag{3.8}$$

式中

$$I^{**}=(Au^{**},\ u^{**}),\quad J^{**}=(wu^{**},\ u^{**})$$

式(3.8)表明，只满足边界条件的近似极值函数给出特征值的上限．用式(3.8)计算特征值的方法叫瑞利立兹法．

现在令

$$u=u^*+\tilde{u} \tag{3.9}$$

u 为泛函(3.2)的极值函数，u^* 为只满足特征方程(3.1)的近似极值函数，$\tilde{u}$ 为两者之差．于是，根据 A 为线性算子，应有

$$V(u)=V(u^*)+V(\tilde{u})+2(Au^*-\lambda wu^*,\ \tilde{u})+\int_s \Phi(u^*,\tilde{u})ds \tag{3.10}$$

如果令 u^* 满足下列近似边界条件：

$$\int_s \Phi(u^*,\tilde{u})ds \tag{3.11}$$

又知 $Au^*-\lambda wu^*=0$，于是，当 $V(\tilde{u})\geqslant 0$ 时，则有

$$V(u)\geqslant V(u^*) \tag{3.12}$$

上式表明，当 $V(\tilde{u})\geqslant 0$ 时，满足特征方程和近似边界条件(3.11)的近似函数，给出相应泛函极值的下限，即

$$V(u^*)\leqslant 0$$

或者

$$V(u^*)=I^*-\lambda J^*\leqslant 0$$

由此可得

$$\lambda^*=\frac{I^*}{J^*}=\frac{(Au^*,u^*)}{(wu^*,u^*)}\leqslant\lambda \tag{3.13}$$

上式表明，在 $V(\tilde{u})\geqslant 0$ 的情况下，满足特征方程和近似边界条件的函数，给出（最小）特征值的下限．这是特征值问题泛函变分法中的屈列弗兹法．

上述结论中，要求 $V(\tilde{u})\geqslant 0$．如果近似边界条件(3.11)意味着放松泛函的强加边界条件，则恒有 $V(\tilde{u})\geqslant 0$，$V(u^*)\leqslant V(u)$．因为放松强加边界条件意味着在比原来泛函 $V(u)$ 更为广大的范围内选取函数 u^* 使泛函到达极值，显然，这样得到的泛函最小值决不会大于原有边界条件下泛函的（真实）最小值．例如，在力学中，放松强加的位移边界条件意味着放松边界约束，这将降低结构的刚度，从而降低、或者说，不会提高结构的自振频率[1]．

设近似函数为

$$u^*=\beta_i f_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{3.14}$$

其中 f_i 为选取的函数，它们满足特征值方程1)

$$Af_i-\lambda wf_i=0 \tag{3.15}$$

类似于上节，可以证明，调整待定系数 β_i，使 $V(\tilde{u})$ 取极值，则可使近似边界条件(3.11)得到满足．确定 β_i 的条件为：

$$\int_s \Phi(f_i,\ \tilde{u})ds=0.\quad i=1,\ 2,\cdots,n \tag{3.16}$$

1)计算特征值的下限还有其它的方法，例如见[3、4、5]．

将可看到，上式乃 β_i 的 n 个线性齐次代数方程式，其系数为特征值 λ 的函数．要使 β_i 有非零解，方程组的系数行列式必为零．由此可以求出 n 个特征值，其中最小者乃真实最小特征值的下限．下面分析薄板的弹性振动问题．

设板的挠度为 $w(x,y)$，边界固定，即在边界上：

$$w(s)=0,\ \left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_s=0 \tag{3.17}$$

这是强加边界条件．现设放松边界约束，使板的边界在简支与固定之间，即 $w(s)=0$，而 $\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_s$ 则只近似满足．本问题的泛函为：

$$V(w)=\iint_D[(w_{,xx}+w_{,yy})^2-2(1-\nu)(w_{,xx}w_{,yy}-w_{,xy}^2)]dxdy-\lambda\iint_D w^2dxdy \tag{3.18}$$

$$\lambda=\rho\omega^2/D \tag{3.19}$$

ρ 是板中面单位面积上的质量，ω 是周期运动的角速度，D 是板的抗弯刚度．泛函(3.18)的欧拉方程为

$$\nabla^2\nabla^2 w-\lambda w=0 \tag{3.20}$$

这是薄板的自由振动方程，设

$$w=w^*+\tilde{w} \tag{3.21}$$

式中 w 为板的真实挠度（极值函数），w^*为近似挠度，其式为

$$w^*=\beta_i w_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{3.22}$$

选取 w_i 使能满足特征值方程(3.20)，在边界上 $w_i(s)=0$，$\left.\frac{\partial w_i}{\partial n}\right|_s$ 满足近似边界条件．在式(3.18)中，以 $\tilde{w}$ 代 w，就得到 $V(\tilde{w})$，它是 β_i 的函数．$V(\tilde{w})$取极值的条件为：

$$\frac{\partial V(\tilde{w})}{\partial\beta_i}=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{3.23}$$

注意到 $\tilde{w}=w-w^*$，w 与 β_i 无关，则有

$$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial\beta_i}=-\frac{\partial w^*}{\partial\beta_i}=-w_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{3.24}$$

利用上式及Green定理，不难得到：

$$\frac{\partial V(\tilde{w})}{\partial\beta_i}=-2\iint_D(\nabla^2\nabla^2 w_i-\lambda w_i)\tilde{w}dxdy$$

$$-2\int_s\left(\frac{\partial^2 w_i}{\partial n^2}+\nu\frac{\partial^2 w_i}{\partial s^2}\right)\frac{\partial\tilde{w}}{\partial n}ds+2\int_s\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\partial^2 w_i}{\partial n^2}+(2-\nu)\frac{\partial^2 w_i}{\partial s^2}\right]\tilde{w}ds=0 \tag{3.25}$$

已知$\nabla^2\nabla^2 w_i-\lambda w_i=0$，$\tilde{w}(s)=0$，$(\because w(s)=w^*(s)=0)$

以及 $w_i(s)=0$，$\frac{\partial^2 w_i}{\partial s^2}=0$，所以上式变成：

$$\int_s\frac{\partial^2 w_i}{\partial n^2}\ \frac{\partial\tilde{w}}{\partial n}ds=0,\ i=1,2\cdots,\ n \tag{3.26}$$

因为$\frac{\partial\tilde{w}}{\partial n}=\frac{\partial w}{\partial n}-\frac{\partial w^*}{\partial n}$，$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_s=0$，所以上式变为

$$\int_s \frac{\partial^2 w_i}{\partial n^2}\frac{\partial w^*}{\partial n}ds=\beta_k\int_s \frac{\partial^2 w_i}{\partial n^2}\frac{\partial w_k}{\partial n}ds=0 \qquad i,k=1,2,\cdots,n \tag{3.27}$$

令

$$\gamma_{ik}(\lambda)=\int_s \frac{\partial^2 w_i}{\partial n^2}\frac{\partial w_k}{\partial n}ds,\ i,k=1,2,\cdots,n \tag{3.28}$$

则式(3.27)是β_i的线性齐次代数方程组：

$$\gamma_{ik}\beta_k=0, \qquad i,k=1,2,\cdots,n \tag{3.29}$$

为使$\beta_i\neq 0$，要求

$$|\gamma_{ik}|=0 \tag{3.30}$$

由上式可以求出几个特征值，其中最小者乃薄板（周边固定）最小自振频率的下限．有趣的是，上述结果和万因斯坦-钱伟长采用边界条件放松下限法所得结果完全一致[2]或[1]，后者是要求$\left.\frac{\partial w}{\partial n}\right|_s$的某种加权平均值为零，将这个条件作为求泛函极值的一个约束；然后用Lagrange乘子法，将上述条件极值问题转化为非条件泛函极值问题，从而得到与此处完全相同的结果．式(3.27)中的$\frac{\partial^2 w_i}{\partial n^2}$即为万因斯坦-钱伟长所采用的权函数．显然，权函数越多，放松的边界条件就越接近于原来的固定边界，所求得的下限值越接近于真实解；亦即近似函数所包含的待定系数越多，用屈列弗兹法求得的下限值越好．

参 考 文 献

1. 钱伟长，«变分法和有限元»，上册，科学出版社(1980).
2. Weinstein, A. and Chien, W. Z. (钱伟长), On the vibrations of a clamped plate under tension, *Quarterly of Applied Mathematics*, 1, 1 (1943), 61—68.
3. Weinstein, D. H., Modified Ritz method, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 20 (1934), 529—532.
4. MacDonald, J. K. L., On the modified Ritz variational method, *Phys. Rev.*, 46 (1934), 828—829.
5. Kohn, W., A note on Weinstein's variational method, *Phys. Rev.*, 71 (1947), 902.

The General Derivation of Ritz Method and Trefftz Method in Elastomechanics

Shung Chu-hua

(*Hunan University, Changsha*)

Abstract

This paper derives Ritz method and Trefftz method in elastomechanics with the help of the general mathematical expressions. Thus it is proved that Ritz method gives out the upper bound of the corresponding functional extremum, while Trefftz method gives out its lower bound. At the same time it is discovered that the eigenvalue problem (e. g. the natural frequency problem) concerning the functional variational method in Trefftz method is in concord with the lower bound method of the loosened boundary condition which seeks for the eigenvalue. Of course, the results of this derivation is also applicable to the sort of functional variational method of which Euler's equation is linear positive definite.